Aktuarska matematika II, 1.dio

Bojan Basrak

2020

1. Osnovni model teorije rizika

Uvod

Teorija rizika je drugi izraz za matematiku neživotnog osiguranja što je i tema ovog kolegija. Ona se bavi modeliranjem i izračunom šteta i rizika, njihove razdiobe, vremenske dinamike, ukupne sume, kao i vjerojatnosti propasti odn. gubitka u portfelju, itd.

Dogadjaji poput napada na WTC (2001, 32 mlrd \$), 4 uragana na Floridi (2004, 23 mlrd \$), uragana Katrina u New Orleansu (2005, 40 mlrd \$) su samo ekstremni pokazatelji teškog zadatka koji preuzimaju aktuari u praksi.

Tzv. **osnovni model rizika** ne uključuje vremensku komponentu. Mi ćemo ipak prvo promotriti jedan važan model koji uključuje i vremensku komponentu.

Lundbergov model homogenog osiguravateljskog portfelja postavljen je još 1903. sa sljedećim komponentama:

- Zahtjevi za isplatu stižu u vremenima $0 < T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \cdots$, koje zovemo **dolaznim vremenima**
- Šteta koja stiže u vremenu T_i ima iznos X_i. Niz $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ čine n.j.d. sl. varijable
- Procesi $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ su medjusobno nezavisni.

Napomena Homogenost se manifestira u svojstvu n.j.d. niza $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, a ta prepostavka kao i ova posljednja čini naš život bitno lakšim.

Uz niz vremena $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vežemo njegov **brojeći proces**

$$N(t) = \mathrm{card}\{i \in \mathbb{N} : T_i \le t\}$$

koji je indeksiran po intervalu $[0, \infty)$. Još važniji u praksi je **proces ukupnih šteta do trenutka t**

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i. \tag{1.1}$$

Na $S(t)$ možemo gledati kao na slučajnu sumu sl. varijabli, pa kažemo da je sl. varijabla $S(t)$ složena.

Glavni problemi teorije rizika:

- Naći realističan i jednostavan model za $N(t)$ i $S(t)$
- Odrediti njihova teoretska svojstva i asimptotsko ponašanje
- Naći efikasnu i korektnu metodu njihovog simuliranja ako ne znamo analitički sve izračunati.
- Na osnovu ovih rezultata odrediti premije, pričuve i sl.

Teorija razlikuje dva odvojena modela kratkoročnih osigurateljnih ugovora

◇ **Modeli kolektivnog rizika**. Koji zapravo imaju iste prepostavke kao i kod Lundbergovog modela jedino se štete prate u fiksnom periodu, tj. za jedan jedini t.

◇ **Modeli individualnog rizika**. Koji se od gornjeg modela razlikuju po tome što:

- dopuštaju najviše jednu štetu po osiguraniku u danom periodu,
- prepostavljaju fiksan broj polica N
- ne prepostavljaju da su različite štete jednako distribuirane.

Osnovni modeli za broj šteta

Ukoliko nas zanima ukupna šteta u nekom fiksnom intervalu ne moramo modelirati vremena dolazaka šteta na naplatu, već isključivo njihov ukupan broj $N = N(t)$.
Prisjetimo se definicije funkcije izvodnice momenata za sl. varijablu N

$$m_N(s) = E[\exp(sN)] \,.$$

Funkcija m_N je za nenegativne sl. varijable, kakav je i broj šteta N, uvijek dobro definirana barem za sve $s \leq 0$.

Za $N \sim P(\lambda)$

$$m_N(s) = \exp[\lambda(e^s - 1)],$$

dok su naravno $EN = \mathrm{var} N = \lambda$. Poissonova razdioba ima važnu ulogu kao model za broj šteta.

Za cjelobrojne sl. varijable, kao što je npr. broj šteta N, funkciju izvodnicu momenata ne treba miješati s funkcijom izvodnicom

$$g_N(z) = Ez^N, \quad z \in [-1, 1] .$$

Uočite da su za ovakve sl. varijable ove funkcije jednostavno vezane, za $z \in (0, 1]$

$$g_N(z) = m_N(\log z) .$$

Vrijednosti funkcije izvodnice momenata

$$m_X(s) = Ee^{sX} ,$$

sl. varijable X za $s \leq 0$ na jednoznačan način odredjuju razdiobu nenegativne X. Takodjer, za proizvoljnu sl. varijablu X takvu da su vrijednosti $m_X(s)$ konačne na nekom otvorenom intervalu oko 0, razdioba od X je jednoznačno odredjena ovim vrijednostima.

Preko konvergencije funkcija izvodnica momenata takodjer možemo provjeriti i konvergenciju nizova slučajnih varijabli, npr. ako za (X_n) i X vrijedi

$$m_{X_n}(s) \to m_X(s)$$

za $n \to \infty$ i sve s u nekom otvorenom intervalu oko 0 (ili za sve $s \leq 0$ ako su X_n, X nenegativne) tada $X_n \xrightarrow{d} X$. Ime funkcije dolazi iz činjenice da ako je $m_X(s) < \infty$ na nekom otvorenom intervalu oko 0, tada

$$EX^n = \frac{d^n}{ds^n} m_X(0).$$

I centralne momente od X možemo dobiti iz $m_X(0)$, pa npr.

$$\sigma^2 = \mathrm{var} X = E(X - EX)^2 = \frac{d^2}{ds^2} \log m_X(0),$$

$$E(X - EX)^3 = \frac{d^3}{ds^3} \log m_X(0),$$

$$E(X - EX)^4 = \frac{d^4}{ds^4} \log m_X(0) + 3 \left(\frac{d^2}{ds^2} \log m_X(0) \right)^2 .$$

Prisjetimo se koeficijenata asimetrije (skewness) i spljoštenosti (kurtosis)

$$\kappa = \frac{E(X - EX)^3}{\sigma^3} \text{ odn. } \gamma = \frac{E(X - EX)^4}{\sigma^4}.$$

Za normalne razdiobe oni iznose 0 odn. 3.

Ponekad se pretpostavlja da vrijedi $N = N(t) \sim B(n, p)$. Tada vrijedi

$$P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad \text{za } k = 0, \ldots, n.$$

Za ovakav N očekivanje je np, a varijanca npq dok se za funkciju izvodnicu momenata pokazuje

$$m_N(s) = (1 - p + pe^s)^n \, .$$

Treća često korištena pretpostavka je da N ima negativnu binomnu razdiobu, tj. da vrijedi

$$P(N = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k, \qquad \text{za } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

za neke parametre $n \in \mathbb{N}$ i $p \in [0, 1]$, oznaka $N \sim NB(n, p)$. Pokazuje se da je tada $EN = n(1-p)/p$, $\mathrm{var} N = n(1-p)/p^2$, te da je

$$m_N(s) = p^n (1 - (1-p)e^s))^{-n} \, .$$

Kako je varijanca ove razdiobe veća od očekivanja, ona se koristi upravo u modeliranju takvih uzoraka, dok je kod binomne razdiobe situacija obrnuta. Od navedenih razdioba jedino su kod Poissonove varijanca i očekivanje upravo jednaki.

Pogledajmo kako se ove tri pretpostavke odražavaju na razdiobu ukupnih šteta

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \,.$$

Slučajnu varijablu S zovemo **složenom**, a prepostavljamo da nenegativne, n.j.d. slučajne varijable X_i imaju funkciju izvodnicu momenata m_X i očekivanje μ_1.
Preko uvjetnog očekivanja moguće je izračunati $m_S(s) = E(e^{sS}) = E[E(e^{sS}|N)]$, te kako je zbog svojstava niza (X_i)

$$E(e^{sS}|N = n) = \left(E(e^{sX_1})\right)^n$$

slijedi

$$m_S(s) = E(m_X(s)^N) = m_N(\ln m_X(s)).$$

Funkcija izvodnica momenata na jednoznačan odreduje razdiobu sl. varijable S, no da bismo iz nje saznali detalje o razdiobi, u principu moramo raditi malo više.
Sličan argument uvjetovanjem kao gore nam daje

$$E(S) = ENEX_1 = EN\mu_1 \,,$$

ako su naravno gornja očekivanja konačna.

Da bismo izračunali varijancu od S poslužit ćemo se sljedećom lemom

Lema 1

$$\mathrm{var} S = E(\mathrm{var}(S|N)) + \mathrm{var}(E(S|N))$$

Dokaz. Izračunajmo prvo

$$E(\mathrm{var}(S|N)) = E(E(S^2|N) - E(S|N)^2),$$

a zatim

$$\mathrm{var}(E(S|N)) = E(E(S|N)^2) - (ES)^2,$$

tvrdnja slijedi zbrajanjem ova dva izraza i činjenice da je $E(E(S^2|N)) = E(S^2)$. $\square$

Kako su X_i n.j.d. slijedi

$$\mathrm{var}(S|N = n) = n\mathrm{var}X,$$

pa prema lemi imamo

$$\mathrm{var}S = E[N\mathrm{var}X] + \mathrm{var}[N\mu_1] = EN\mathrm{var}X + \mathrm{var}N\mu_1^2 \,.$$

Primjer (Razdiobe ukupnih šteta)

a) Složena Poissonova razdioba. Promotrimo slučaj $N \sim P(\lambda)$, tada je S tzv. složena Poissonova sl. varijabla, i zadovoljava $ES = \lambda\mu$ i $\mathrm{var} S = \lambda EX^2$. Takodjer direktno vidimo i

$$m_S(s) = \exp\left(\lambda(m_X(s) - 1)\right). \tag{1.2}$$

Derivacijama funkcije izvodnice momenata možemo dobiti i ostale momente sl. varijable S, npr.

$$E(S - ES)^3 = \frac{\mathsf{d}^3}{\mathsf{d}t^3} \ln m_S(s)|_{s=0} = \lambda EX^3. \tag{1.3}$$

pa je koeficijent asimetrije sl. varijable S

$$\lambda EX^3/(\lambda EX^2)^{3/2}.$$

Ovaj koeficijent je očito nenegativan, no za $\lambda \to \infty$ pada k 0.

Može se pokazati da je suma n nezavisnih složenih Poissonovih sl. varijabli ponovo složena Poissonova. Naime ako su $S_i,\ i = 1, \ldots, n$, složene Poissonove s parametrima λ_i i takve da su funkcije distribucije pojedinačnih šteta F_i, tada $S = S_1 + \cdots + S_n$ ima složenu Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ i funkcijom distribucije pojedinačnih šteta

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x) \,. \tag{1.4}$$

Što se lako može provjeriti usporedjujući funkcije izvodnice momenata. Razdiobe koje imaju oblik (1.4) zovu se **miješane razdiobe**.

b) Složena binomna razdioba. Ako $N \sim B(n,p)$, kažemo da S ima složenu binomnu razdiobu. Na isti način kao i gore slijede izrazi

$$E(S) = np\mu_1 \quad \text{i} \quad \mathrm{var}S = np\mathrm{var}X + np(1-p)\mu_1^2,$$

te

$$m_S(s) = (pm_X(s) + 1 - p)^n.$$

Ponovo iz formule (1.3) slijedi da je koeficijent asimetrije od S

$$\frac{E(S-ES)^3}{(\mathrm{var}S)^{3/2}} = \frac{npEX^3 - 3np^2EX^2\mu_1 + 2np^3\mu_1^3}{(npEX^2 - np^2\mu_1^2)^{3/2}}.$$

Ovaj izraz može biti i negativan , npr. ako su sve štete jednake nekoj konstanti $b > 0$, tada je za $p > 1/2$ koeficijent asimetrije striktno negativan.

c) Složena negativna binomna razdioba. Za $N \sim NB(n,p)$, S ima složenu negativnu binomnu razdiobu te vrijedi

$$E(S) = \frac{n(1-p)}{p}\mu_1 \quad \text{i} \quad \mathrm{var} S = \frac{n(1-p)}{p}EX^2 + \frac{n(1-p)^2}{p^2}\mu_1^2,$$

dok je funkcija izvodnica momenata od S

$$m_S(s) = \frac{p^n}{(1-(1-p)m_X(s))^n}.$$

Izraz (1.3) nam daje

$$E(S-ES)^3 = \frac{3n(1-p)^2\mu_1 EX^2}{p^2} + \frac{2n(1-p)^3\mu_1^3}{p^3} + \frac{n(1-p)EX^3}{p},$$

odakle zaključujemo da je za složenu negativnu binomnu sl. varijablu koeficijent asimetrije uvijek pozitivan.

