Modeli u diskretnom vremenu

Bojan Basrak, PMF–MO Zagreb

Financijski praktikum

19. ožujka 2018.

Tržište u diskretnom vremenu

Pretpostavke

- cijene svih imovina su poznate u trenutku $t = 0$
- sve informacije su javno dostupne (efficient market hypothesis)
- nema transakcijskih troškova
- imovina je djeljiva, likvidna i short–selling je dozvoljen
- vrijednost nerizične imovine se mijenja unaprijed poznatom dinamikom $t \mapsto r_t$
- nema dividendi ni troškova posjedovanja imovine

Komponente modela

- rizična imovina (dionica)

  $S_t =$ vrijednost u času t

- nerizična imovina (obveznica), uz fiksnu kamatnu stopu r

  $r_t = (1+r)^t$ vrijednost u času t

- vremenski horizont T u kojem pratimo tržište i vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Portfelj $\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1)$ za period $[t-1, t]$ određen je u trenutku $t-1$ t.d.

$$\begin{aligned} \varphi_t^0 &= \text{ broj jedinica nerizične imovine} \\ \varphi_t^1 &= \text{ broj jedinica rizične imovine} \end{aligned}$$

Filtracija $(\mathcal{F}_t)$ određena je sa $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ i

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{S_1, \ldots, S_t\} \text{ za } t \geq 1\,.$$

Pretpostavljamo i da je sl. proces (φ_t) predvidiv u odn. na tu filtraciju, tj. φ_t je $\mathcal{F}_{t-1}$–izmjeriv slučajni vektor.

Vrijednost portfelja u t

$$V_t(\varphi_t) = \varphi_t^0 (1+r)^t + \varphi_t^1 S_t\,.$$

Diskontirana vrijednost portfelja u t

$$\widetilde{V}_t(\varphi_t) = V_t(\varphi_t)(1+r)^{-t} = \varphi_t^0 + \varphi_t^1 S_t (1+r)^{-t}\,.$$

Portfelj za koji je $V_t(\varphi) \geq 0$ za svaki $t \geq 0$ zovemo **dopustivim**, a ako zadovoljava

$$V_t(\varphi_t^0, \varphi_t^1) = V_t(\varphi_{t+1}^0, \varphi_{t+1}^1)\,.$$

kažemo da je **samofinancirajući** .

Ako samofinancirajući, dopustiv portfelj zadovoljava i

$$V_0(\varphi) = 0, \quad \text{te} \quad \mathbb{P}(V_T(\varphi) > 0) > 0$$

naziva se **arbitraža**.

Arbitraža dakle predstavlja mogućnost zarade bez rizika.

Matematička teorija je vrlo elegantna i široko korištena.

U nekim primjerima možemo naći alternativnu vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ u odn. na koju su diskontirane vrijednosti svim imovina martingali, tada je i diskontirana vrijednost svakog samofinancirajućeg portfelja martingal.

Teorem (prvi fundamentalni)
Takva mjera postoji akko je tržište bez arbitraže.

Na tzv. potpunim tržištima se svaka izvedenica može replicirati samofinancirajućim portfeljom.

Teorem (drugi fundamentalni)
Model tržišta je potpun akko je takva vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ jedinstvena.

Cox–Ross–Rubinsteinov model

Nakon $S_0 = s_0$ vrijedi

$$S_t = S_{t-1} Y_t \,,$$

gdje je za $-1 \leq a < b$ i $q = 1 - p$, $p \in (0,1)$

$$Y_t = 1 + X_t \,, \quad X_t \overset{njd}{\sim} \begin{pmatrix} a & b \\ q & p \end{pmatrix} \,.$$

Pokazuje se CRR model je bez arbitraže akko

$$a < r < b \,.$$

Za $a < r < b$, možemo konstruirati njd niz (X_t) na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ t.d.

$$X_t \overset{njd}{\sim} \left(\begin{array}{cc} a & b \\ q^* & p^* \end{array} \right) ,$$

za

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} ,$$

tako da $\mathbb{E}^* X_k = r$, pa za $\widetilde{S}_k = S_k/(1+r)^k$ vrijedi

$$\mathbb{E}^* \left[\widetilde{S}_k \,\middle|\, \mathcal{F}_{k-1} \right] = \mathbb{E}^* \left[\frac{1+X_k}{1+r} \widetilde{S}_{k-1} \,\middle|\, \mathcal{F}_{k-1} \right] = \widetilde{S}_{k-1} .$$

Odnosno, $(\widetilde{S}_k)$ je martingal u odn. na $\mathbb{P}^*$.

