(2014.)

3. (a) Def. funkciju $\lambda$ formulom $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, gdje $\Omega(n)$ označava ukupan broj prostih djelitelja od $n$. Dokažite da je $\lambda$ multiplikativna funkcija.

(b) Dokažite da je $\displaystyle\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ potpun kvadrat} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Rj: (a) • $\lambda(1) = (-1)^0 = 1$

• $\lambda(mn) = (-1)^{\Omega(mn)}$ $\longleftarrow$ $(m,n) = 1$

$\lambda(m)\lambda(n) = (-1)^{\Omega(m)}(-1)^{\Omega(n)} = (-1)^{\Omega(m)+\Omega(n)}$

Imamo nekoliko slučajeva:

1° $m$ i $n$ imaju paran broj djelitelja, tj. $\Omega(m), \Omega(n)$ su parni
$\Rightarrow$ tada i $mn$ (zbog $(m,n)=1$) ima paran broj djelitelja $\Rightarrow (-1)^{\Omega(mn)} = (-1)^{\Omega(m)+\Omega(n)} = 1$

2° $\Omega(m)$ paran, $\Omega(n)$ neparan (slično)

3° $\Omega(m)$ neparan, $\Omega(n)$ paran (slično)

4° $\Omega(m), \Omega(n)$ neparni (slično)

$\Rightarrow$ $\lambda$ je multiplikativna funkcija

(b) Neka je prvo $n = m^2$, za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je $n = p_1^{2k_1} \cdots p_s^{2k_s}$. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po $s$.

BAZA: $s=1$, tj. $n = p^{2k}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{d|n} \lambda(d) = \underbrace{\mu(1)}_{=(-1)^0=1} + \underbrace{\mu(p)}_{=(-1)^1=-1} + \underbrace{\mu(p^2)}_{=(-1)^2=1} + \cdots + \underbrace{\mu(p^{2k-1})}_{=(-1)^{2k-1}=-1} + \underbrace{\mu(p^{2k})}_{=(-1)^{2k}=1} = 1$

PRETPOSTAVKA: Neka tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n$ s brojem prostih faktora $< s$.

KORAK: Neka je sada $n = p_1^{2k_1} \cdots p_s^{2k_s}$, $s > 1$.

$$\sum_{d|n} \lambda(d) \underset{(d_1,d_2)=1}{=} \sum_{d_1|p^{2k_1}} \sum_{d_2|p_2^{2k_2}\cdots p_s^{2k_s}} \lambda(d_1 d_2) = (\lambda \text{ je multiplikativna}) = \sum_{d_1|p^{2k_1}} \sum_{d_2|p_2^{2k_2}\cdots p_s^{2k_s}} \lambda(d_1)\lambda(d_2) =$$

$$= \underbrace{\sum_{d_1|p^{2k_1}} \lambda(d_1)}_{\substack{=1 \text{ zbog} \\ \text{baze indukcije} \\ (*)}} \cdot \underbrace{\sum_{d_2|p_2^{2k_2}\cdots p_s^{2k_s}} \lambda(d_2)}_{\substack{=1 \text{ zbog pretpostavke} \\ \text{indukcije}}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Neka je sada $n \neq m^2$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Ovo se isto može dokazati indukcijom, samo modificiramo gornju indukciju td u bazi imamo $p^{2k-1}$ pa suma dođe 0, a u koraku BSO pretpostavimo da je $p_1$ s neparnom potencijom (takav mora postojati jer je $m^2 \neq n, \forall m$) pa član $(*)$ u koraku dođe $=0$, pa je cijela suma jednaka 0.

Dakle,
$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ potpun kvadrat} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(2015.)

3\. Neka je $K: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcija def. sa $K(n) = \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} \mid k^2 \mid n\}$.

(a) Je li $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sum_{d \mid n} K(d)$ multiplikativna?