Vremena dolazaka šteta

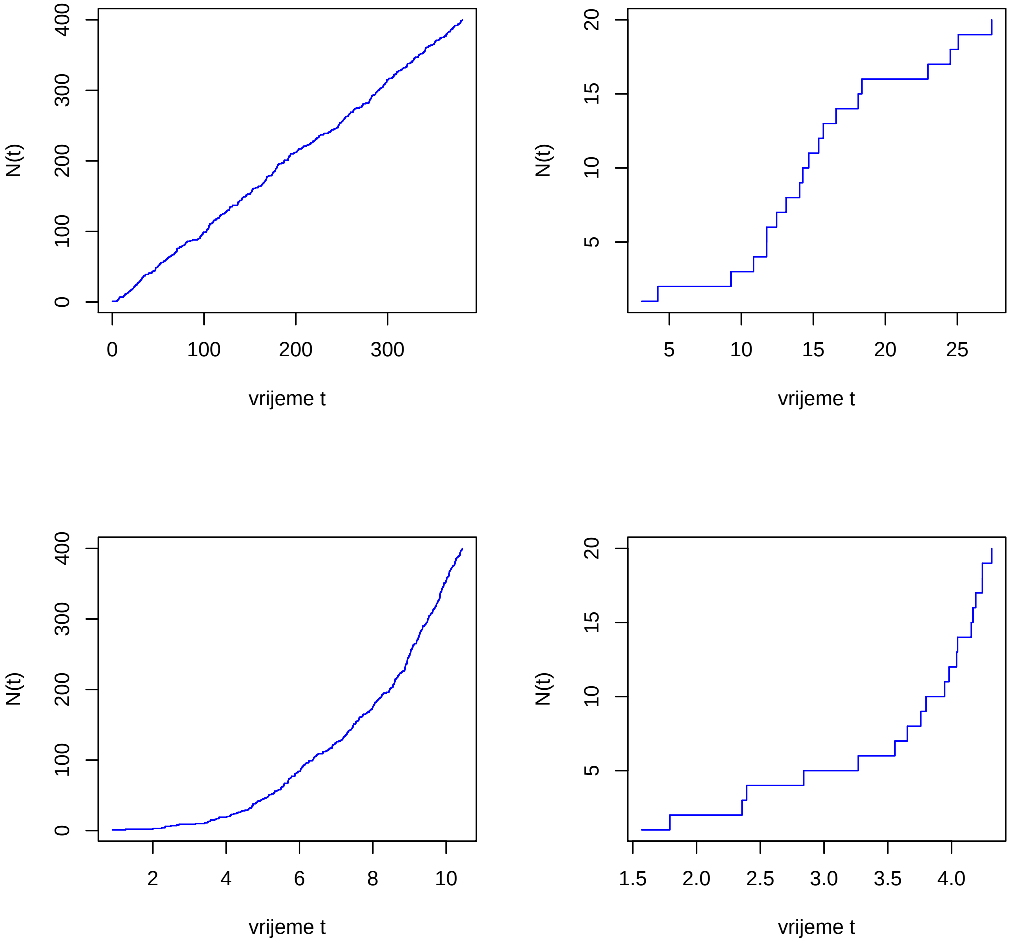
Poissonov proces ima središnje mjesto u teoriji rizika kao model za dolazna vremena šteta, prisjetimo se njegove definicije. Proces $N(t)$ je Poissonov ako

- $N(0) = 0$
- Za sve $0 < t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$ su prirasti $N(t_i) - N(t_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$, nezavisne sl. varijable.
- Za neki parametar $\lambda > 0$ koji zovemo intenzitetom i sve $s < t$, $N(t) - N(s)$ imaju Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda(t - s)$.
- Putevi procesa $N(t)$ su càdlàg, tj. zdesna neprekidni i imaju limes slijeva.

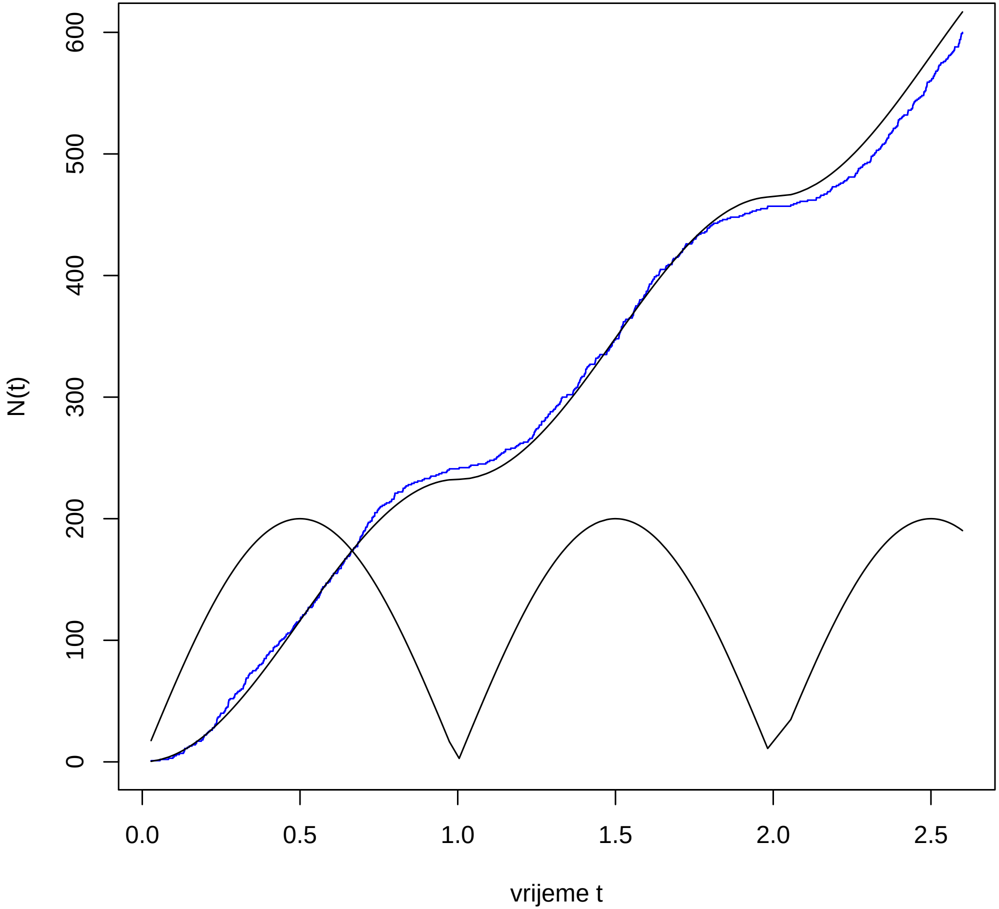
Napomena Ponekad prepostavljamo da postoji funkcija $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ Riemann integrabilna na svakom konačnom intervalu tako da $N(s,t] := N(t) - N(s)$ imaju Poissonovu razdiobu s parametrom

$$\int_s^t \lambda(y)\mathrm{d}y.$$

Ako je λ konstanta onda imamo gornju definiciju kao specijalni slučaj. Tada kažemo da je proces N homogen Poissonov proces. Funkciju $\mu(t) = \int_0^t \lambda(y)\mathrm{d}y$ zovemo funkcijom očekivanja od N, a $\lambda(\cdot)$ zovemo funkcijom intenziteta. Ona nam omogućuje da "usporimo", odn. "ubrzamo" vrijeme i modeliramo time sezonske utjecaje ili trendove (npr. zbog globalnog zatopljavanja štete uzrokovane klimom mogu rasti). Svojstva 1,3, i 4 svrstavaju homogeni Poissonov proces u klasu Lévyevih procesa (u koje pripada i Brownovo gibanje).



Četiri realizacije Poissonovog procesa. U gornjem redu imamo homogeni Poissonov proces s $\lambda = 1$, *a u donjem imamo nehomogeni proces i* $\lambda(t) = t^2$.



Realizacija nehomogenog Poissonovog procesa s periodičnom funkcijom λ.

Propozicija 2 *(Veza homogenog i nehomogenog Poissonovog procesa) Ako je $\widetilde{N}$ jedinični (tj. s intenzitetom 1) homogeni Poissonov proces, a funkcija λ kao u gornjoj napomeni, ali takva da je $\mu(t) = \int_0^t \lambda(y)dy$ invertibilna i neprekidna te $\mu(\infty) = \infty$, tada vrijedi*

- *$(\widetilde{N}(\mu(t))$ je nehom. Poissonov proces s funkcijom intenziteta λ.*
- *$N(\mu^{-1}(t))$ je standardni hom. Poissonov proces.*

Sjetimo se homogeni Poissonov proces možemo definirati i preko niza n.j.d. sl. varijabli (W_i) s Exp(λ) razdiobom i to tako da stavimo

$$T_0 = 0, \tag{1.5}$$

$$T_n = T_{n-1} + W_n, \; n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Niz dolaznih vremena (T_i) smo mogli dobiti na sličan način koristeći bilo koji drugi niz nenegativnih n.j.d. sl. varijabli, takav niz zovemo **niz obnavljanja**. Definiramo **proces obnavljanja** kao brojeći proces niza (T_i)

$$N(t) = \mathrm{card}\{i \in \mathbb{N} : T_i \leq t\}, t \geq 0, \tag{1.7}$$

Teorem 3 *Ovako zadan proces* $(N(t)$ *je homogeni Poissonov proces s intenzitetom* λ. *A vrijedi i obrat za svaki homogeni Poissonov proces s intenzitetom* λ *postoji niz n.j.d. sl. varijabli s Exp(*λ*) razdiobom tako da on ima reprezentaciju (1.7).*

Napomena Ako prepostavimo da je parametar λ sl. varijabli (W_i) sam sl. varijabla s nekom zadanom razdiobom na intervalu $(0, \infty)$, tada je proces $N(t)$ definiran u (1.7) tzv. miješani Poissonov proces.

Kako smo napomenuli, i bez pretpostavke da su W_i eksponencijalno distribuirane procesi obnavljanja nam mogu poslužiti kao model za dolaske šteta. Jasno je da prema zakonu velikih brojeva za sve njih, pod uvjetom $EW_i < \infty$ vrijedi

$$T_n/n \stackrel{\text{a.s.}}{\to} EW_1 =: \frac{1}{\lambda},\ n \to \infty.$$

Dakle T_n raste otprilike linearno. Takodjer znamo da je $E[N(t)]/t = \lambda = 1/EW_1$, slično vrijedi i za druge procese obnavljanja.

Teorem 4 *(jaki z.v.b. i elementarni teorem obnavljanja) Ako je* $\mu = EW_1 > 0$, *tada vrijedi*

$$N(t)/t \stackrel{\text{a.s.}}{\to} \frac{1}{EW_1} = \lambda,\ t \to \infty,$$

te

$$E[N(t)]/t \to \frac{1}{EW_1} = \lambda,\ t \to \infty,$$

Možemo postaviti i pitanje koliko je proces $N(t)/t$ daleko od svog očekivanja, ispostavlja se da vrijedi

Teorem 5 *(centralni granični teorem) Ako je* $0 < \mathrm{var} W_1 < \infty$ *vrijedi*

(i) za $t \to \infty$

$$\mathrm{var} N(t)/t \to \frac{\mathrm{var} W_1}{(EW_1)^3},$$

(ii) za $t \to \infty$ *i stand. normalnu sl. varijablu* N

$$\frac{N(t) - \lambda t}{\sqrt{\mathrm{var} W_1 t/(EW_1)^3}} \xrightarrow{d} N$$

Jedan od najvažnijih rezultata koji vrijedi za općenite procese obnavljanja je sljedeći teorem koji donosimo jedino zbog potpunosti.

Teorem 6 *(Blackwellov teorem obnavljanja) Ako je razdioba medjudolaznih vremena* (W_i) *nearitmetička tj.* $P(W_1 \in d \cdot \mathbb{Z}) < 1$ *za sve* $d \in \mathbb{R}$ *te je* $EW_1 < \infty$ *tada za sve* $h > 0$

$$E[N(t+h) - N(t)] \to \frac{h}{EW_1},\ t \to \infty,$$

Dakle očekivani broj šteta u bilo kojem intervalu tada je "dugoročno" proporcionalan duljini tog intervala, a koeficijent proporcionalnosti je $\lambda = 1/EW_1$. Uočite da je za Poissonov proces to bilo trivijalno zadovoljeno.

Razdioba pojedinačnih šteta

Kako modelirati razdiobe iznosa šteta?

▷ postoji široki spektar klasičnih i modernih metoda procjene razdiobe slučajnog uzorka
▷ deskriptivne metode kao što su histogram, graf empirijske razdiobe ili funkcije očekivanog viška, te qq-plot predstavljaju vjerojatno najbolji i najprirodniji prvi korak ovakve statističke analize.
▷ Ponekad možemo razumno pretpostaviti da štete dolaze iz neke parametarske familije razdioba, pa je tada dovoljno samo pronaći nepoznate parametre nekom standardnom statističkom procedurom (metodom momenata ili maksimalne vjerodostojnosti npr.).

▷ Češći slučaj u aktuarskoj praksi je da se prvo moramo odlučiti izmedju različitih familija vjerojatnosnih distribucija. Moramo posebno voditi računa da razdiobe koje tako odaberemo mogu modelirati i one najveće do tada opažene štete. U suprotnom, se naravno izlažemo velikom riziku.

