Modeli u neprekidnom vremenu

Bojan Basrak, PMF–MO Zagreb

Financijski praktikum

9. travnja 2016.

Brownovo gibanje

U diskretnom vremenu važan model promjene cijena financijske imovine mogli smo izraziti preko slučajnih šetnji, slično vrijedi i u neprekidnom vremenu samo ulogu slučajne šetnje često zauzima *Brownovo gibanje*. No postoji i bliska veza između ova dva modela.

Theorem (Donsker)

Neka su (X_n) njd, $EX_i = \mu$ i $\operatorname{var} X_i = \sigma^2 \in (0, \infty)$, tada za $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ vrijedi

$$\left(\frac{S_{\lfloor sn \rfloor} - sn\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)_{s\in[0,1]} \xrightarrow{d} \sigma(B_s)_{s\in[0,1]} \, ,$$

gdje je (B_s) standardno Brownovo gibanje.

Slučajni proces $(B_t)_{t\in[0,1]}$ zove se (standardno) **Brownovo gibanje** ako vrijedi:

i) $B_0 = 0$ g.s.
ii) putevi procesa (B_t) su neprekidni g.s.
iii) prirasti

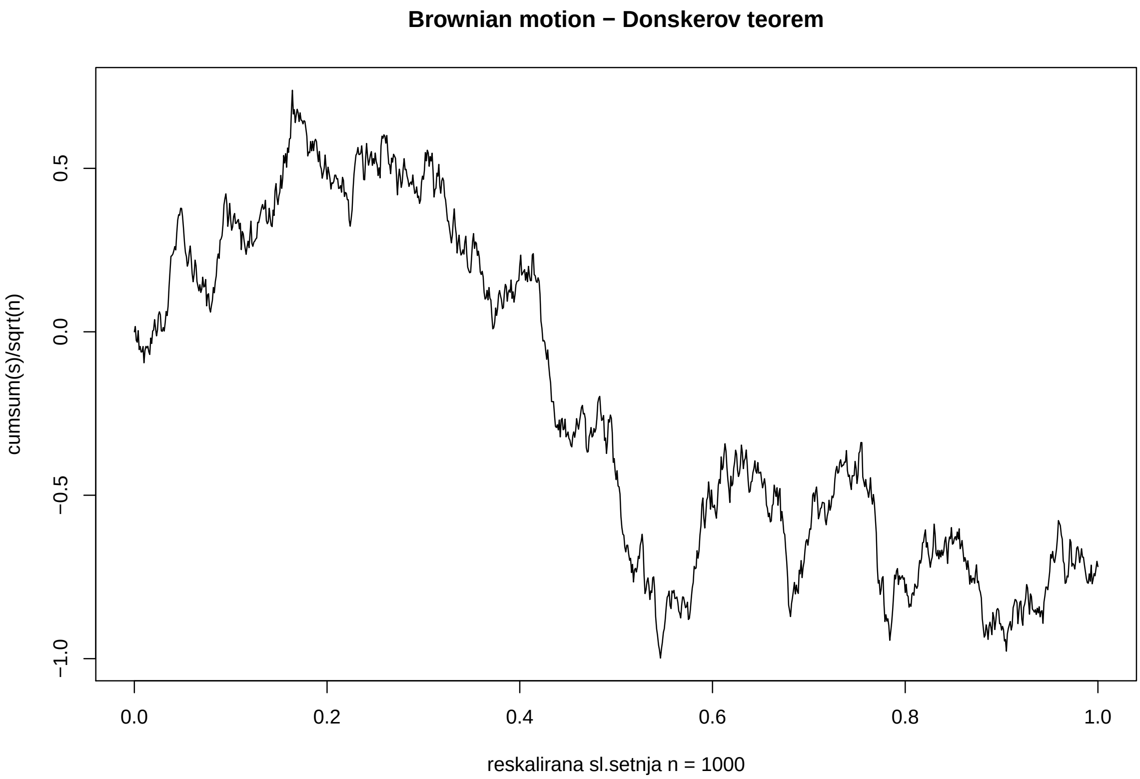
$$B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

su *nezavisni* za sve $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ i *stacionarni* tj. za sve $h > 0$

$$B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t+h} - B_{s+h}\,.$$

iv) $B_t \sim N(0,t)$ za sve $t > 0$.

