Linearna algebra 1, 2010/11
Druga domaća zadaća

1. Dokažite da je $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^4$ te mu odredite jednu bazu i dimenziju.

2. Neka je $A = \begin{bmatrix} i & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $M = \{T \in M_2(\mathbb{C}) : AT = TA\}$. Dokažite da je M potprostor od $M_2(\mathbb{C})$ te mu odredite jednu bazu i dimenziju.

3. Neka su $\{(1,3,2),(1,0,2)\}$ i $\{(1,3,4),(1,0,1)\}$ baze potprostora L, odnosno M, prostora $\mathbb{R}^3$. Nađite jednu bazu potprostora $L \cap M$.

4. Neka P^n označava vektorski prostor svih realnih polinom čiji stupanj je $\leq n$, pri čemu je $n \geq 2$. Neka su $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \neq t_2$. Dokažite da se svaki $p \in P^n$ može prikazati u obliku $p = p_1 + p_2$, gdje su $p_1, p_2 \in P^n$ takvi da je $p_1(t_1) = 0$ i $p_2(t_2) = 0$. Je li taj prikaz jedinstven?

   Uputa: promatrajte potprostore $M_i = \{q \in P_n : q(t_i) = 0\} \leq P^n$, i=1,2.

5. Neka za potprostore L i M vektorskog prostora V vrijedi $L \cap M = \{0\}$. Ako su skupovi $A = \{a_1, a_2, \cdots a_s\} \subset L$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_t\} \subset M$ linearno nezavisni, dokažite da je linearno nezavisna i njihova unija $A \cup B$.

Napomena. Rješenja treba predati na 1. kolokviju.