Razdiobe se tipično dijele na one koje imaju **teške** i **lake repove**, gdje se pri tome služimo familijom eksponencijalnih razdioba kao prirodnom granicom izmedju ove dvije klase.

Kako su štete u našem modelu uvijek nenegativne sl. varijable, nas posebice mora brinuti **gornji rep** njihove razdiobe, tj. ponašanje od

$$\bar{F}_X(t) = P(X > t)$$

za "velike" t.
Ponekad se u literaturi razdiobama teškog repa nazivaju razdiobe onih nenegativnih slučajnih varijabli X, za koje je

$$m_X(s) = \infty$$

za sve $s > 0$. Prisjetimo se nekih familija razdioba.

Sl. varijabla X ima **eksponencijalnu razdiobu** s parametrom $\lambda > 0$, ako ima rep oblika

$$\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}, \ t > 0.$$

Oznaka je

$$X \sim \mathsf{Exp}(\lambda).$$

Primjetite da ova razdioba ima momente svakog reda, no funkcija izvodnica momenata $m_X(s)$ joj je dobro definirana samo za $s < \lambda$.

Pareto razdioba s parametrima $\kappa > 0$ i $\alpha > 0$ ima rep oblika

$$\bar{F}(t) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + t}\right)^{\alpha}, \ t > 0.$$

Kao oznaku koristimo $X \sim \mathrm{Par}(\alpha, \kappa)$. Ove razdiobe imaju vrlo težak rep, posebice za male α, jer tada naime ne postoje čak ni konačni momenti EX^s, za sve $s > \alpha$, dok je m_X konačna samo za $s \leq 0$. Ovo predstavlja problem u statističkoj analizi jer se razni procjenitelji tipično dobro ponašaju upravo u slučaju kada su ovi momenti konačni. Unatoč tome, ova familija razdioba tipično dobro opisuje stvarne podatke, pa se npr. često koristi u modeliranju vrlo velikih šteta.

Weibullova razdioba s parametrima $c > 0$ i $\tau > 0$ je okarakterizirana repom oblika

$$\bar{F}(t) = e^{-ct^{\tau}}, \; t > 0.$$

Za $\tau = 1$, dobijemo eksponencijalne razdiobe kao specijalni slučaj. Pišemo $X \sim W(c, \tau)$. Za $\tau > 1$ Weibullova razdioba ima rep lakši od eksponencijalne, dok je za $\tau < 1$, on teži, pa je npr. $m_X(s) = +\infty$ za sve $s > 0$. Metode momenata i maksimalne vjerodostojnosti se mogu primjeniti i na procjenu ove razdiobe, no postoji i treća mogućnost koja se zove **metoda percentila**. Ona zahtjeva da izjednačimo npr. 25% i 75% empirijski percentil s njihovim teoretskim vrijednostima i riješimo tako dobiven sustav po nepoznatim parametrima.

Empirijska funkcija distribucije

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(\infty,x]}(X_i)\,,$$

jasno càdlàg, mon. raste, $\hat{F}_n(-\infty) = 0$, $\hat{F}_n(+\infty) = 1$.
Ako su $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ **uređajne statistike** uzorka (i nema jednakih među njima)

$$\hat{F}_n(X_{(k)}) = \frac{k}{n},\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Za njd uzorak $X_1, \ldots, X_n \sim F$ vrijedi

Teorem (Glivenko–Cantelli)

$$\sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{gs} 0\,.$$

Generalizirani inverz

Za $u \in (0,1)$

$$F^{\leftarrow}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}\,,$$

vrijednost

$$q_u = F^{\leftarrow}(u)\,,$$

zovemo u–kvantilom razdiobe F. Jasno ako je F bijekcija kao gore $F^{\leftarrow} = F^{-1}$.

Ako je $Y = aX + b$, $a > 0, b \in \mathbb{R}$ lako se vidi

$$F_Y^{\leftarrow}(u) = aF_X^{\leftarrow}(u) + b\,.$$

Funkcija $\hat{F}_n$ skače u točkama $X_{(k)}$ za $1/n$, tako da funkcija $\hat{F}_n^{\leftarrow}$ skače u točkama k/n za $X_{(k)} - X_{(k-1)}$, tj

$$\hat{F}_n^{\leftarrow}(t) = \begin{cases} X_{(k)} & t \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}], \ k \leq n-1\,, \\ X_{(n)} & t \in (\frac{n-1}{n}, 1). \end{cases} \quad . \tag{1.8}$$

Korolar

Za sve t u kojima je $F^{\leftarrow}$ neprekidna vrijedi

$$\hat{F}_n^{\leftarrow}(t) \xrightarrow{gs} F^{\leftarrow}(t)\,.$$

Graf kvantila

qq-plot

je skup točaka

$$\left\{\left(F^{\leftarrow}\left(\frac{k}{n+1}\right), X_{(k)}\right) : k = 1, \ldots, n\right\} ,$$

a omogućuje usporedbu dvije razdiobe.

Kažemo da je gornji rep razdiobe F_2 teži od gornjeg repa razdiobe F_1 ako

$$\lim_{u \to 1} F_2^{\leftarrow}(u)/F_1^{\leftarrow}(u) = +\infty$$

U upravljanju rizicima jedan je od repova važniji (jer predstavlja gubitke), mi ćemo pretpostaviti da je to gornji rep.

Neka je

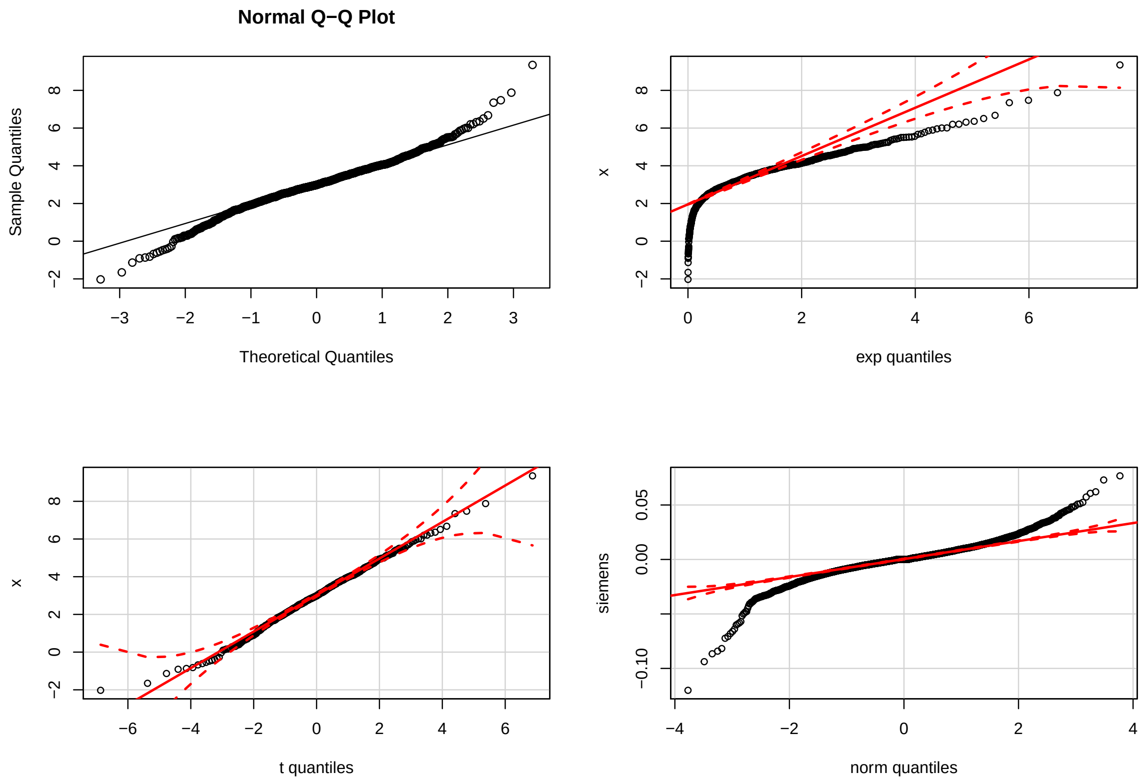
$$Y = \text{ gubitak u nekom portfelju}\,,$$

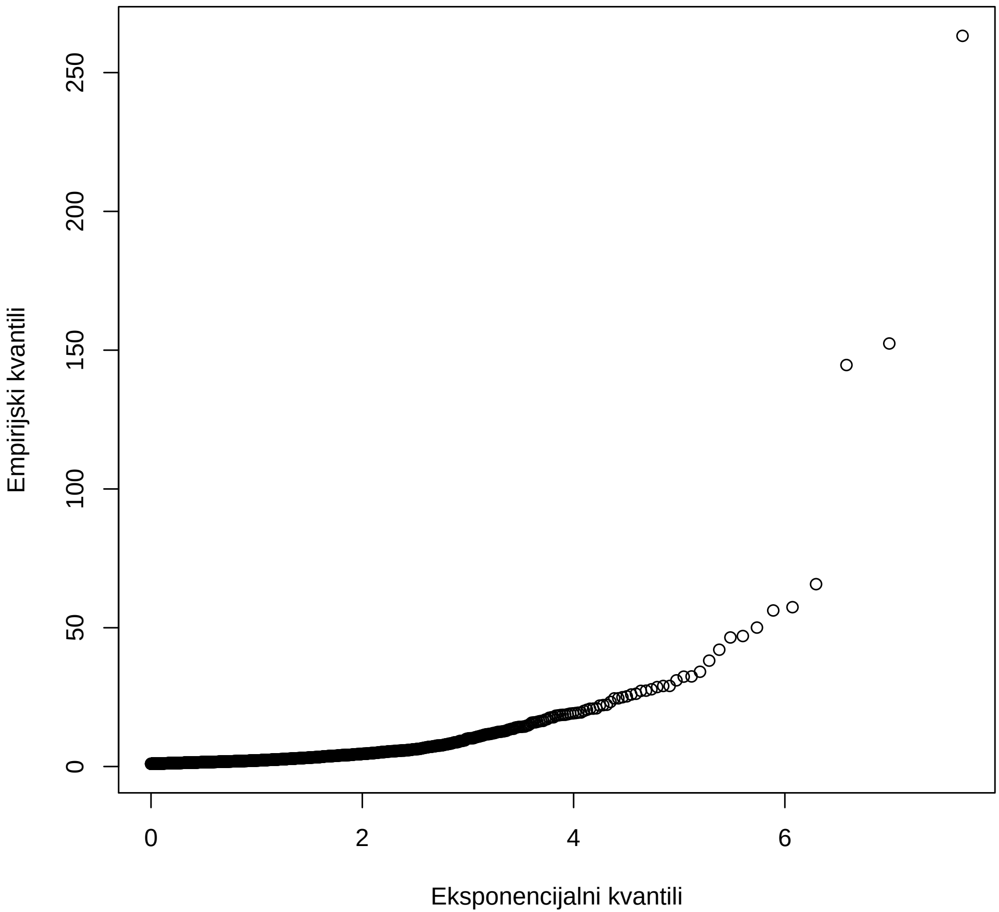
definiramo

$$x_l = \inf\{x : F_Y(x) > 0\}$$
$$x_r = \sup\{x : F_Y(x) < 1\}$$

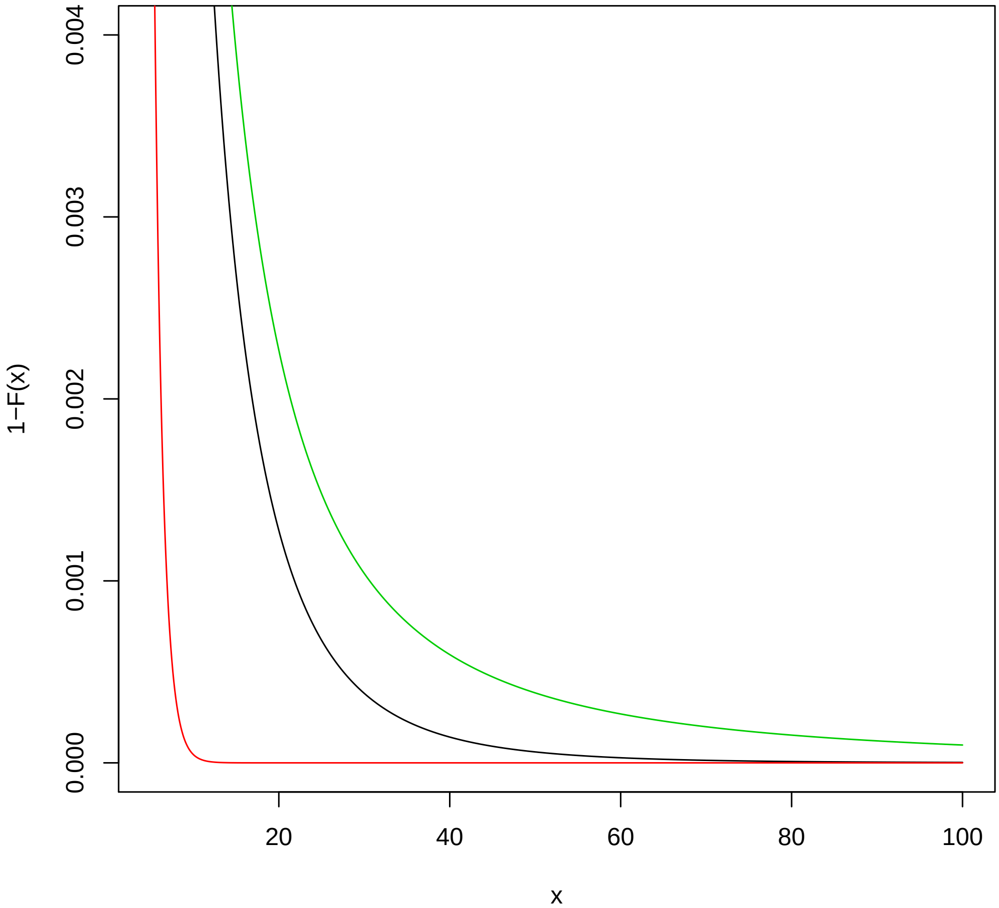
tipično pretpostavljamo da je $x_r = \infty$.

```r
x<-3+rt(1000,5)

par(mfrow=c(2,2))

qqnorm(x)
qqline(x)
library(car)
qqPlot(x, dist="exp")
qqPlot(x, dist="t", df=5)

library(evir)
data(siemens)
# ts.plot(siemens)
qqPlot(siemens,dist="norm")
par(mfrow=c(1,1))
```


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
x
exp quantiles
x
t quantiles
siemens
norm quantiles



Usporedba šteta za "Danish fire insurance data" s eksponencijalnom razdiobom u qq-plotu.