Slučajni zahtjevi

Slučajne zahtjeve modeliramo proizvoljnim slučajnim varijablama C na istom vjerojatnosnom prostoru. Ako je C izmjeriva u odn. na $\sigma\{S_k : k \leq T\}$, t.j. ako

$$C = h(S_0, \ldots, S_T)\,,$$

zovemo je i **izvedenica**.

Primjer

EU call opcija: daje pravo, ali ne i obavezu na kupnju jedne dionice po cijeni izvršenja K i na datum dospjeća T. U T ima vrijednost

$$C = (S_T - K)_+\,.$$

EU put opcija: daje pravo, ali ne i obavezu na prodaju jedne dionice po cijeni K i na datum dospjeća T. U T ima vrijednost

$$C = (K - S_T)_+\,.$$

Azijska call opcija: s cijenom izvršenja K i datumom dospjeća T, u T ima vrijednost

$$C = \left(\frac{S_0 + \cdots + S_T}{T+1} - K \right)_+ .$$

Postoje opcije i čiji trenutak izvršenja nije fiksan, kao npr. američke opcije, ali i egzotičnije opcije kao npr. pariške, ruske i razne druge.

Slučaj $T = 1$ posebno je jednostavan jer za proizvoljnu izvedenicu C možemo naći portfelj (φ^0, φ^1) t.d.

$$V_1(\varphi^0, \varphi^1) = \varphi^0(1 + r) + \varphi^1 S_1 = C$$

kažemo da takav portfelj **replicira** slučajni zahtjev C. On se naziva i *hedging* strategija.

Njegova vrijednost u $t = 0$,

$$C_0 = V_0(\varphi^0, \varphi^1) = \varphi^0 + \varphi^1 s_0$$

je jedina nearbitražna cijena zahtjeva C!!

Tržište (model) u kojem je moguće replicirati svaki zahtjev je **potpuno**. A CRR model je takav čim $a < r < b$.

U potpunom CRR modelu je diskontirana vrijednost svakog samofinancirajućeg portfelja φ_t

$$\widetilde{V}_t(\varphi_t)$$

nužno martingal u odn. na $\mathbb{P}^*$ (kao martingalna transformacija martingala $\widetilde{S}_t$).

Kako martingali imaju konstantna očekivanja, ako (φ_t) replicira C, nearbitražna cijena zahtjeva C mora biti

$$C_0 = \mathbb{E}^* V_0(\varphi_1) = \mathbb{E}^* \widetilde{V}_0(\varphi_1) = \mathbb{E}^* \widetilde{V}_T(\varphi_T) = \mathbb{E}^* \left[\frac{C}{(1+r)^T} \right] .$$

Posebno ako je $C = h(S_0, \ldots, S_T)$, $(i_1, \ldots, i_T) \in \{a, b\}^T$

$$C_0 = \sum_{(i_1,\ldots,i_T)} p^{*\#_b(i)} (1-p)^{*\#_a(i)} \frac{h(s_0, \ldots, s_0(1+i_1)\cdots(1+i_T))}{(1+r)^T}$$

gdje su

$\#_b(i) = \#_b(i_1, \ldots, i_T) = \sum_k \mathbb{I}_{i_k = b}$,
$\#_a(i) = \#_a(i_1, \ldots, i_T) = \sum_k \mathbb{I}_{i_k = a}$.

Traženo očekivanje C_0 je katkad lako izračunati, no za velike T gornja suma ima veliki broj članova, pa je za komplicirane funkcije h, razumno koristiti Monte Carlo metodu.

Traženje replicirajućeg portfelja

Za $T = 1$ hedging portfelj smo pronašli rješavajući sustav linearnih jednadžbi, za općeniti T ponavljamo isto no rekurzivno krećući od $t = T, T-1, \ldots$ prema trenutku $t = 1$.