(b) Dok. da je $$\sum_{d \mid n} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ kvadrat prirodnog broja} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

RJ: (a) • $f(1) = K(1) = 1$

• $(m, n) = 1$

$d_1$ ide po svim pozitivnim djeliteljima od $m$
$d_2$ ide po svim pozitivnim djeliteljima od $n$ $\Big\} \overset{(m,n)=1}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}}$ $d_1 d_2$ ide po svim pozitivnim djeliteljima od $mn$.

$$f(m) f(n) = \sum_{d_1 \mid m} K(d_1) \sum_{d_2 \mid n} K(d_2) = \sum_{d_1 \mid m} \sum_{d_2 \mid n} K(d_1) K(d_2) \underset{(d_1, d_2) = 1}{=} \sum_{d_1 \mid m} \sum_{d_2 \mid n} K(d_1 d_2) \overset{(*)}{=} \sum_{d_1 d_2 \mid mn} K(d_1 d_2) = \left(\begin{matrix}\text{oznaka} \\ d := d_1 d_2\end{matrix}\right) =$$

$$= \sum_{d \mid mn} K(d) = f(mn)$$

$\Rightarrow$ $f$ je multiplikativna

(b) Neka je prvo $n = m^2$, kvadrat nekog prirodnog broja. Dokažimo da je $\sum_{d \mid n} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) = 1$.

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\substack{d \mid n \\ (d \text{ je kv. slobodan})}} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) + \underbrace{\sum_{\substack{d \mid n \\ (d \text{ nije kv. slobodan})}} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right)}_{=0}$$

$= 0$ jer je $\mu(d) = 0$ ako $d$ nije kv. slobodan

$n = p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s}$.

Indukcijom po $s$ (po broju prostih djelitelja) ćemo pokazati da je $\sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ kv. slob}}} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) = 1$

BAZA: $s = 1$, tj. $n = p^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$.

U ovom slučaju je $$\sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ kv. slob}}} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) = \underbrace{\mu(1)}_{=1} K(\overset{p^{2k}}{\overset{\parallel}{n}}) + \underbrace{\mu(p)}_{=-1} K\left(p^{2k-1}\right) =$$

$$= K(p^{2k}) - \underbrace{K\left(p^{2k-1}\right)}_{} = K(p^{2k}) - (K(p^{2k}) - 1) = 1$$

ovo je jednako $K(p^{2k}) - 1$ jer imamo samo jednog djelitelja manje (oblika $k^2$) od $p^{2k-1}$ nego od $p^{2k}$, a to je $p^{2k}$

PRETPOSTAVKA: Pretp. da tvrdnja vrijedi za sve $n$ s brojem prostih djelitelja $< s$.

KORAK: Neka je sada $n = p_1^{2k_1} \cdots p_s^{2k_s}$, $s > 1$.

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ d \text{ kv. slob}}} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1 \mid p_1^{2k_1}} \sum_{\substack{d_2 \mid p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s} \\ d_1 \text{ i } d_2 \text{ kv. slobodni}}} \mu(d_1 d_2) K\left(\frac{\overset{p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s}}{n}}{d_1 d_2}\right) = (\mu \text{ i } K \text{ su multiplikativne}) =$$

$$= \sum_{d_1 \mid p_1^{2k_1}} \sum_{\substack{d_2 \mid p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s} \\ d_1 \text{ i } d_2 \text{ kv. slobodni}}} \mu(d_1) \mu(d_2) K\left(\frac{p_1^{2k_1}}{d_1}\right) K\left(\frac{p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s}}{d_2}\right) = \left(\begin{matrix}\text{ako } d_1 \mid p_1^{2k_1} \text{ i } d_1 \text{ je kv. slobodan,} \\ \text{onda je } d_1 \in \{1, p_1\}.\end{matrix}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{d_2 | p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s} \\ d_2 \text{ kv. slob}}} \underbrace{\mu(1)}_{=1} \mu(d_2) K(p_1^{2k_1}) K\left(\frac{p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s}}{d_2}\right) + \sum_{\substack{d_2 | p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s} \\ d_2 \text{ kv. slob}}} \underbrace{\mu(p_1)}_{=-1} \mu(d_2) \underbrace{K(p_1^{2k_1-1})}_{=K(p_1^{2k_1})-1} K\left(\frac{p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s}}{d_2}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(K(p_1^{2k_1}) - (K(p_1^{2k_1}) - 1)\right)}_{=1} \underbrace{\sum_{\substack{d_2 | p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s} \\ d_2 \text{ kv. slob}}} \mu(d_2) K\left(\frac{p_2^{2k_2} \cdots p_s^{2k_s}}{d_2}\right)}_{=1 \text{ po pretp. indukcije}} = 1.$$