Usporedba funkcije gustoće za Par$(1,1)$ *i W*$(1,1/2)$ *s eksponencijalnom gustoćom.*

Očekivani manjak

expected shortfall / mean excess loss

uz uvjet $EY < \infty$, je funkcija

$$y \mapsto e_F(u) = E(Y - y | Y > y) \, ,$$

za $y \in (-\infty, x_r)$, $Y \sim F$, no vrijedi i

$$e_F(y) = \frac{1}{\overline{F}(y)} \int_y^\infty \overline{F}(t) dt \, .$$

Primjer

$Y \sim$ Exp(λ), tada je

$$e_F(u) = \frac{1}{\lambda}, \quad \forall u > 0\,.$$

Katkad se razdiobe sa svojstvom $e_F(y) \nearrow +\infty$, $y \to \infty$ zovu razdiobama teškog repa, a razdiobe za koje je $e_F(y)$ ograničena zovu se razdiobama lakog repa.

Primjer

razdioba	$e_F(y)$
Exp(λ)	$1/\lambda$
$\Gamma(\alpha, \beta)$	$\beta^{-1}(1 + \frac{\alpha-1}{\beta y} + o(\frac{1}{u})$
normalna	$\frac{1}{y}(1 + o(1))$
lognormalna	$\frac{\sigma^2 y}{\log y - \mu}(1 + o(1))$
Pareto(α) $\alpha > 1$	$\frac{\kappa + y}{\alpha - 1}$

U praksi $e_F(y)$ možemo neparametarski procijeniti td zamijenimo F sa $\hat{F}_n$ tj. sa

$$\hat{e}_n(y) = e_{\hat{F}_n}(y) = \frac{\frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - y)_+}{1 - \hat{F}(y)_n}\,.$$

Iz jakog zakona velikih brojeva slijedi

Propozicija

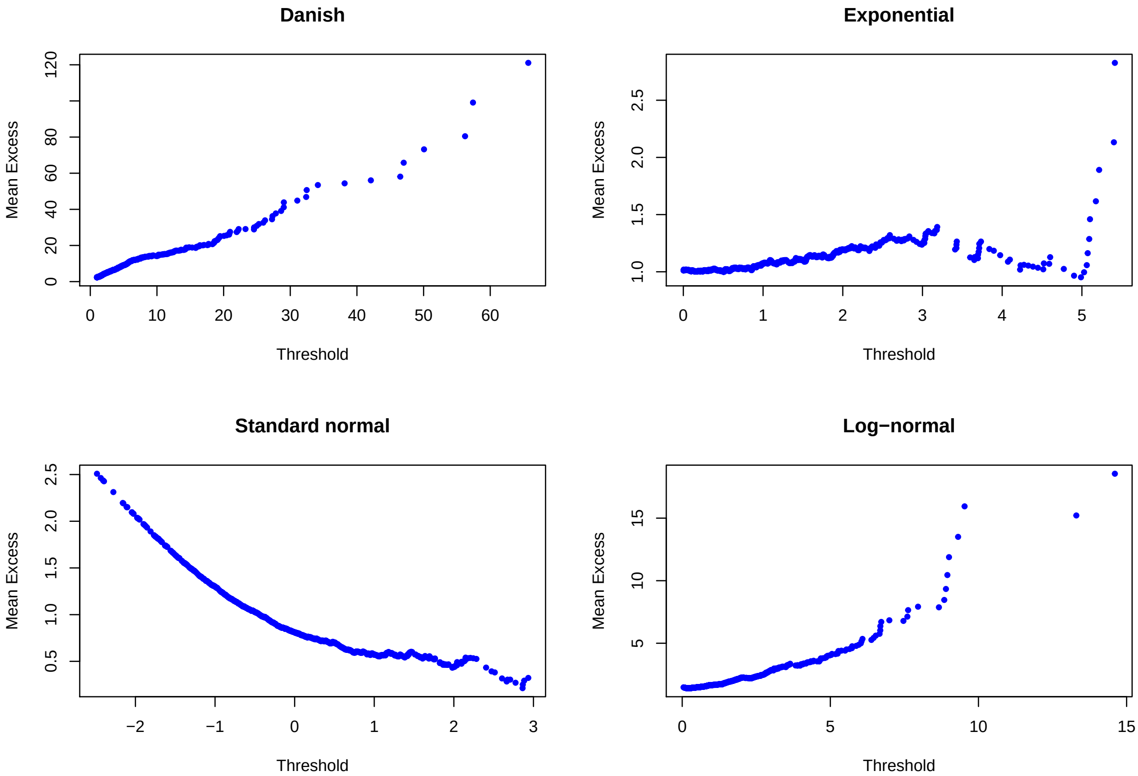
Za X_i njd td $x_r = \infty$, $EX_1 < \infty$, za sve $y > 0$

$$\hat{e}_n(y) \xrightarrow{gs} e_F(y)\,.$$

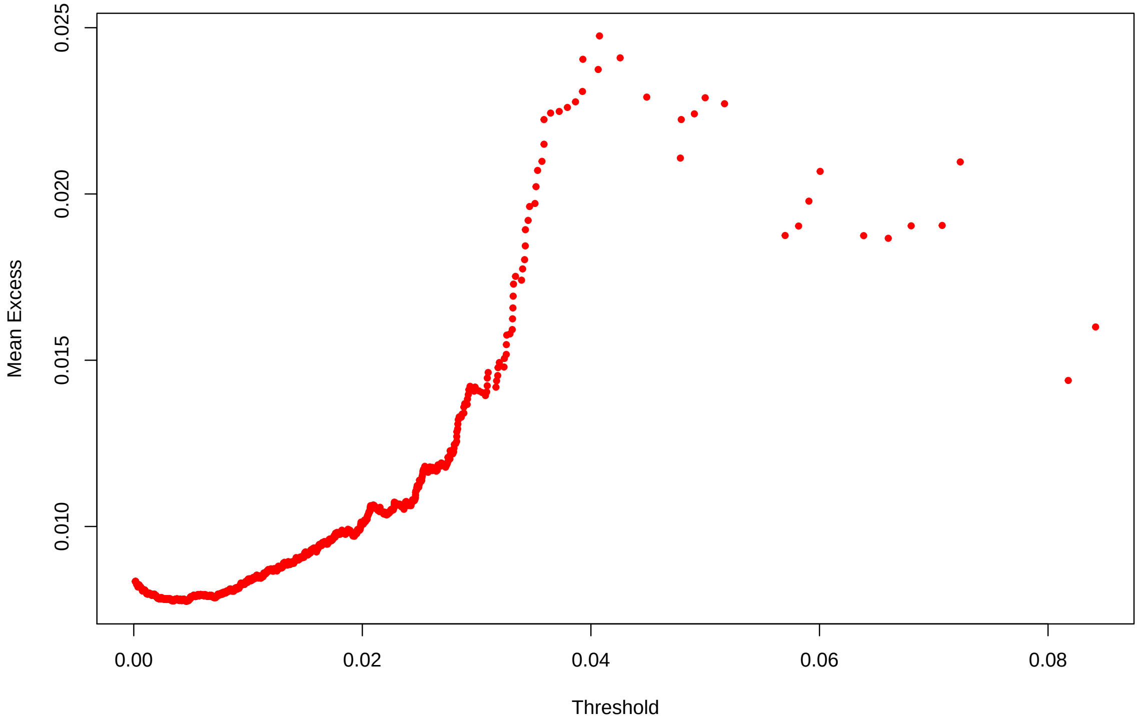
Graf očekivanog manjka (mean excess plot) je skup točaka

$$\left\{\left(X_{(k)}, \hat{e}_n(X_{(k)})\right) : k = 1, \ldots, n-1\right\}$$

```r
par(mfrow=c(2,2))

data(danish)
meplot(danish,main="Danish",col='blue', pch=20)
z<-rexp(1000)
meplot(z,main="Exponential",col='blue', pch=20)
z<-rnorm(1000)
meplot(z,main="Standard normal",col='blue', pch=20)
z<-exp(rnorm(1000))
meplot(z,main="Log-normal",col='blue', pch=20)
```


Danish
Exponential
Standard normal
Log−normal
Mean Excess
Threshold
0
20
40
60
80
120
10
30
50
1.0
1.5
2.0
2.5
1
2
3
4
5
0.5
−2
−1
5
10
15

```r
par(mfrow=c(1,1))
meplot(-siemens[siemens<0],col='red', pch=20)
```



Gama razdiobu najjednostavnije opisujemo preko funkcije gustoće koja iznosi

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \exp(-\beta t), \ t > 0,$$

za neke parametre $\alpha > 0$, $\beta > 0$, u oznaci $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Očekivanje i varijanca iznose

$$EX = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{i} \quad \mathrm{var} X = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Iz ovih izraza lako nadjemo procjenitelje parametara metodom momenata, koje možemo kasnije koristiti i kao inicijalne procjene u metodi maksimalne vjerodostojnosti. Primjetite da eksponencijalne razdiobe čine podfamiliju i ove klase ako stavimo $\alpha = 1$.

Lognormalna razdioba je takodjer često korištena u praksi, njeni parametri su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$, a sl. varijablu $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ karakterizira činjenica da je $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Procjena parametara je direktna čim transformiramo podatke logaritmiranjem.

Miješane razdiobe dobijemo koristeći formulu (1.4) ili još jednostavnije i općenitije pretpostavljajući da štete slijede neku parametarsku familiju razdioba, ali da su i parametri sami sl. varijable. Jedan primjer dobijemo ako pretpostavimo da su štete eksponencijalne s parametrom θ, gdje je $\theta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Marginalna gustoća od X tada je direktnim računom

$$f_X(t) = \frac{\beta^\alpha \alpha}{(t+\beta)^{\alpha+1}}\,,\ t > 0,$$

drugim riječima $X \sim \text{Par}(\alpha, \beta)$, što nam daje još jednu interesantnu karakteriziciju Pareto razdiobe.

Važno je primjetiti da ako je θ isti za sve pojedinačne štete X_i, one tada više nisu nezavisne, što odudara od osnovnog modela, ali je prirodna prepostavka Bayesovskih modela koje tek trebamo sresti. Pretpostavka o slučajnosti parametra je zapravo ključna prepostavka Bayesovske statistike, kao što ćemo vidjeti.

Burrova razdioba predstavlja još jedno poopćenje Pareto razdiobe, njen rep je zadan

$$\bar{F}(t) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + t^\gamma}\right)^\alpha, \ t > 0.$$

Novi parametar γ omogućuje dodatnu fleksibilnost u modeliranju stvarnih šteta. I ova kao i generalizirana Pareto razdioba imaju teški rep, koji se ponovo manifestira u činjenici da je $m_X(s) = +\infty$ za sve $s > 0$.

Burrova i Paretova razdioba imaju svojstvo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P(X > tx)}{P(X > t)} = x^{-\alpha}$$

za sve $x > 0$ i neki repni indeks $\alpha > 0$. Za ovakve razdiobe kažemo da imaju regularno varirajući rep. Njihov je značaj posebno velik u teoriji ekstremnih vrijednosti.