CRR model kao slučajna šetnja

Za $t \geq 1$

$$S_t = Y_t \cdots Y_1 \cdot s_0 \,,$$

pa je

$$L_t = \log S_t / S_0 = \log Y_t + \cdots + \log Y_1$$

slučajna šetnja i po centralnom graničnom teoremu vrijedi

$$\frac{L_t - t\mu}{\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \sigma Z$$

gdje je $\mu = \mathbb{E} \log Y_i$, $\sigma = \operatorname{var} \log Y_i$ a $Z \sim N(0,1)$.

Kako je

$$S_t = s_0 \cdot e^{L_t} ,$$

a

$$L_t \stackrel{d}{\approx} \mu t + \sqrt{t}\sigma Z ,$$

jasno i

$$S_t \stackrel{d}{\approx} s_0 \cdot e^{\mu t + \sqrt{t}\sigma Z} ,$$

no vrijedi i više, cijeli put šetnje L_t, pa prema tome i S_t mogu se opisati korištenjem tzv. funkcionalnog graničnog teorema (Donsker, 1950tih), naime

$$\left(\frac{L_{\lfloor st \rfloor} - st\mu}{\sqrt{t}} \right)_{s \in [0,1]} \xrightarrow{d} \sigma (B_s)_{s \in [0,1]} ,$$

gdje je (B_s) standardno Brownovo gibanje.

Markovljevi lanci Monte Carlo

Jasno u CRR modelu (S_t/s_0) je multiplikativna slučajna šetnja, pa prema tome i Markovljev lanac, a i vrlo ju jednostavno simulirati.
Sličan slučaj je i s proizvoljnim Markovljevim lancem $(X_n)_{n\geq 0}$ na prebrojivom skupu stanja $\mathbb{S}$, naime ako ima

- početnu razdiobu $p^{(0)} = (p_j^{(0)})_{j\in\mathbb{S}}$ i
- matricu prijelaza $P = (p_{ij})_{j\in\mathbb{S}}$

(X_n) možemo simulirati sljedećim algoritmom

Algoritam

> sample $X_0 \sim p^{(0)}$
> $n = 0,\ s = X_0$
repeat
> sample $X_{n+1} \sim (p_{s,\cdot})$
> $n = n + 1,\ s = X_n$
until $n > N$

Ako je (X_n) ireducibilan sa stacionarnom razdiobom π, a mi tražimo

$$I = E_\pi f(X_0) < \infty\,,$$

ergodski teorem povlači

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{gs} I\,.$$

Ovdje je CGT složeniji, ipak ako je $\mathbb{S}$ konačan npr. (ili ako vrijede dodatni tehnički uvjeti)

$$\sqrt{n}\left(\tilde{I}_n - I\right) \xrightarrow{d} N(0, v)$$

no sad je

$$v = \mathrm{var}_\pi\, f(X_0) + 2\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{cov}_\pi(f(X_0), f(X_i))$$

Markovljev lanac možemo definirati (a i simulirati) i na općenitom skupu stanja.

Primjer

i) slučajna šetnja: neka su $Z_t \sim F$ njd i neka je $S_t = S_{t-1} + Z_t$, $t \geq 1$.

ii) AR(1) (autoregresivni proces reda 1): za neki $|\varphi| < 1$, i $Z_t \sim F$ njd, neka vrijedi

$$X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t \,.$$

iii) GARCH (1,1): za neke $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 > 0$ i $Z_t \sim N(0,1)$ njd neka vrijedi

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_t Z_t \,, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \,. \end{aligned}$$

Ovdje je (X_t, σ_t) Markovljev lanac uočite.

Niz (X_n) je Markovljev lanac s početnom razdiobom λ na $\mathbb{S}$ i vjerojatnosnom jezgrom $P(\cdot,\cdot) : \mathbb{S} \times \mathcal{F}_{\mathbb{S}} \to \mathbb{R}_+$ za koju vrijedi

- ▷ za fiksni $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{S}}$, $x \mapsto P(x, A)$ je izmjerivo preslikavanje na $\mathbb{S}$
- ▷ za fiksni $x \in \mathbb{S}$, $P(x, \cdot)$ je vjerojatnost na $(\mathbb{S}, \mathcal{F}_{\mathbb{S}})$

ako

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_0 \in A_0, \ldots, X_n \in A_n) \\ &\quad = \int_{x_0 \in A_0} \cdots \int_{x_{n-1} \in A_{n-1}} \lambda(dx_0) P(x_0, dx_1) \cdots P(x_{n-1}, A_n) \end{aligned}$$

za sve $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_{\mathbb{S}}$.