Aproksimacija Brownovog gibanja preko Donskerovog teorema



Brownovo gibanje ima mnoga zanimljiva svojstva: npr. putevi mu nisu nigdje diferencijabilni g.s. U blizini bilo kojeg posjeta 0, ono 0 posjeti beskonačno mnogo puta. Brownovo gibanje je i sebi–sličan (engl. self–similar) proces tj. sve $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ i $T > 0$

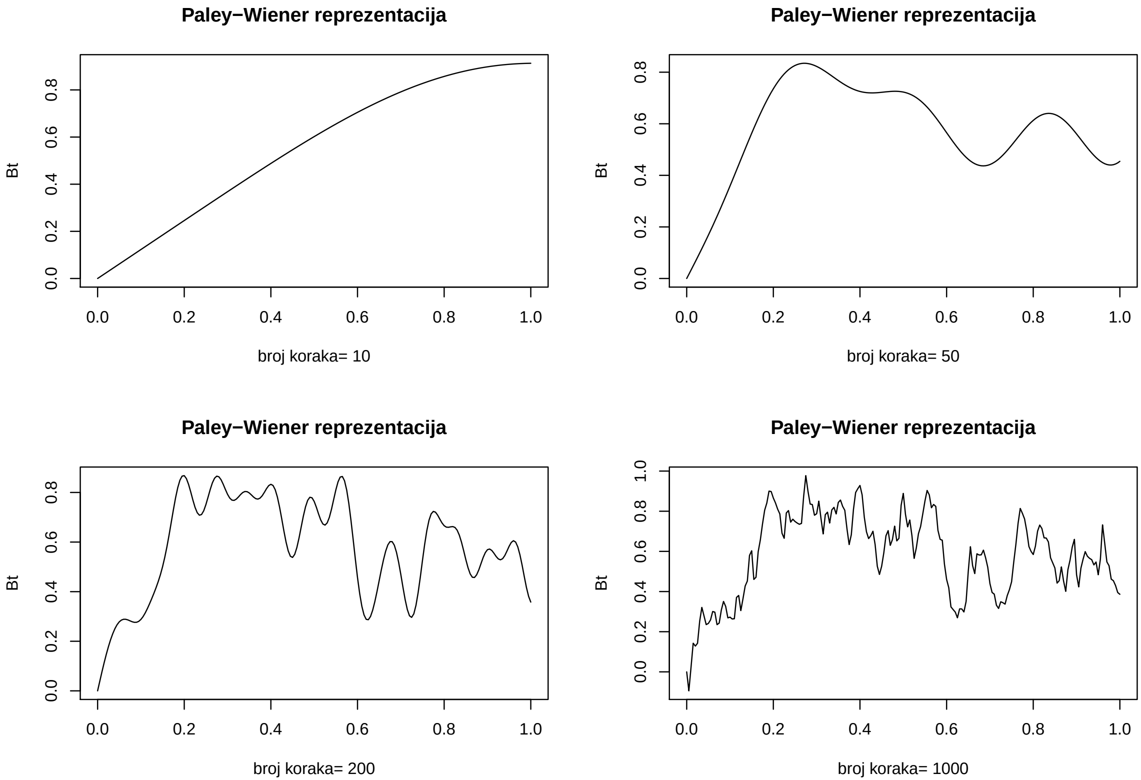
$$T^{1/2}(B_t)_t \stackrel{d}{=} (B_{Tt})_t$$

Simulacija Brownovog gibanja

Zbog svojstva sebi–sličnosti dovoljno ga je znati simulirati na proizvoljnom konačnom intervalu, npr $[0, 2\pi]$ ili $[0, 1]$. A zbog neprekidnosti puteva možemo ga prikazati koristeći Fourierove redove, odn. redove funkcija.
Ako koristimo uobičajeni Fourierov red preko funkcija $\sin$ i $\cos$ dobijemo tzv. **Paley–Wienerovu reprezentaciju** B.g.

$$B_t = Z_0 \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{\sin(nt/2)}{n},$$

gdje su $Z_i \sim N(0, 1)$ njd, a $t \in [0, 2\pi]$.


Paley−Wiener reprezentacija
Bt
broj koraka= 10
Paley−Wiener reprezentacija
Bt
broj koraka= 50
Paley−Wiener reprezentacija
Bt
broj koraka= 200
Paley−Wiener reprezentacija
Bt
broj koraka= 1000

Alternativno možemo koristiti baze funkcija. Na osnovu Haarovih funkcija

$$H_1(t) = 1,$$

$$H_{2^{m+1}}(t) = \begin{cases} 2^{m/2} & t \in [1 - 2/2^{m+1}, 1 - 1/2^{m+1}) \\ -2^{m/2} & t \in [1 - 1/2^{m+1}, 1] \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$H_{2^m+k}(t) = \begin{cases} 2^{m/2} & t \in [(k-1)/2^m, (k-1)/2^m + 1/2^{m+1}) \\ -2^{m/2} & t \in [(2k-1)/2^{m+1}, k/2^m) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

definiramo pripadnu Schauderovu bazu funkcija na $[0,1]$

$$\widetilde{H}_n(t) = \int_0^t H_n(s)ds$$

Lévyjeva reprezentacija B.g.

$$B_t = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \widetilde{H}_n(t)\,,$$

gdje su $Z_i \sim N(0,1)$ njd, a $t \in [0,1]$.