Direktno iz gornje relacije imamo za sve $x \geq 1$ sljedeću tvrdnju

$$\lim_{t\to\infty} P(X > tx | X > t) = x^{-\alpha}.$$

Uočite $P(Y > x) = x^{-\alpha}$ za $x \geq 1$ također definira razdiobu, koju ponekad u literaturi takodjer nazivaju Paretovom. Naime ako je $Z \sim \text{Par}(\alpha, \kappa)$ tada je $Z/\kappa + 1 \stackrel{d}{=} Y$.

Prema tome, razdioba viška štete X iznad praga u se za $u \to \infty$, asimptotski ponaša kao neka (evt. transformirana) Pareto razdioba. Kako je razdioba iznosa štete iznad praga od velike važnosti u reosiguranju, Paretove razdiobe imaju veliku upotrebu u tom dijelu aktuarske matematike.

Osim regularno varirajućih razioba, važna (i veća) klasa razdioba teškog repa je klasa tzv. **subeksponencijalnih razdioba**. Za razdiobe F u ovoj klasi vrijedi vrlo važna relacija: ako su $X_1, \ldots, X_n$ njd s funkcijom distribucije F, a $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ njihova suma odn. maksimum tada vrijedi za sve $n \geq 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = 1\,.$$

Razdioba ukupnih šteta

Za gore navedene razdiobe teško je pronaći točan izraz za funkciju distribucije ukupnih šteta

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \,,$$

za razne razdiobe broja šteta N. No ako prepostavimo da je razdioba od X koncentrirana na prirodnim brojevima, te da je

$$f_k = P(X = k), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

funkcija distribucije G od S odredjena je ako su nam poznati brojevi

$$g_k = P(S = k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, .$$

U specijalnom slučaju da i razdioba od N zadovoljava slijedeći uvjet

$$p_k = (a + b/k)p_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

za neke $a, b > 0$, vjerojatnosti g_k možemo naći rekurzivno iz

$$\begin{aligned} g_0 &= p_0, \\ g_k &= \sum_{j=1}^{k}(a + bj/k)f_j g_{k-1}. \end{aligned}$$

U literaturi postoje i različita proširenja ovih rekurzija koje se najčešće zovu Panjerove rekurzije.

U mnogim slučajevima G ne možemo odrediti direktno ali je možemo aproksimirati normalnom razdiobom oslanjajući se na centralni granični teorem. Naime ako je $N = n$ jako velik i fiksan, te postoje $EX = \mu_1$ i $\mathrm{var}X = \sigma^2$ tada vrijedi sljedeća aproksimacija

$$G(x) = P(S \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - n\mu_1}{\sqrt{n}\sigma}\right),$$

gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne sl. varijable.

U praksi možemo koristiti i Monte Carlo simulacije, koje, ako su dobro provedene, omogućuju dobar uvid u razdiobe od S i u vrlo općenitim uvjetima.

Ovaj argument možemo učiniti rigoroznim pod prepostavkom da je brojeći proces šteta $(N(t))$ proces obnavljanja, te da medjudolazna vremena izmedju obnavljanja (W_i) imaju konačnu varijancu.

Teorem 7 *Pretpostavimo da vrijedi* $\mathrm{var} W_i < \infty$ *i* $\mathrm{var} X_i < \infty$ *tada*

$$P\left(\frac{S(t) - ES(t)}{\sqrt{\mathrm{var} S(t)}} \le x\right) \to \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

U primjenama ovog teorema možemo se poslužiti asimptotskim aproksimacijama

$$ES(t) \approx \lambda t E X_1 \ \text{ i } \ \mathrm{var} S(t) \approx \lambda t [\mathrm{var} X_1 + \mathrm{var} W_1 \lambda^2 (E X_1)^2],$$

gdje je $\lambda = 1/EW_1$.

Reosiguranje

Osiguravateljsko društvo i samo može uzeti policu da bi se osiguralo od "velikih" šteta. Takva polica zove se reosiguranje.

Reosiguranje viška štete

Kod reosiguranja viška štete, društvo će u cijelosti platiti štetu do iznosa M koji se zove samopridržaj (retencija, engl. retention); svaki iznos iznad M pokrit će reosiguratelj.

Ugovor o reosiguranju viška štete može se zapisati na sljedeći način: ako je iznos štete X, tada će društvo platiti Y gdje je $Y = \min\{X, M\}$, odn.

$$\begin{aligned} Y &= X \qquad \text{ako je } X \le M \\ Y &= M \qquad \text{ako je } X > M. \end{aligned}$$

Reosiguratelj plaća iznos $Z = X - Y$.
To na osigurateljevu obvezu utječe na dva očita načina:

(i) smanjuje se očekivani isplaćeni iznos;

(ii) smanjuje se varijanca isplaćenog iznosa.

Oba zaključka su jednostavne posljedice činjenice da reosiguranje viška štete ograničava odozgo velike štete.

Sada se mogu dobiti i očekivanje i smanjenje očekivanja iznosa koji isplaćuje osiguratelj pri reosiguranju viška štete. Uočite da je očekivani iznos koji isplaćuje osiguratelj bez reosiguranja

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x)\,dx \tag{1.9}$$

gdje je $f(x)$ vjerojatnosna funkcija gustoće iznosa štete X. Uz retenciju M očekivanje postaje

$$E(Y) = \int_0^M x f(x)\,dx + MP(X > M)\,. \tag{1.10}$$

Korištenjem (1.10)

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^\infty x f(x)\,dx - \int_M^\infty x f(x)\,dx + M \int_M^\infty f(x)\,dx \\
&= E(X) - \int_M^\infty (x-M) f(x)\,dx .
\end{aligned}
$$

Potpun integral može se dobiti supstitucijom $z = x - M$. Prema tome

$$
E(Y) = E(X) - \int_0^\infty z f(z+M)\,dz \,, \tag{1.11}
$$

što je jednostavna, ali važna formula.

Smanjenje očekivanog iznosa štete je

$$\int_0^\infty z f(z+M)\,dz. \tag{1.12}$$

$\diamond$ Postoji također i problem inflacije. Pretpostavimo da inflacija povećava iznose šteta za faktor k, ali da se retencija M ne mijenja.
$\diamond$ Kakve će to posljedice imati na ugovor?
Iznos štete je kX, a iznos Y koji plaća osiguratelj je $Y = \min\{kX, M\}$ t.j.

$$\begin{array}{ll} Y = kX & \text{ako je } kX \le M \\ Y = M & \text{ako je } kX > M. \end{array}$$

◇ Očekivani iznos koji isplaćuje osiguratelj je

$$E(Y) = \int_0^{M/k} kxf(x)\,dx + MP(X > M/k)\,. \tag{1.13}$$

Jednadžba (1.13) može se zapisati kao

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\infty} kxf(x)\,dx - \int_{M/k}^{\infty} kxf(x)\,dx + M\int_{M/k}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= kE(X) - k\int_{M/k}^{\infty}(x - M/k)f(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Novi očekivani iznos koji isplaćuje osiguratelj je

$$E(Y) = k(E(X) - \int_0^{\infty} yf(y + M/k)\,dy)\,. \tag{1.14}$$

◇ Važan opći zaključak je da novi očekivani iznos šteta (1.14) nije k puta očekivani iznos šteta bez inflacije (1.11).

◇ Sličan pristup može se primjeniti u situacijama gdje je granica retencije povezana s nekim indeksom cijena.

Promotrimo problem procjene pri reosiguranju viška štete. Pretpostavimo da podacima o štetama pokazuju samo štete koje je osiguratelj stvarno isplatio. Tipični podaci o štetama mogli bi biti

$$x_1, x_2, M, x_3, M, x_4, x_5, \ldots \tag{1.15}$$

i zahtjeva se procjena temeljne distribucije bruto šteta. Metoda momenata nije dostupna, budući da se ne može izračunati čak niti očekivani iznos šteta. S druge strane, ponekad će se bez promjene moći koristiti metoda percentila. To će biti moguće kada je retencija M visoka te će (mali broj) reosigurateljnih šteta utjecati samo na više percentile uzorka.
Statistički termin za uzorak oblika (1.15) je **cenzurirani uzorak**.

$\diamond$ Općenito, cenzurirani uzorak pojavljuje se kada su neke vrijednosti točno zabilježene, dok je za druge vrijednosti poznato samo da prelaze neku određenu vrijednost, ovdje retencija M. Ovo je npr. čest slučaj kod procjene zakona smrtnosti.

$\diamond$ Metoda maksimalne vjerodostojnosti može se primijeniti na cenzurirani uzorak. Funkcija vjerodostojnosti mora se prilagoditi cenzuriranim podacima i sastoji se od dva dijela.

Njen oblik je

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{1}^{n} f(x_i; \underline{\theta}) \times [1 - F(M; \underline{\theta})]^m \tag{1.16}$$

gdje je $F(\cdot; \underline{\theta})$ funkcija distribucije šteta.

Promatrajmo sada reosiguranje s točke gledišta reosiguratelja. Reosiguratelj može imati zabilježene samo štete koje su veće od M. Ako je šteta manja od M, reosiguratelj ne mora čak niti znati da je šteta nastala. Problem reosiguratelja je dakle procjena temeljne distribucije šteta kada se opažaju samo štete veće od M. Statistički termin je da reosiguratelj opaža štete iz odrezane distribucije.

Kvotno ili proporcionalno reosiguranje

Kod kvotnog reosiguranja osiguratelj isplaćuje fiksan omjer štete, kolika god bila šteta. Upotrebom istih oznaka kao gore, ugovor o kvotnom reosiguranju može se zapisati kako slijedi: ako je iznos štete X, tada će društvo isplatiti Y gdje je

$$Y = \alpha X \quad 0 < \alpha < 1 \,.$$

Parametar α se zove retencija. Uočite da se termin retencija koristi i kod reosiguranja viška štete i kod kvotnog reosiguranja.
Budući da je iznos po šteti X koji isplaćuje osiguratelj jednak αX, a iznos koji isplaćuje reosiguratelj jednak $(1-\alpha)X$, distribucije oba ta iznosa jednostavno se nalaze zamjenom varijabli.

Franšiza

Police osiguranja s ugovorenom franšizom uobičajene su kod osiguranja motornih vozila, te kod mnogih drugih osiguranja imovine i osiguranja od nesreće. Kod ove vrste police, osiguranik pristaje snositi puni iznos štete do iznosa L, koji se zove franšiza. Ako je iznos štete X veći od L, osiguranik će potraživati samo $X - L$. Ako je Y stvarni iznos koji isplaćuje osiguratelj, tada je $Y = \max\{X - L, 0\}$ odn.

$$\begin{aligned} Y &= 0 && \text{ako je } X \le L \\ Y &= X - L && \text{ako je } X > L. \end{aligned}$$

Jasno je da će premija za policu s franšizom biti manja nego za policu bez franšize.
Pozicija osiguratelja za policu s ugovorenom franšizom potpuno je ista poziciji reosiguratelja kod reosiguranja viška štete. Pozicija osiguranika, barem što se tiče šteta, potpuno je ista poziciji osiguratelja s ugovorenim reosiguranjem viška štete.

Drugi tipovi reosiguranja

U praksi se još ponekad koriste 3 tipa reosiguranja

- **Stop-loss** reosiguranje kod kojeg reosiguravatelje preuzima ukupne gubitke iznad nivoa K, tj.

$$\max\{S(t) - K, 0\}$$

- **Largest claim** reosiguranje kod kojeg reosiguravatelj pokriva k najvećih šteta.
- **ECOMOR** reosiguranje kod kojeg reosiguravatelj pokriva sve štete u iznosu kojim nadilaze k-tu najveću štetu.

Distribucije skupne štete uz kvotno i reosiguranje viška štete

- Kvotno reosiguranje

Distribucija broja odštetnih zahtjeva za reosiguratelja ista je distribuciji broja odštetnih zahtjeva za osiguratelja, budući da svaki isplaćuje definirani omjer svake štete. Za rentenciju α $(0 \leq \alpha \leq 1)$, iznosi individualnih šteta za osiguratelja distribuirani su kao αX_i, a za reosiguratelja kao $(1-\alpha)X_i$. Iznosi skupnih šteta distribuirani su kao αS, odnosno $(1-\alpha)S$.

▷ Reosiguranje viška štete

Iznos koji isplaćuje osiguratelj po i-toj šteti uz reosiguranje viška štete sa retencijom M je $Y_i = \min(X_i, M)$.
Iznos koji plaća reosiguratelj je $Z_i = \max(0, X_i - M)$.
Prema tome, osigurateljeve skupne štete, mogu se predstaviti kao

$$S_O = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$$

a reosigurateljeve skupne štete kao

$$S_R = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_N \, . \tag{1.17}$$

Ako je, na primjer, $N \sim P(\lambda)$, S_O ima složenu Poissonovu distribuciju s Poissonovim parametrom λ, a iznosi individualnih šteta distribuirani su kao Y_i. Slično, S_R ima složenu Poissonovu distribuciju s Poissonovim parametrom λ, a iznosi individualnih šteta distribuirani su kao Z_i. Uočite, međutim, da ako je $F(M) > 0$, kao što je obično slučaj, tada Z_i prima vrijednost 0 s vjerojatnošću različitom od nule (naime $F(M)$).