Primjer

i) (X_n) njd s razdiobom μ čine Markovljev lanac: početna razdioba je μ, a $P(x,\cdot) = \mu(\cdot)$ za sve x.

ii) $X_n = X\,, X \sim \mu \geq 0$ čine Markovljev lanac: početna razdioba je μ, a $P(x,\cdot) = \delta_x(\cdot)$, gdje je δ_x tzv. Diracova mjera.

iii) neka su $Z_t \sim F$ njd i nezavisne od $S_0 \sim \nu$ te neka je $S_t = S_{t-1} + Z_t$, $t \geq 1$. (S_n) čine Markovljev lanac: početna razdioba je ν, a $P(x,\cdot) = P(x + Z \in \cdot) = P(Z \in \cdot - x)$ za sve x.

iv) Na prebrojivom skupu $\mathbb{S}$ sa σ–algebrom $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ matrica prijelaza $P = (p_{ij})_{j\in\mathbb{S}}$ zadaje vjerojatnosnu jezgru

$$P(x, A) = \sum_{j\in A} p_{xj} \,,$$

v) Ako je $\mathbb{S}$ podskup od $\mathbb{R}^d$, početna razdioba λ i vjerojatnosna jezgra P mogu biti neprekidne, tj. posjedovati gustoće u odn. na Lebesgueovu mjeru, tako da vrijedi

$$\lambda(A) = \int_A q(x)dx \,,$$
$$P(x, A) = \int_A p(x, y)dy \,,$$

za sve x i A.

I AR(1), ARMA(1,1), GARCH(1,1),... procese je moguće promatrati kao Markovljeve lance.

Slučajan proces (pa i Markovljev lanac) je **stacionaran** ako

$$(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_k+h}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \,,$$

za sve $k \in \mathbb{N}$ i sve $t_1 \leq \cdots \leq t_k \in \mathbb{N}_0$. Posebno, za sve t je

$$X_t \stackrel{d}{=} X_0 \,.$$

Razdioba π stacionarna je razdioba Markovljevog lanca ako vrijedi

$$\int \pi(dy) P(y, A) = \pi(A) \,,$$

ili simbolički $\pi P = \pi$.

Puno je situacija, čak i u diskretnom slučaju kad ne znamo simulirati direktno iz razdiobe π, takav je slučaj npr. kad nam je gustoća q od π poznata samo do na konstantu, tj.

$$q(x) = \frac{1}{c} q_0(x)$$

za neku nenegativnu funkciju q_0 takvu da naravno $\int_{\mathbb{S}} q^0(x)dx = c$. Ili u diskretnom slučaju

$$\pi_i = \frac{1}{c} \pi_i^0 \, ,$$

za neki niz (π_j^0) takav da $\sum_j \pi_j^0 = c$.

Ipak i tada je moguće konstruirati Markovljev lanac (tj. vjerojatnosnu jezgru) kojoj je π stacionarna razdioba. Takve konstrukcije se tipično zasnivaju na uvjetu detaljne ravnoteže.

Teorem (stacionarnost iz detaljne ravnoteže)

Pretpostavimo da vrijedi jedan od sljedeća dva uvjeta:

i) razdioba π i vjerojatnosna jezgra P su neprekidne i takve da im gustoće zadovoljavaju za sve $x, y \in \mathbb{S}$

$$q(x)p(x,y) = q(y)p(y,x)\,.$$

ii) $\mathbb{S}$ je diskretan prostor, a razdioba π i matrica prijelaza (p_{ij}) zadovoljavaju za sve $i, j \in \mathbb{S}$

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}\,.$$

Tada je π stacionarna razdioba pripadnog Markovljevog lanca tj. vrijedi

$$\pi P = \pi\,.$$

MCMC (Markov Chain Monte Carlo) metode su skupina algoritama koji na osnovu gornjeg rezultata kontruiraju Markovljev lanac s proizvoljnom stacionarnom razdiobom. Najpoznatiji algoritmi tog tipa su Metropolis–Hastingsov algoritam i Gibbsov algoritam. Iznimno su često korišteni u modernoj bayesovskoj statistici.