U ovoj reprezentaciji Brownovo gibanje se vrlo efikasno (i posve točno) može simulirati u svim dijadskim točkama.

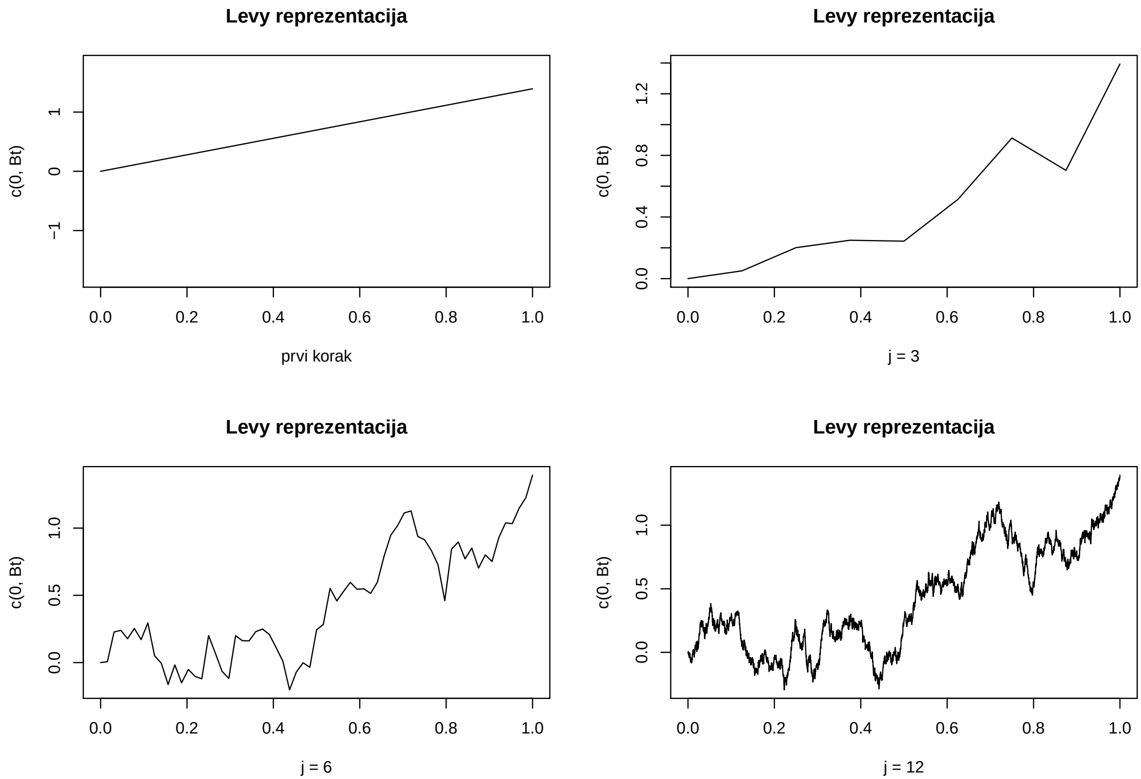
Algoritam

> $B_0 = 0$
> sample $B_1 \sim N(0,1)$

for $j = 0, 1, \ldots, j-1$

  for $l = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$

    > sample $Y \sim N(0,1)$
    > $B_{\frac{2l+1}{2^{j+1}}} = \frac{1}{2}(B_{\frac{l}{2^j}} + B_{\frac{l+1}{2^j}}) + \frac{1}{2^{j/2+1}} Y$


Levy reprezentacija
c(0, Bt)
−1
0
1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
prvi korak
Levy reprezentacija
c(0, Bt)
0.0
0.4
0.8
1.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
j = 3
Levy reprezentacija
c(0, Bt)
0.0
0.5
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
j = 6
Levy reprezentacija
c(0, Bt)
0.0
0.5
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
j = 12

Najosnovniji model za kretanje cijena dionica npr. u neprekidnom vremenu je tzv. geometrijsko Brownovo gibanje

$$S_t = S_0 e^{\sigma B(t)+\mu t}\,, t \geq 0\,.$$

Prema njemu je cijena dionice u bilo kojem trenutku log–normalna slučajna varijabla.

Primjer

Lognormalna razdioba $X = e^Y$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, gustoća od X je za $x > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\exp\left[\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

a vrijedi i $EX = e^{\mu+\sigma^2/2},\ \operatorname{var} X = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$