POT metoda

U praksi je vrlo korisno procijeniti ukupne štete iznad nekoga visokog praga (thresholda) u. Ekstremne štete nije lako modelirati: podataka nemamo previše na raspolaganju, a razdioba empirijskih podataka je tipično teškog repa. Ipak, za razdiobe regularno varirajućeg repa kakve često srećemo kod ekstremnih šteta mi znamo da ja aproksimativno razdioba ovih prekoračenja iznad praga Paretova razdioba.

Ako sad vremena dolazaka šteta modeliramo Poissonovim procesom N, procijenu razdiobe šteta iznad praga možemo dobiti tzv. *peaks over threshold* metodom (v. Embrechts et al.) Tako bismo npr. Na osnovu n.j.d. uzorka šteta $X_1, \ldots, X_n$ mogli bismo dati empirijsku procjenu za $P(X > u + y)$ kao

$$\left(\frac{u+y}{u}\right)^{-\hat{\alpha}} \frac{N_u}{n}$$

gdje je N_u broj prekoračenja iznad praga u u našemo uzorku, a $\hat{\alpha}$ je neki (razuman) procjenitelj za repni indeks α, npr. Hillov procjenitelj.

2. Teorija nesolventnosti

Uvod

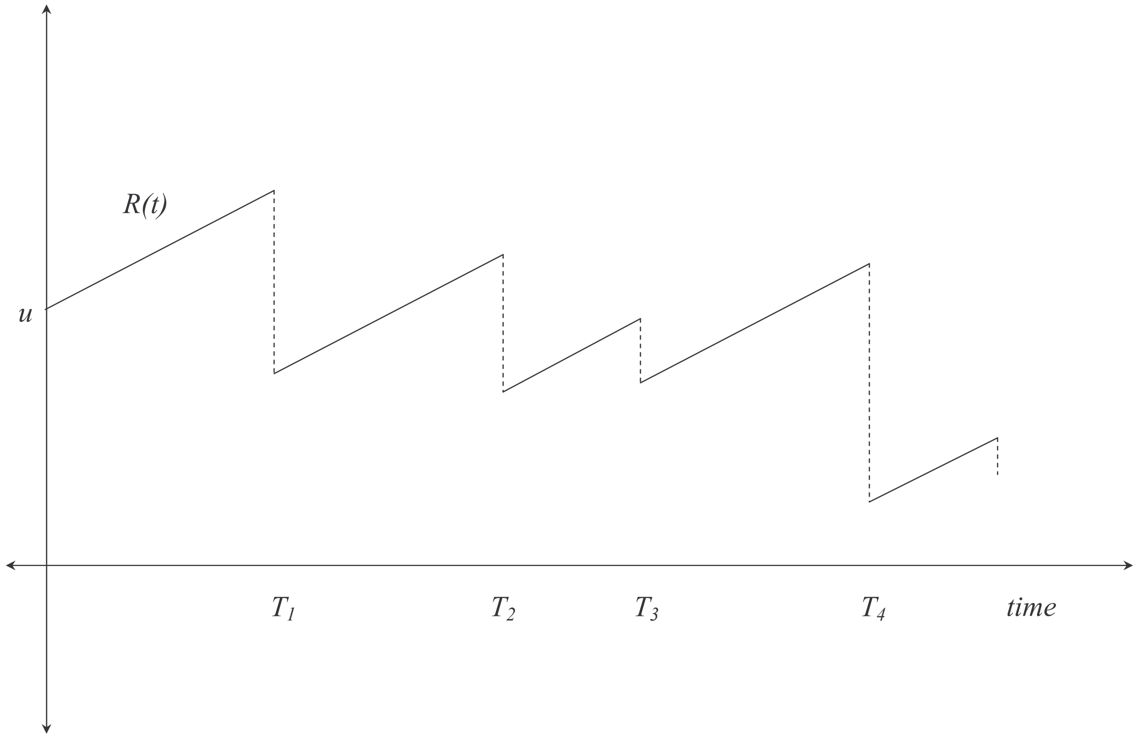
Zanemarujući inflaciju i druge eventualne dinamičke promjene u portfelju, ukupna vrijednost šteta u intervalu $[0,t]$ iznosi

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Prepostavimo da je $u > 0$ inicijalni kapital osiguravatelja, te da se premije naplaćuju po konstantnoj stopi $c > 0$, tako da je u intervalu $[0,t]$ na ime premija naplaćeno ukupno ct. Prirodno je pitati da li postoji neki vremenski trenutak u kojem do tada naplaćene premije zajedno s inicijalnim kapitalom ne pokrivaju sve do tada ostvarene štete. U tom bismo slučaju govorili o **propasti osiguravatelja**. Definirajmo **proces rizika (eng. risk process ili surplus process)** kao

$$R(t) = u + ct - S(t)\,.$$

Propast dakle, odgovara dogadjaju $\{R(t) < 0 : \text{ za neko } t \geq 0\}$. Primjetite da ovako definirana propast u praksi ne znači nužno i stvarnu propast osiguravatelja. Naime osiguravatelj je u mogućnosti povisiti premije ako se proces rizika previše približi 0. Nadalje, ovako definiran proces $(R(t))$ opisuje tek jedan od mnogo homogenih osiguravateljskih portfelja u rukama velike osiguravajuće kompanije. Pa se gubici u jednom portfelju mogu pokriti zaradom iz preostalih.



Jedna realizacija procesa rizika ili viška štete $R(t)$.[81]

Modelu se može prigovoriti i sljedeće

▷ pretpostavka o vremenskoj homogenosti, (koja nije jako restriktivna)
▷ kompanija može imovinu i ulagati, pa se proces rizika mijenja i zbog prinosa na imovinu

▷ što ako se dioničari odluče za isplatu dividende, koje bismo takodjer morali oduzeti u izraza za $R(t)$?

Zbog svega navedenog ovako definirana propast ima više teoretsko značenje. Unatoč tome izračuni u ovako postavljenom modelu nam pomažu u odredjivanju visine premija, kao i nivoa reosiguranja.

Ono što nas često zanima je da procjenimo vjerojatnost propasti odn.

$$\Psi(u) = P(\inf_{t>0} R(t) < 0)$$

ili čak vjerojatnost propasti prije nekog unaprijed zadanog trenutka t^*

$$\Psi(u, t^*) = P(\inf_{0<t\le t^*} R(t) < 0).$$

Jasno je da vrijedi

$$\Psi(u, t) \le \Psi(u), \quad \text{za } t > 0,$$

te

$$\Psi(u, t) \nearrow \Psi(u), \quad \text{za } t \to \infty.$$

Ključni uvjet u teoriji propasti je da su očekivani iznos premija sakupljenih izmedju dolaska dvije štete veći od očekivanog iznosa štete, inače će se propasti dogoditi s vjerojatnosti 1. Zbog toga pretpostavljamo **uvjet neto profita**

$$EX_1 < cEW_1 \iff c > \lambda\mu_1.$$

Ponekad pišemo iznos c kao

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu_1$$

gdje je $\theta > 0$ tzv. **dodatak ili doplata za sigurnost (eng. safety loading)**.

Uočite, ako je (T_n) niz dolaznih vremena za štete

$$P(\inf_{t>0} R(t) < 0) = P(\inf_{n\geq 1} R(T_n) < 0),$$

no uz $T_0 = 0$

$$R(T_{n+1}) = R(T_n) + cW_{n+1} - X_{n+1} \, ,$$

dakle niz $(R(T_n))$ zapravo predstavlja slučajnu šetnju, a uvjet neto profita garantira da je trend (tj. očekivanje koraka) ove šetnje striktno pozitivan. Ukoliko taj uvjet ne vrijedi, poznato je da bi šetnja s vjerojatnošću 1 završila kad tad ispod 0.

$$P(\inf_{t>0} R(t) < 0) \tag{2.1}$$

$$= P(\inf_{n} u + \sum_{k=1}^{n} cW_k - X_k < 0) \tag{2.2}$$

$$= P(\sup_{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - cW_k > u) \tag{2.3}$$

Zbog uvjeta neto profita dualna šetnja s koracima $X_k - cW_k$ ima negativan drift, pa je vjerojatnost propasti zapravo vjerojatnost da jedna ovakva šetnja izađe iznad pozitivnog nivoa u.

Uvjeti na funkciju izvodnicu momenata ukupnih šteta

Pretpostavimo da dolasci šteta slijede homogen Poissonov proces s intenzitetom λ, tada znamo iz m_X dobiti funkciju izvodnicu momenata za sl. varijablu $S(t)$, za sve $t > 0$ v. (1.2). Prepostavit ćemo još da je za neko $0 < \gamma \leq \infty$, $m_X(s) < \infty$ za sve $s < \gamma$, te da vrijedi

$$\lim_{r \nearrow \gamma} m_X(r) = \infty. \tag{2.4}$$

Primjetite da za eksponencijalne štete s parametrom a, γ iznosi upravo a, s druge strane takav γ ne postoji za Pareto razdiobu, ali i za mnoge druge razdiobe repa težeg od eksponencijalne, tj. tzv. subeksponencijalne razdiobe (v. Embrechts et al.).

Sljedeći rezultat će nam biti od velike koristi

Lema 8 *Pod uvjetom (2.4) vrijedi*

$$\lim_{r\to\gamma} \lambda m_X(r) - cr = \infty.$$

Dokaz. Za konačne γ rezultat slijedi direktno iz (2.4). Prepostavimo $\gamma = \infty$. Kako su X_i nenegative sl. varijable i vrijedi (2.4) postoji $\varepsilon > 0$ tako da $p_\varepsilon = P(X_i > \varepsilon) > 0$. Jasno je (iz Markovljeve nejednakosti npr.) da vrijedi

$$m_x(r) \geq e^{r\varepsilon} p_\varepsilon,$$

stoga je

$$\lim_{r\to\infty} \lambda m_X(r) - cr \geq \lim_{r\to\infty} \lambda e^{r\varepsilon} p_\varepsilon - cr = \infty.$$

$\square$

U nastavku ćemo trebati činjenicu da je za neko $\xi > 0$

$$m_{X-cW}(\xi) = Ee^{\xi(X-cW)} = 1. \tag{2.5}$$

No kako je $W \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ gornja relacija je ekvivalentna sljedećoj

$$\lambda m_X(\xi) = \lambda + c\xi \, .$$

Ako pišemo $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$ tada je ξ pozitivno rješenje jednadžbe

$$m_X(\xi) = 1 + (1+\theta)\mu_1\xi \, ,$$

pa dakle za poznato θ, ξ ne ovisi o λ. Realan broj $\xi > 0$ koji zadovoljava (2.5) zovemo **koeficijent prilagodbe**. Važna je činjenica dakako da takav ξ uvijek postoji.

Teorem 9 *Pod našim uvjetima, postoji jedinstveni $\xi > 0$ koji zadovoljava jednadžbu (2.5).*

Dokaz. Definirajmo funkciju $g(x) = \lambda m_X(x) - \lambda - cx$. Na intervalu $[0, \gamma)$ ona je dobro definirana, čak štoviše ona je na tom intervalu proizvoljan broj puta derivabilna, pa prema tome i neprekidna. Uočite da vrijedi

$$g'(x) = \lambda m'_X(x) - c\,.$$

Posebno je $g'(0) = \lambda EX - c < 0$ prema uvjetu neto profita. Za drugu derivaciju analogno dobijemo

$$g''(x) = \lambda m''_X(x) = \lambda EX^2 e^{xX} > 0\,,$$

za sve $x > 0$. Dakle g je striktno konveksna, pa prema tome ima jednu i samo jednu kritičnu točku, u kojoj je njena vrijednost negativna, a nakon nje g monotono raste. Iz uvjeta (2.4) slijedi da postoji jedinstven $\xi > 0$ tako da je $g(\xi) = 0$. $\square$

Primjer Prepostavimo da ako štete zadovoljavaju $X_i \sim \text{Exp}(a)$, tada je $m_X(s) = a/(a-s)$, pa ξ zadovoljava

$$\lambda + c\xi = \lambda a/(a-\xi)\,.$$

Ako ovu jednadžbu riješimo po $\xi > 0$, dobijemo $\xi = a - \lambda/c$.
Općenito nije jednostavno pronaći riješenje od (2.5), no korisno je dobiti i gornju ogradu

$$\begin{aligned}\lambda + c\xi &= \lambda m_X(\xi)\\ &= \lambda E e^{\xi X}\\ &\geq \lambda E(1 + \xi X + \xi^2 X^2/2)\\ &= \lambda(1 + \xi\mu_1 + \xi^2 E X^2/2)\,,\end{aligned}$$

odakle slijedi da mora biti

$$\xi < 2\frac{c - \lambda\mu_1}{\lambda E X^2}\,,$$

a za relativno male vrijednosti od ξ, ova je aproksimacija vrlo korisna.