Mi ćemo prikazati simetričnu diskretnu verziju Hastingsovog algoritma. Pretpostavimo da je $\mathbb{S}$ prebrojiv, te da je (r_{ij}) simetrična prijelazna matrica ireduciblnog Markovljevog lanca na $\mathbb{S}$ definirajmo

$$
\begin{aligned}
q_{ij} &= r_{ij} \min\{1, \pi_j/\pi_i\}\,, \quad j \neq i\,, \\
q_{ii} &= 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}\,,
\end{aligned}
$$

Iz prethodnog teorema se lako vidi da $Q = (q_{ij})$ zadovoljava

$$\pi Q = \pi\,.$$

Da bismo dobili lanac s prijelaznom matricom Q koristimo

Algoritam

> sample $X_0 \sim p^{(0)}$
> $n = 0,\ s = X_0$
repeat
> sample $Y \sim (r_{s,\cdot})$
> sample $U \sim \mathsf{Unif}(0,1)$
> if $U < \pi_Y / \pi_s$ then $X_{n+1} = Y$ else $X_{n+1} = X_n$
> $n = n + 1,\ s = X_n$
until $n > N$

Jasno (X_n) ima prijelaznu matricu Q pa mu je stacionarna razdioba π. Ako π nije uniformna ili je (r_{ij}) aperiodična, (q_{ij}) je aperiodična također. Lanac je ireducibilan na $\mathbb{S}_\pi = \{i \in \mathbb{S} : \pi_i > 0\}$, pa vrijedi ergodski teorem, tj. za izmjerivu funkciju $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ takvu da $\sum |f(i)|\pi_i < \infty$, vrijedi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{gs} \pi(f) = \sum f(i)\pi_i \,.$$

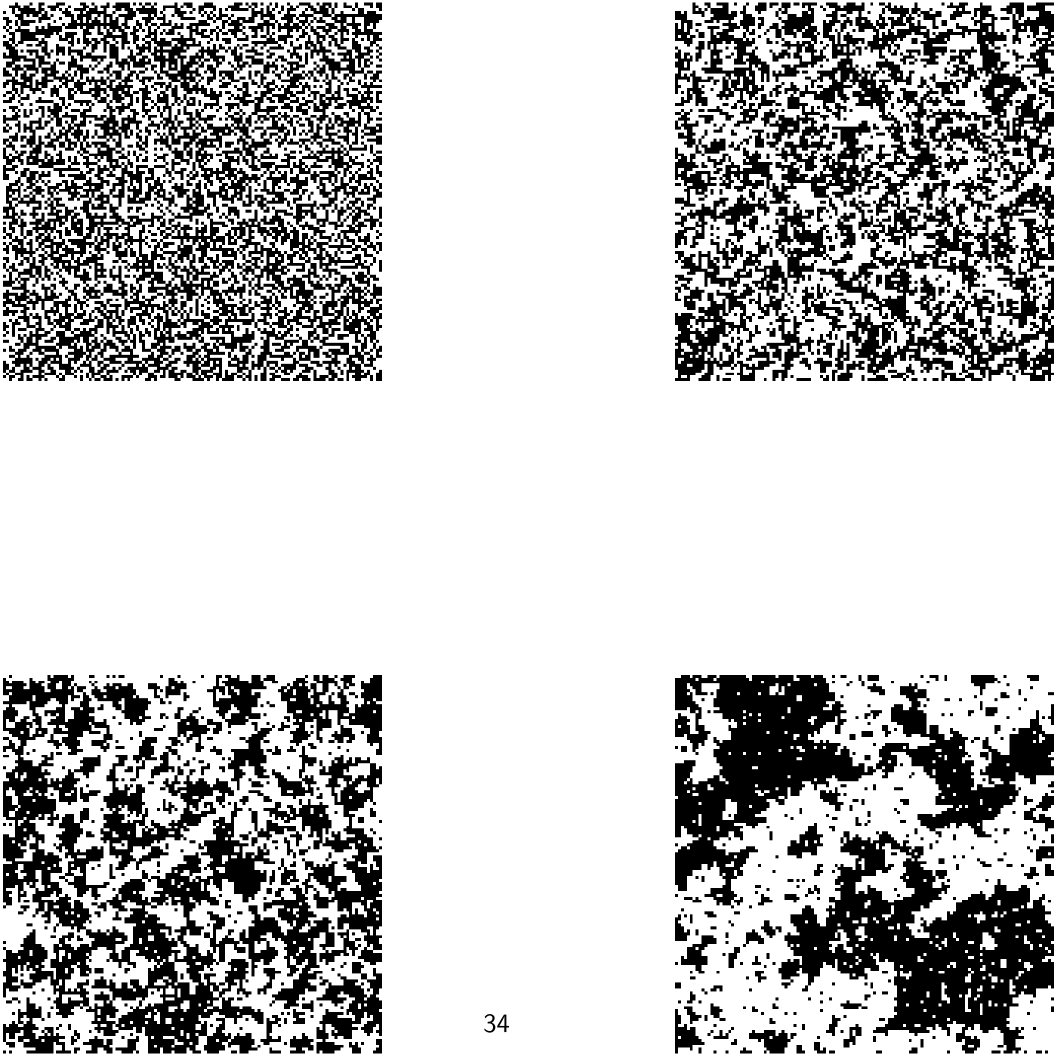
Primjer Jedan od najvažnijih modela statističke fizike uveden je 1920tih godina (zaslužni su Lenz i njegov student Ising). Možemo ga postaviti na dvodimenzionalnom torusu $\mathbb{T}_n = \{1, \ldots, n\}^2$ gdje uvodimo relaciju $\sim$ između susjednih vrhova. U svakom od n^2 vrhova postavimo tzv. spin: označimo ga sa $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ i pretpostavimo da je konfiguracija spinova slučajna, ali tako da je vjerojatnost pojedine konfiguracije $\sigma = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{T}_n}$ proporcionalna