Neka je sada $n \neq m^2, \forall m \in \mathbb{N}$. Sada je

$$\sum_{d|n} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) = \underbrace{\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ kv. slob.}}} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right)}_{\substack{\text{želimo da je ovo} \\ =0}} + \underbrace{\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ nije kv. slob.}}} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right)}_{=0 \text{ jer } \mu(d)=0,\ \forall \text{takav } d}$$

ovo isto možemo pokazati indukcijom, analogno prethodnom slučaju. U bazi će doći da je $K(p^k) = K(p^{k-1})$ pa će sve doći $=0$,

a u koraku indukcije pretpostavljamo BSO da je $p_1$ s neparnom potencijom (takav $p$ sigurno postoji jer $n \neq m^2$) pa je onda $K(p_1^{k_1}) = K(p_1^{k_1 - 1})$ pa će sve pokrati i dođe 0.

Dakle,
$$\sum_{d|n} \mu(d) K\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & n = m^2, \text{ za neki } m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(2016.)

3. Neka je $H:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ def. sa $H(n)=\tau(n)\cdot\left(\sum_{d|n}\frac{1}{d}\right)^{-1}$.

(a) Dokažite da je $H$ multiplikativna.

(b) Odredite sve $n\in\mathbb{N}$ td $H(n)\le 2$.

Rj. (a) $\tau(n)=\sum_{d|n}1$ = broj djelitelja od $n$

$$H(n)=\tau(n)\cdot\left(\sum_{d|n}\frac{1}{d}\right)^{-1}=\tau(n)\cdot\frac{1}{\sum_{d|n}\frac{1}{d}}=\tau(n)\cdot\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\sum_{d|n}\frac{n}{d}\right)}=\tau(n)\cdot\frac{n}{\underbrace{\sum_{d|n}\frac{n}{d}}_{=:f(n)}}$$

$f(n)=\sum_{d|n}\frac{n}{d}$, Tvrdimo: $f$ je multiplikativna.

- $f(1)=\frac{1}{1}=1$
- $(m,n)=1$

$$f(mn)=\sum_{d|mn}\frac{mn}{d}\underset{\uparrow}{=}\sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n}\frac{mn}{d_1d_2}=\sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n}\frac{m}{d_1}\frac{n}{d_2}=\sum_{d_1|m}\frac{m}{d_1}\sum_{d_2|n}\frac{n}{d_2}=f(m)f(n)$$

( $(m,n)=1$ Ako $d_1$ prolazi djeliteljima od $m$, $d_2$ prolazi djeliteljima od $n$ $\overset{(m,n)=1}{\Longrightarrow}$ $d_1d_2$ prolazi djeliteljima od $mn$ )

$\Rightarrow f$ je multiplikativna.

Sada je $H(n)=\tau(n)\cdot\frac{n}{f(n)}$ ← multiplikativna, multiplikativna, multiplikativna, pa je i $H$ multiplikativna.

(b) Želimo naći sve $n\in\mathbb{N}$ td $H(n)=\tau(n)\cdot\frac{n}{f(n)}\le 2$.

Neka je $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ rastav od $n$ na proste faktore.

$$H(n)=H(p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k})\underset{\uparrow}{=}\prod_{i=1}^{k}H(p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{k}\tau(p_i^{\alpha_i})\frac{p_i^{\alpha_i}}{f(p_i^{\alpha_i})}=$$

$H$ je multiplikativna

$\left[\begin{array}{l}\text{djelitelji od } p_i^{\alpha_i} \text{ su } 1,p_i,p_i^2,\dots,p_i^{\alpha_i}\\ \Rightarrow \tau(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i+1,\\ \quad f(p_i^{\alpha_i})=1+p_i+p_i^2+\dots+p_i^{\alpha_i}=\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\end{array}\right]=$

$$=\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)\frac{p_i^{\alpha_i}}{\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-p_i^{\alpha_i}}{p_i^{\alpha_i+1}-1}\cdot(\alpha_i+1)\ge\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)\frac{p_i^{\alpha_i+1}-p_i^{\alpha_i}}{p_i^{\alpha_i+1}}=$$

$$=\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)\frac{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)}{p_i^{\alpha_i+1}}=\boxed{\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)\frac{p_i-1}{p_i}}^{(*)}=\tau(n)\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i-1}{p_i}\ge\left[\begin{array}{l}\frac{p_i-1}{p_i}\text{ je strogo rastuća funkcija, a za}\\ p_i=3 \text{ je } \frac{p_i-1}{p_i}=\frac{2}{3}\end{array}\right]\ge$$

$$\ge\tau(n)\prod_{i=1}^{k}\frac{2}{3}=\tau(n)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k}=(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k},\ \text{za } p_i\ne 2.$$