Ponašanje vjerojatnosti propasti

Prisjetimo se prvo oznake $f(x) \sim g(x)$, $x \to \infty$. Za dvije realne funkcije, ona znači da $f(x)/g(x) \to 1$, za $x \to \infty$. Osnovni rezultati teorije propasti sadržani su u sljedećem teoremu.

Teorem 10 *Pod našim prepostavkama vrijedi*
a) (Lundebergova nejednakost)

$$\Psi(u) \leq e^{-\xi u}$$

b) postoji konstanta $C > 0$ tako da je

$$\Psi(u) \sim C e^{-\xi u} \quad \textit{za } u \to \infty.$$

Nešto novijeg datuma su rezultati Embrechtsa i Veraverbeekea koji pokazuju slične asimptotske rezultate u slučaju šteta s teškim, preciznije subeksponencijalnim repom, v. Embrechts et al.

Primjer Ako vrijedi $X_i \sim \mathsf{Exp}(a)$, tada je

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\theta u/(\mu(1+\theta))} = \frac{\lambda}{ac} e^{-(a-\lambda/c)u}.$$

Interesantno je primijetiti i kako se funkcija $\Psi(u,t)$ mijenja u ovisnosti o svojim parametrima. Za fiksno t, ona je dakako monotono padajuća po u, dok za fiksno u monotono raste sa t. Takodjer jasno je da ona pada sa c odn. θ, kao i da raste s obzirom na λ, iako ih nismo naveli eksplicitno kao parametre funcije Ψ. Ove relacije su ilustrirane sljedećim grafovima.

Utjecaj promjene parametara na vjerojatnost propasti

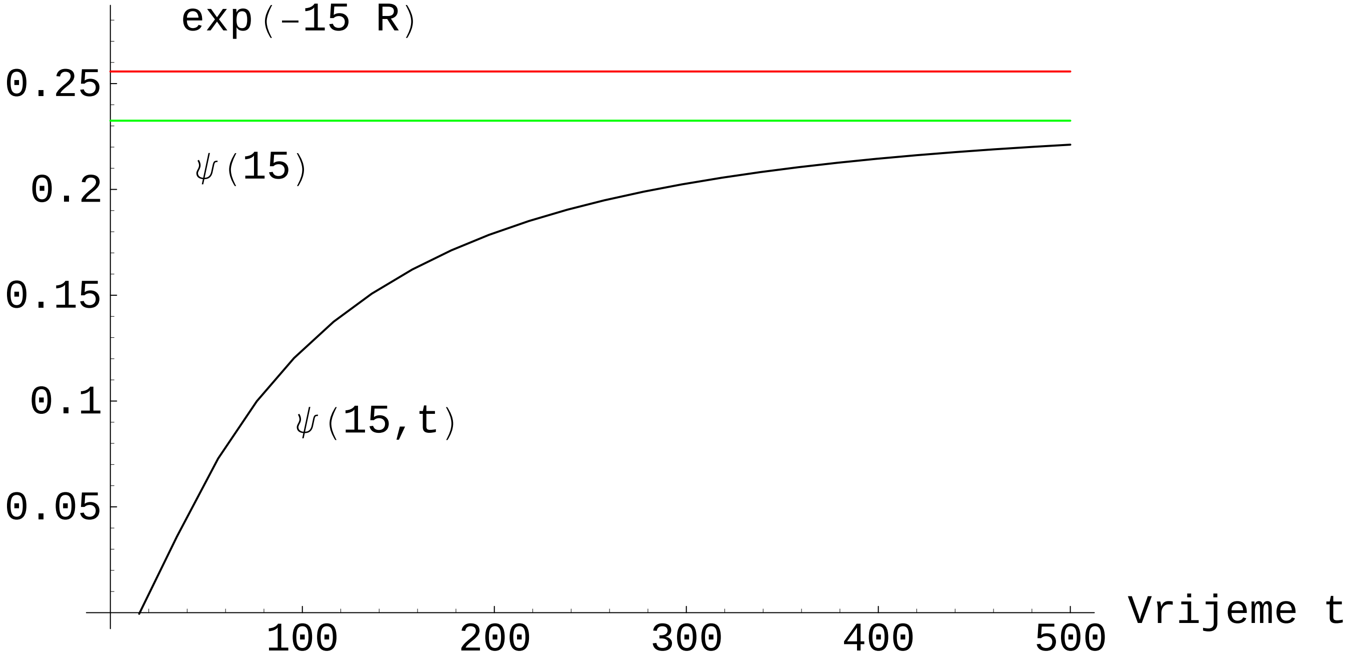
Prepostavimo

- dolazna vremena šteta slijede jedinični homogeni Poissonov proces.
- pojedinačne štete imaju Exp(1) razdiobu

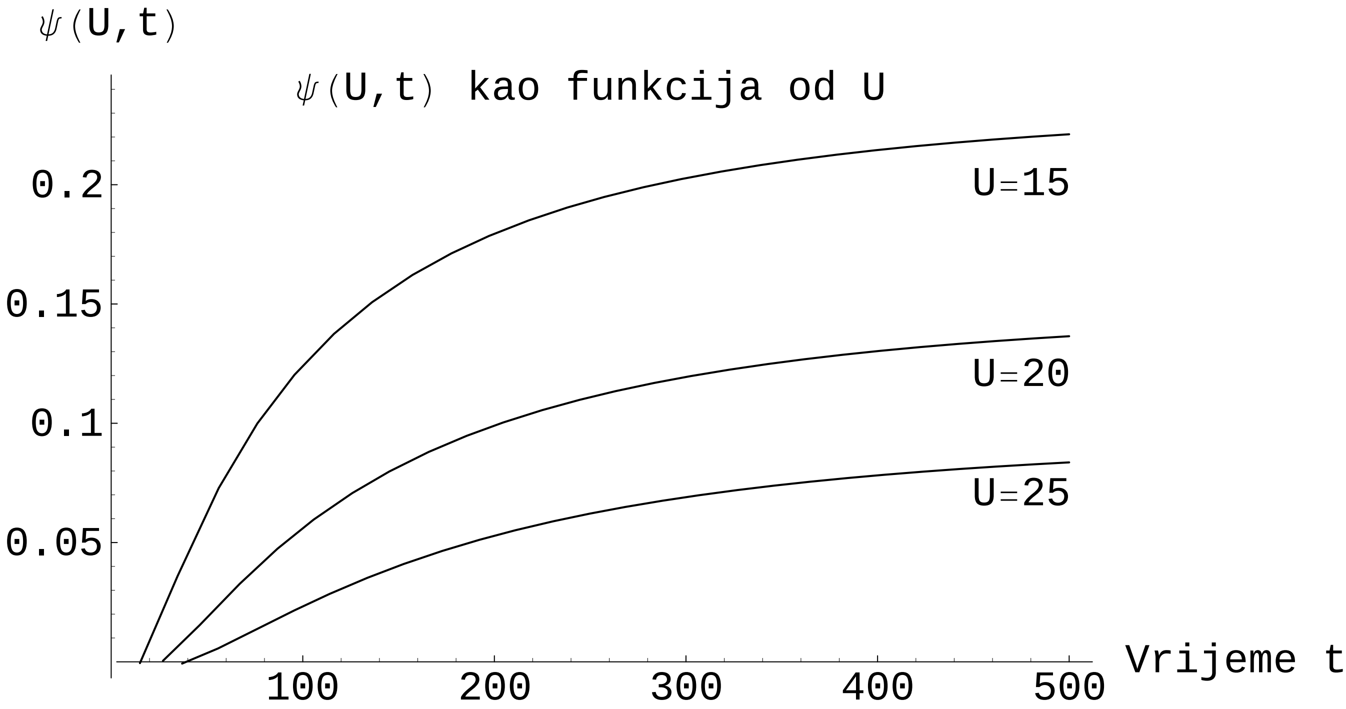
Naš cilj je vidjeti kako $\Psi(u,t)$ varira u odnosu na svoje parametre

$$t,\ u,\ \theta,\ \lambda\,.$$

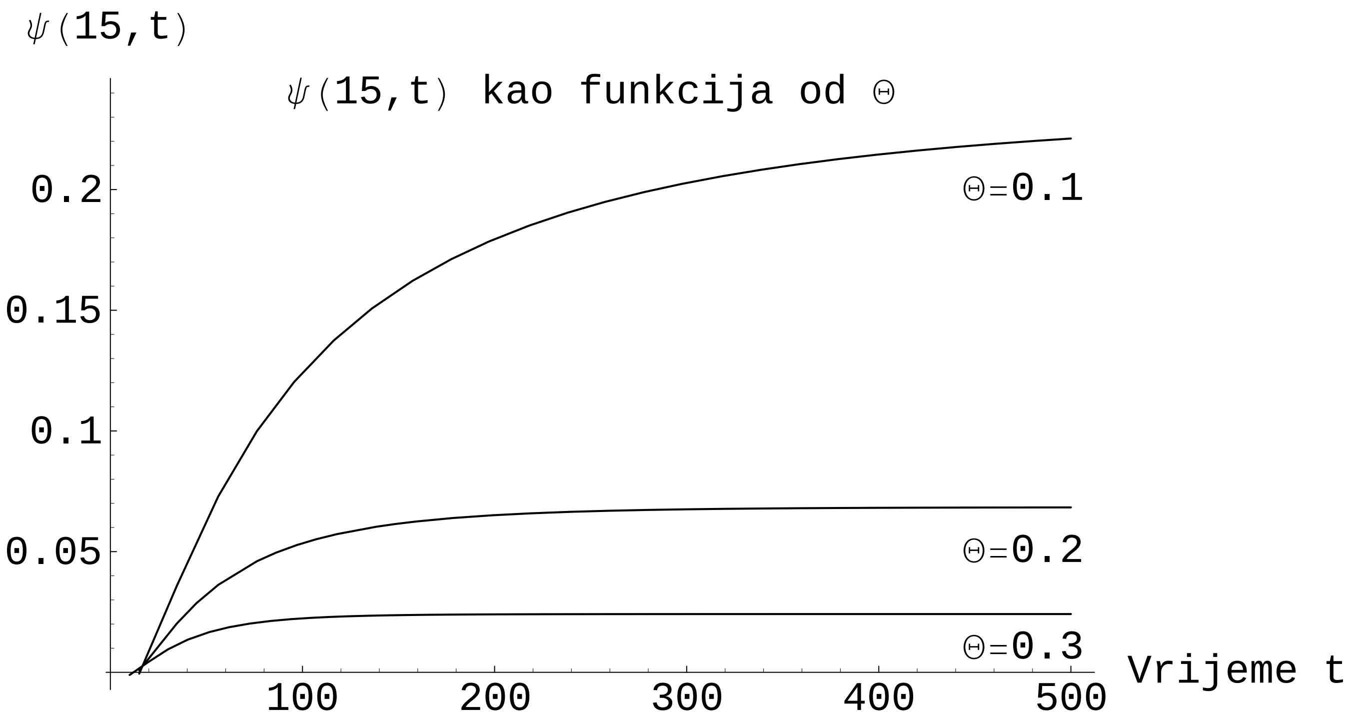
Na slikama je ξ označen slovom R!



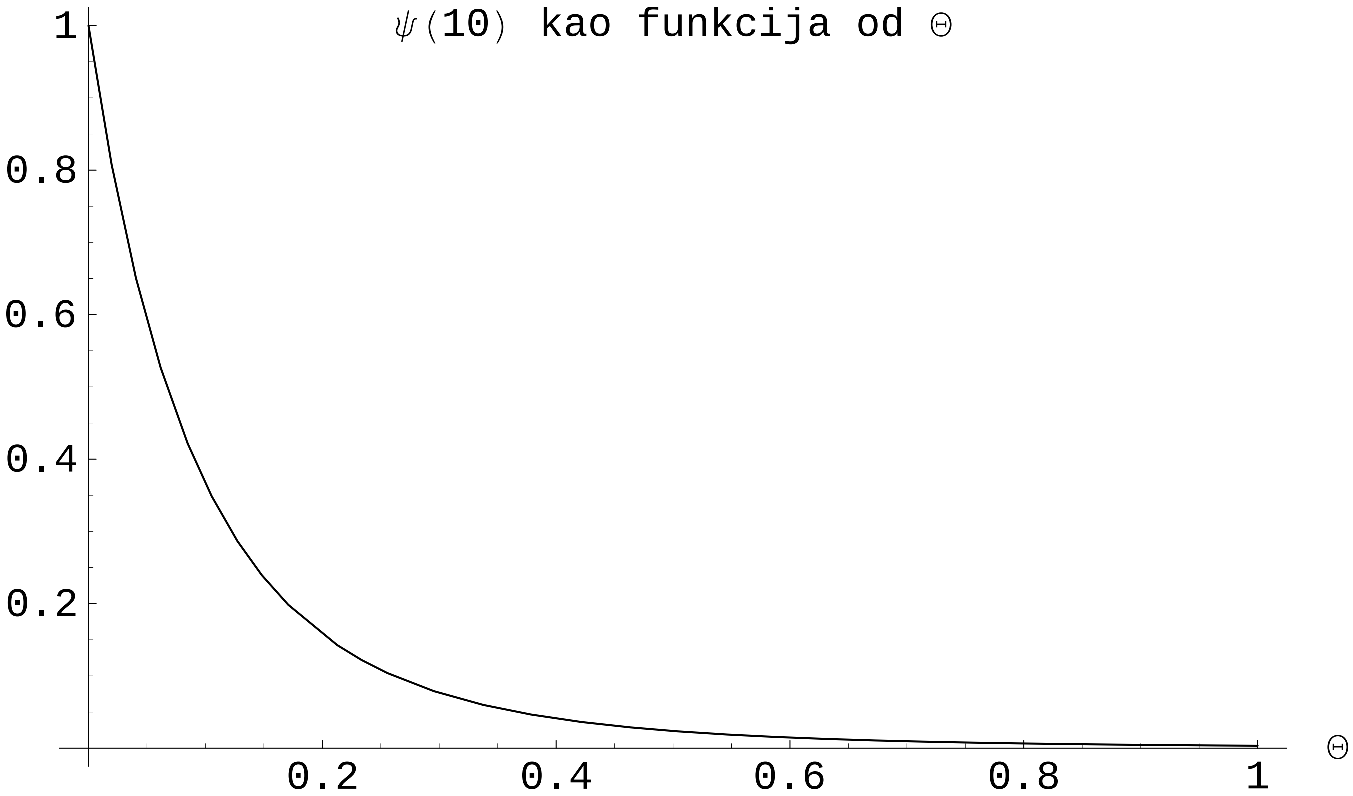
Primjetite da $\Psi(u,t)$ raste sa t, i asimptotski se približava $\Psi(u)$.