$$e^{-\beta H(\sigma)}$$

gdje je $\beta \geq 0$ konstanta koja se naziva inverznom temperaturom, a funkcija H je tzv. hamiltonijan koji opisuje tzv. energiju sustava, jedan jednostavni oblik je

$$H(\sigma) = -\sum_{i \sim j} \sigma_i \sigma_j \, .$$

Jasno konstanta proporcionalnosti (u fizici se naziva particijska funkcija) je $Z = \sum_\sigma e^{-\beta H(\sigma)}$ gdje sumiramo po svih 2^{n^2} konfiguracija, tako da ju je općenito gotovo nemoguće izračunati. Ovakav model preferira konfiguracije u kojima nema previše susjednih spinova različitog predznaka, izuzev ako je $\beta = 0$. Model se jednostavno može simulirati Hastingsovim algoritmom.



Naglasimo: ireducibilnost, aperiodičnost, povratnost,... mogu se definirati i za općenite lance i to tako da poopćuju definicije iz diskretnog slučaja. I tada uz blage uvjete vrijedi ergodski teorem, odn. ako je (X_n) Markovljev lanac sa stacionarnom razdiobom π, a izmjeriva funkcija $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ zadovoljava $\int |f| d\pi < \infty$, tada

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{gs} \pi(f) = \int f(y)\pi(dy)\,.$$

Dovoljno je npr. da je lanac ψ–ireducibilan i Harris povratan tj. za neku mjeru ψ na $\mathbb{S}$ i svaki $x \in \mathbb{S}$ vrijedi

$$\psi(A) > 0 \Rightarrow P_x(X_n \in A \text{ beskonačno često}) = 1\,.$$

Čak i c.g.t. vrijedi uz neke dodatne uvjete. MCMC algoritmi konstruiraju baš takve lance.

Ukoliko je zadana gustoća f na $\mathbb{R}^d$ i želimo konstruirati Markovljev lanac kojemu je ona stacionarna, ponovo može primijeniti istu ideju. Potrebno nam je samo znati simulirati lanac čija prijelazna jezgra ima gustoću $g(x, \cdot)$ za $x \in \mathbb{R}^d$.

Algoritam (Metropolis–Hastings)

> sample $X_0 \sim \lambda_0$
> $n = 0,\ s = X_0$
repeat
> sample $Y \sim g(s, \cdot)$
> sample $U \sim \mathsf{Unif}(0, 1)$
> if $U < \frac{f(Y)g(s,Y)}{f(s)g(Y,s)}$ then $X_{n+1} = Y$ else $X_{n+1} = X_n$
> $n = n + 1,\ s = X_n$
until $n > N$

Uočite gustoću f moramo znati samo do na konstantu.