Ako je $\alpha_i\ge 2$, $\forall i$, tada je $\alpha_i+1\ge 3$ pa je

$H(n)\ge 3^k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k=2^k$. Dakle, jedine moguće potencije uz neparne proste brojeve su 0 i 1.

Preostaju nam mogućnosti: $n=2^{\alpha_1}p_2\cdots p_k$.

ii) $H(n) \geq (*)$ gledamo što bi se dogodilo da stavimo $p_1 = 2$, za neki $i$.

Tada je $(\alpha_i+1)\frac{p_i-1}{p_i} = (\alpha_i+1)\frac{1}{2} > 2 \iff \alpha_i > 3$, pa znamo da je $\alpha_i \in \{0,1,2,3\}$, tj. mogući $n$ su sada oblika $n = 2^{\alpha_1} p_2 \cdots p_k$, $\alpha_i \in \{0,1,2,3\}$

(Vrijedi: $(\alpha_i+1)\frac{p_i-1}{p_i} \geq 1$, $\forall i$, te je $H$ multiplikativna fja. Iz toga možemo zaključiti da ako je $(\alpha_i+1)\frac{p_i-1}{p} > 2$, onda je i $H(n) > 2$. $(\Delta)$)

Neka je sada $n = p_1 \cdots p_k$. $(p_i \neq 2)$ Želimo pokazati da je $k=1$.

$$H(n) = H(p_1\cdots p_k) \geq \prod_{i=1}^{k}\left(2\cdot\frac{p_i}{p_i+1}\right) \geq \left[\begin{array}{l} p_i \geq i+2, \quad f(x)=\frac{x}{x+1} \text{ je rastuća pa je} \\ f(p_i) \geq f(i+2), \text{ tj. } \frac{p_i}{p_i+1} \geq \frac{i+2}{i+3} \end{array}\right] \geq \prod_{i=1}^{k} 2\cdot\frac{i+2}{i+3} =$$

$$= 2^k \prod_{i=1}^{k}\frac{i+2}{i+3} = 2^k\cdot\frac{1+2}{1+3}\cdot\frac{\cancel{2+2}}{\cancel{2+3}}\cdot\frac{\cancel{3+2}}{\cancel{3+3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{k-1+2}}{\cancel{k-1+3}}\cdot\frac{\cancel{k+2}}{k+3} = 2^k\cdot\frac{3}{k+3} > 2, \text{ za } k \geq 2.$$

Dakle, $k \leq 1$.

Sada su (zbog $(\Delta)$) jedine preostale mogućnosti sljedeće: $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, $\alpha_1 \in \{0,1,2,3\}$, $\alpha_2 \in \{0,1\}$

Za $\alpha_1 = 3$ imamo: $H(2^3) = H(8) = 4\cdot\frac{8}{14} = \frac{32}{14} > 2$. Dakle $\alpha_1 \neq 3$.

Preostalo je: $n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, $\alpha_1 \in \{0,1,2\}$, $\alpha_2 \in \{0,1\}$.

Ako je $\alpha_2 = 0$, izravnom provjerom dobivamo da je $H(1), H(2), H(4) < 2$ ✓

Ako je $\alpha_1 = 1$, provjeravamo:

- $n = 4p \Rightarrow H(n) = (2+1)\frac{2^3-2^2}{2^3-1} + (1+1)\frac{p^2-p}{p^2-1} = \frac{3\cdot 4}{7}\cdot 2\cdot\frac{p(p-1)}{(p-1)(p+1)} = \frac{3\cdot 4\cdot 2}{7}\cdot\frac{p}{p+1} = \frac{24}{7}\cdot\frac{p}{p+1} \geq$
  $\geq 3\left(\frac{p}{p+1}\right) > 3\cdot\frac{2}{3} = 2$. Dakle ovo nije mogući slučaj.
  $\left(\frac{p}{p+1}\right) \geq \frac{2}{3}$ za $p \geq 2$, fja je strogo rastuća