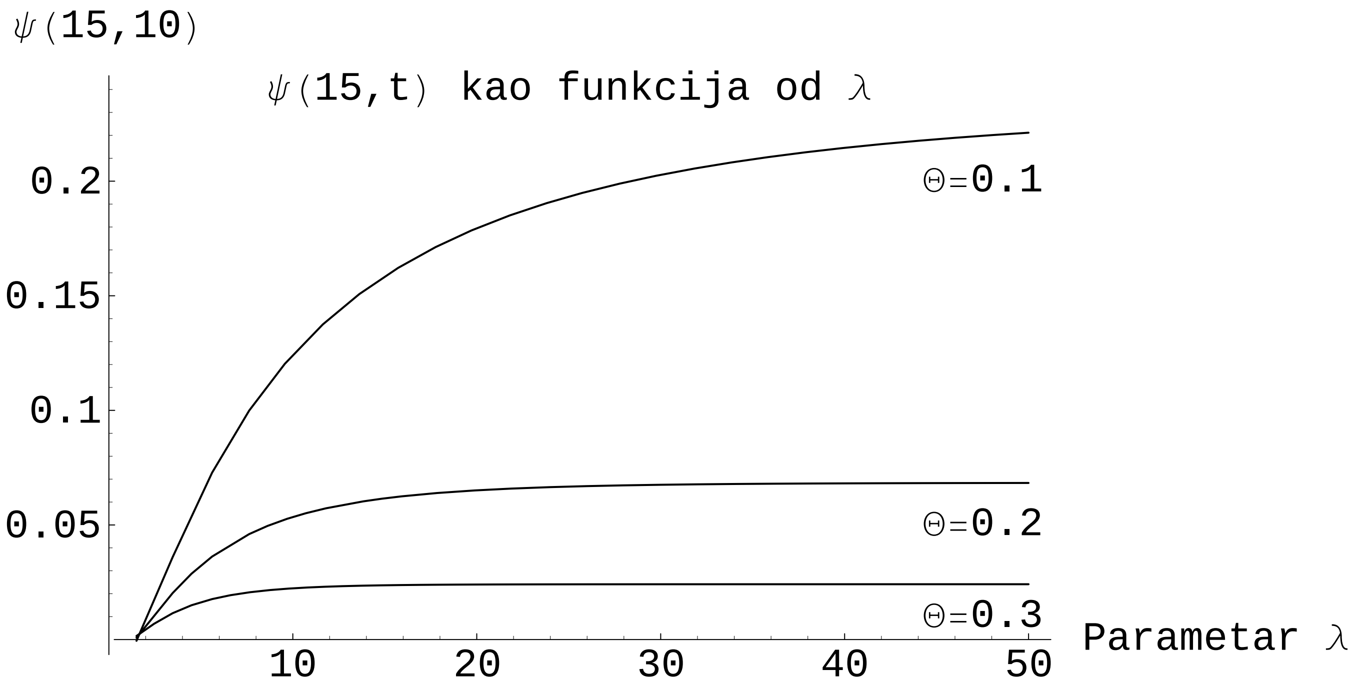
Primjetite da $\Psi(u,t)$ pada sa u, i ima sličan oblik za različite u kako raste t.



Primjetite da $\Psi(u,t)$ pada kako raste θ, no ima sličan oblik za različite θ kako raste t.



Primjetite posebno da je $\Psi(10)$ *padajuća funkcija od* θ *u našem primjeru.*



Primjetite da $\Psi(u,t)$ raste kako raste λ, no ima sličan oblik za različite θ kako raste λ.

Reosiguranje i nesolventnost

▷ Reosiguranje je jedna od opcija otvorenih osiguratelju ako želi smanjiti varijabilnost ukupnih šteta iz rizika. Očekujemo da smanjenje varijabilnosti poveća osigurateljevu sigurnost, te tako smanji i vjerojatnost propasti. Budući da je teško naći eksplicitna rješenja za vjerojatnost propasti, promatrat ćemo utjecaj reosiguranja na koeficijent prilagodbe.

▷ Maksimiziranje koeficijenta prilagodbe uz kvotno reosiguranje

Promotrimo prvo utjecaj kvotnog reosiguranja sa samopridržajem α na osigurateljev koeficijent prilagodbe. Označavat ćemo osigurateljev prihod od premija po jedinici vremena, prije plaćanja reosigurateljne premije, sa $(1+\theta)\lambda\mu_1$, što predstavlja očekivane ukupne štete po jedinici vremena za složen Poissonov proces s dodatkom na premiju θ.

Pretpostavimo da se reosigurateljna premija računa kao $(1+\theta')(1-\alpha)\lambda\mu_1$. Budući da reosiguratelj plaća omjer $1-\alpha$ svake štete,

$$(1-\alpha)\lambda\mu_1$$

predstavlja reosigurateljeve očekivane štete po jedinici vremena.
Zato je θ' dodatak na premiju koji koristi reosiguratelj. Osigurateljev prihod od premija nakon odbitka za reosiguranje je

$$[(1+\theta)-(1+\theta')(1-\alpha)]\lambda\mu_1\,. \tag{2.6}$$

Pretpostavit ćemo također da je $\theta' \geq \theta$. Kada to ne bi bilo ispunjeno, bilo bi moguće da osiguratelj prebaci cijeli rizik na reosiguratelja i ostvari siguran profit.

Da bi osigurateljev prihod od premija, nakon odbitka za reosiguranje, bio pozitivan mora biti

$$\begin{aligned} & 1+\theta > (1+\theta')(1-\alpha) \\ \text{t.j.} \quad & \alpha > (\theta'-\theta)(1+\theta')\,. \end{aligned}$$

Postoji, međutim, važnije ograničenje za osiguratelja. Osigurateljev prihod od premija, nakon odbitka za reosiguranje, po jedinici vremena mora premašiti očekivane ukupne štete po jedinici vremena. U suprotnom je propast u beskonačnom vremenu sigurna.
Nakon odbitka za reosiguranje, osigurateljeve očekivane ukupne štete po jedinici vremena su $\alpha\lambda\mu_1$. Stoga,

$$(1+\theta)-(1+\theta')(1-\alpha) > \alpha$$

Ili

$$\alpha > 1 - \frac{\theta}{\theta'}\,. \tag{2.7}$$

Gornja nejednakost specificira osigurateljev minimalni samopridržaj, budući da je

$$1 - \frac{\theta}{\theta'} \geq \frac{\theta' - \theta}{1 + \theta'} \quad \text{kada je} \quad \theta \leq \theta'$$

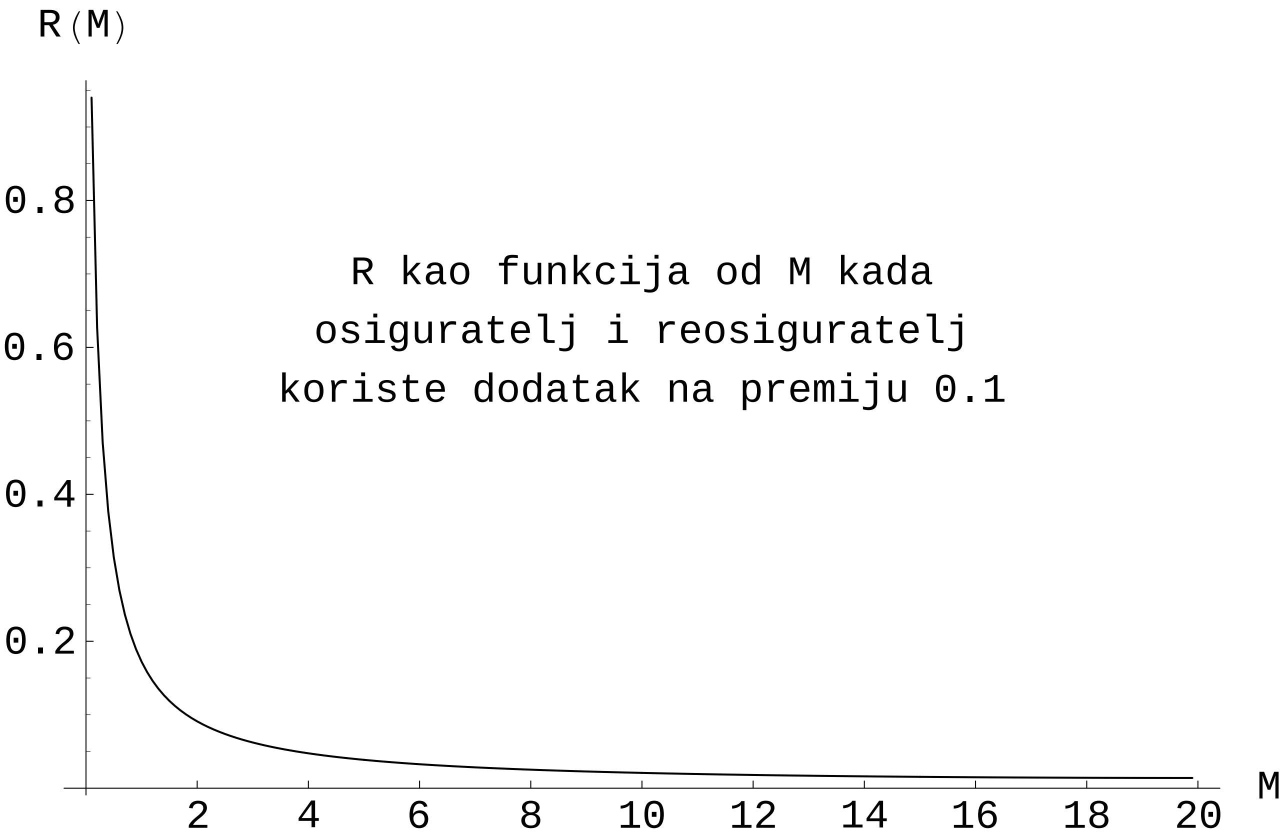
što je jedini zanimljiv slučaj. Ako su dodaci na premiju jednaki, tada nejednakost (2.7) postaje $\alpha > 0$. U tom slučaju postoji ugovor o dijeljenju rizika i moguć je svaki samopridržaj. Ako je, međutim, $\theta' > \theta$, tada osiguratelj mora zadržati dio rizika.

▷ Maksimiziranje koeficijenta prilagodbe uz reosiguranje viška štete

U ovom odjeljku razmatrat ćemo utjecaj reosiguranja viška štete na koeficijent prilagodbe. Sljedeće pretpostavke vrijede u odjeljku 5.3:

- osigurateljev prihod od premije (prije reosiguranja) po jedinici vremena je $(1+\theta)\lambda\mu_1$
- premija za reosiguranje po jedinici vremena je $(1+\theta')\lambda E(Z)$, gdje je $\theta' \geq \theta$ reosigurateljev dodatak na premiju, a $Z = \max(0, X - M)$

Osigurateljeve pojedinačne štete imaju distribuciju $Y = \min(X, M)$, a osigurateljev prihod od premije, nakon odbitka za reosiguranje $c^* = (1+\theta)\lambda\mu_1 - (1+\theta')\lambda E(Z)$.



Primjetite da koeficijent prilagodbe R raste k ∞ kako M pada u 0.