- $n = 2p \Rightarrow H(2p) = (1+1)\frac{2^2-2}{2^2-1}\cdot 2\frac{p}{p+1} = \frac{8}{3}\left(\frac{p}{p+1}\right) > 2$ za $p \geq 5$ (rastuća fja)
  Za $p=3$ je $n=6$ i $H(6) < 2$ ✓

- $n = p \Rightarrow H(p) = 2\cdot\frac{p^2-p}{p^2-1} = 2\underbrace{\left(\frac{p}{p+1}\right)}_{<1} < 2$

Dakle, $H(n) \leq 2$ za $n = 1,2,4,6$ ili $n = p$ i $p$ neparan prost broj.

(2017.)

3. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \lfloor \sqrt{4n} \rfloor - \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor$. Je li $f$ multiplikativna?

Rj. • $f(1) = \lfloor \sqrt{4} \rfloor - \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 2 - 1 = 1$

• Prvo ćemo pokazati sljedeće:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ je kvadrat nekog prirodnog broja} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Iz ovoga će lako slijediti da je $f$ multiplikativna.

Neka je prvo $n = m^2$. Tada je $\lfloor \sqrt{4n} \rfloor = \lfloor \sqrt{4m^2} \rfloor = 2m$. Pokažimo još da je $\lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor = 2m-1$.

Vrijedi: $\sqrt{4n-1} < \sqrt{4n} = 2m \Rightarrow \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor < 2m$ (*)

nejednakost je stroga jer je $2m \in \mathbb{N}$, a $\sqrt{4n-1} < 2m$.

Nadalje,

$$\sqrt{4n-1} = \sqrt{4m^2-1} > \sqrt{(2m-1)^2} = 2m-1, \text{ pa je } \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor \geq 2m-1 \quad (**)$$

jer $4m^2 - 1 > (2m-1)^2$, za $m \in \mathbb{N}$

Sada iz (*) i (**) imamo $2m-1 \leq \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor < 2m \Rightarrow \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor = 2m-1$.

$\Rightarrow$ za $m^2 = n$ je $f(n) = \lfloor \sqrt{4n} \rfloor - \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor = 2m - (2m-1) = 1$.

Neka sada $n$ nije potpun kvadrat. Tada je $m^2 \leq 4n-1 < 4n \underset{(\Delta)}{<} (m+1)^2$, za neki $m \in \mathbb{N}$, pa je

$$\underbrace{\lfloor \sqrt{m^2} \rfloor}_{=m} \leq \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n} \rfloor \leq \underbrace{\lfloor \sqrt{(m+1)^2} \rfloor}_{=m+1}$$

Još bismo htjeli da je ovdje stroga nejednakost.

Iz $(\Delta)$ znamo: $4n < (m+1)^2 \Rightarrow \sqrt{4n} < m+1 \Rightarrow \lfloor \sqrt{4n} \rfloor < m+1$.

$\Rightarrow m \leq \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n} \rfloor < m+1$

$\Rightarrow m \leq \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n} \rfloor \leq m$

$\Rightarrow \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n} \rfloor = m$

$\Rightarrow$ za $n$ koji nije potpun kvadrat vrijedi $f(n) = \lfloor \sqrt{4n} \rfloor - \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor = m - m = 0$.

Dakle,

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = m^2, m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Neka su sada $m, n \in \mathbb{N}$ td $(m,n) = 1$. Želimo: $f(mn) = f(m)f(n)$.

1° $mn$ je potpun kvadrat $\xRightarrow{(m,n)=1}$ $m$ i $n$ su potpuni kvadrati, pa je $f(mn) = 1$ i $f(m)f(n) = 1 \cdot 1$

2° $mn$ nije potpun kvadrat $\xRightarrow{(m,n)=1}$ barem jedan od $m$ i $n$ nije potpun kvadrat, pa je $f(mn) = 0$ i $f(m)$ ili $f(n) = 0$ pa je $f(m)f(n) = 0$

U oba slučaja je $f(mn) = f(m)f(n)$.

$\Rightarrow$ funkcija $f$ je multiplikativna.

2018.
Dokažite ili opovrgnite:

(a) Neka je $f$ multiplikativna funkcija takva da je $\lim_{m\to\infty} f(p^m) = 0$, za svaki prosti broj p. Tada je
$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

(b) Neka je $f$ multiplikativna funkcija i neka je $S$ skup svih potencija prostih brojeva, tj
$$S = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, ...\}$$
i neka je
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in S}} f(n) = 0.$$
Tada je
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in \mathbb{N}}} f(n) = 0.$$

RJ: (a) Neka je $f$ multiplikativna funkcija, $f(p^m) = \dfrac{1}{m}$. Za nju je očito $\lim_{m\to\infty} f(p^m) = 0$, za svaki prost broj $p$. No, budući da je vrijednost of $f$ u prostim brojevima jednaka $f(p) = 1$, za proizvoljno velik produkt $n$ prostih brojeva s potencijama 1 vrijedi da je $f(n) = 1$, pa očito traženi limes nije jednak nuli.

(b) Neka je $0 < \epsilon < 1$. Definiramo $S_0 = \{p_i^{a_i} : f(p_i^{a_i}) \geq 1\}$ (to je konačan skup zbog pretpostavke). Neka je sada $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall p_i^{a_i} \geq n_0$ vrijedi
$$f(p_i^{a_i}) = \frac{\epsilon}{\prod_{x\in S_0} x}.$$
Stavimo
$$n_1 = \prod_{p_i^{a_i} < n_0} p_i^{a_i}.$$
Neka je sada $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Za $n \geq n_2$ imamo $n = p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}$. Ne mogu si $p_i^{a_i}$ biti manji od $n_0$ zbog $n \geq n_1$. BSO neka je $p_1^{a_1} \geq n_0$. Sada koristeći multiplikativnost imamo
$$f(n) = f(p_1^{a_1}) \cdot f\left(\prod_{p_i^{a_i}\in S_0} p_i^{a_i}\right) \cdot f\left(\prod_{p_i^{a_i}\notin S_0} p_i^{a_i}\right) < f(p_1^{a_1}) \cdot \prod_{p_i^{a_i}\in S_0} f\left(p_i^{a_i}\right) \leq f(p_1^{a_1}) \cdot \prod_{x\in S_0} x < \frac{\epsilon}{\prod_{x\in S_0} x} \cdot \prod_{x\in S_0} x = \epsilon.$$

2018. (popravni)

Zadana je funkcija $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{ako n nije kvadratno slobodan} \\ (-1)^k, & \text{ako je } n = p_1 \cdot ... \cdot p_k \end{cases}$$

(a) Je li $\mu$ multiplikativna funkcija?

(b) Dokažite da je

$$\sum_{d^2|n} \mu(d) = (\mu(n))^2 .$$

RJ:

(a) Je.

(b) Za $n$ koji je kvadratno slobodan vrijedi da je desna strana jednaka $(\mu(n))^2 = 1$, dok na lijevoj strani suma ima samo jedan član, za $d = 1$, pa je lijeva strana jednaka $\mu(1) = 1$.

Ako $n$ nije kvadratno slobodan, stavimo $n = p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_k^{a_k} \cdot p_{k+1} \cdot ... \cdot p_m$, $a_i \geq 2$.

Na desnoj strani imamo $(\mu(n))^2 = 0$, po definiciji od $\mu$.

Na lijevoj strani gledamo samo članove sume koji su različiti od nule, tj. gledamo sve kvadratno slobodne $d$ takve da $d^2|n$. Tada očito $p_i$ ne dijeli $d$, za $i = k+1, ..., m$. Vrijedi: $d = p_{i_1} \cdot ... \cdot p_{i_l}$, gdje su $p_{i_1}, ..., p_{i_l} \in \{p_1, ..., p_k\}$. Sada je suma jednaka

$$(-1)^0 \cdot \binom{k}{0} + (-1)^1 \cdot \binom{k}{1} + (-1)^2 \cdot \binom{k}{2} + (-1)^3 \cdot \binom{k}{3} + ... + (-1)^k \binom{k}{k} = \pm(1-1)^k = 0.$$