

4. Modeli doživljenja

1. Pokažite da za uvjetni intenzitet smrtnosti vrijedi

$$\mu(t|x) = \mu(t + x).$$

2. Pokažite da vrijedi:

$$(a) \quad {}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds},$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} {}_t p_x = (\mu_x - \mu_{x+t}) {}_t p_x,$$

$$(c) \quad {}_{s+t} p_x = {}_t p_{x+s} \cdot {}_s p_x.$$

3. Pretpostavimo da vrijedi de Moivreov zakon smrtnosti, gdje je $\omega > 0$. Nađite \bar{F}_T , μ i $\text{Var } T_{16}$, ako se zna da je $\mathbb{E} T_{16} = 36$.

4. Neka je

$$\bar{F}(t|x) = \left(\frac{100 - x - t}{100 - x} \right)^2, \quad 0 \leq t \leq 100 - x.$$

Nađite $\text{Var } T_x$.

5. Na slučajan način biramo dvije osobe jednake životne dobi iz dane populacije. Pretpostavimo da je jedna osoba pušač, a druga ne. Neka je

$\mu_x, x > 0$ intenzitet smrtnosti za nepušače,

$c\mu_x, x > 0$ intenzitet smrtnosti za pušače, gdje je $c > 1$.

Izračunajte vjerojatnost da će pušač nadživjeti nepušača.

6. Pretpostavimo da je životni vijek u populaciji A neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_A , a životni vijek u populaciji B neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_B . Neka je vjerojatnost da odaberemo osobu iz populacije A jednaka p (pa je tada vjerojatnost da odaberemo osobu iz populacije B jednaka $1 - p$). Odredite gustoću životnog vijeka slučajno odabrane osobe.

7. **(Teorem o lošoj sreći)** Neka je (X_n) niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s gustoćom f . Definiramo

$$T := \inf\{n \geq 2: X_n \geq X_1\}.$$

Nađite razdiobu od T i $\mathbb{E} T$.

8. Nađite izraze za ${}_t p_x$ i ${}_t q_x$ preko funkcije l_x .

9. Zakon smrtnosti je zadan funkcijom

$$l_x = \sqrt{121 - x}, \quad 0 \leq x \leq 121.$$

Izračunajte vjerojatnost da je osoba koja je doživjela dob od 21 godine živjela duže od 40, ali ne duže od 57 godina.

10. Zadana je tablica

x	e_x
75	10.5
76	10.0
77	9.5

Izračunajte vjerojatnost da osoba dobi od 75 godina doživi 77 godina.

11. Izrazite formulom i izračunajte koristeći LAT A1967-70 vjerojatnost da će osoba koja doživi 30 godina
- (a) doživjeti dob od 40 godina,
 - (b) umrijeti prije 40. godine,
 - (c) umrijeti nakon 60., ali prije 80. godine.
12. Odredite približno μ_{90} koristeći LAT A1967-70.
13. Uz pretpostavku o uniformnoj razdiobi smrti kroz godinu, izračunajte ${}_{0.25}q_{38.5}$ koristeći LAT A1967-70.
14. Skupi dio za vaš auto se na tržištu nalazi u dvije varijante: s vjerojatnošću p kupit ćete nelegalnu kopiju čiji je vijek trajanja $\text{Exp}(\mu)$, a s vjerojatnošću $1 - p$ legalnu kopiju s vijekom trajanja $\text{Exp}(\lambda)$. Pretpostavimo da je $\lambda < \mu$. Neka je T životni vijek ovako nabavljenog dijela. Ima li T razdiobu rastućeg hazarda? Što ako je $\lambda > \mu$?
15. Pretpostavimo da je dio iz Zad 14 doživio dob t . Kolika je vjerojatnost da je on nelegalan?
16. Pokažite da je negativna binomna razdioba razdioba rastućeg hazarda.
17. Za neprekidnu razdiobu F kažemo da je prosječno monotono rastućeg hazarda ako je

$$t \mapsto -\frac{\ln(\bar{F}(t))}{t}$$

rastuća funkcija. Pokažite tvrdnje:

- (a) Ako je F monotono rastućeg hazarda onda je i prosječno monotono rastućeg hazarda.
- (b) F je prosječno monotono rastućeg hazarda ako i samo ako je

$$(\bar{F}(t))^\alpha \leq \bar{F}(\alpha t), \quad \forall t > 0, \forall \alpha \in [0, 1].$$

18. Pretpostavimo da grupa osoba podliježe smrtnosti koja se između dobi 80 i 90 godina može pretpostaviti LAT A 1967-70 tablicom uz odbitak intenziteta smrtnosti u iznosu od 0.05 u dobi od 80 godina, pri čemu se taj odbitak povećava linearno do iznosa 0.15 u dobi od 90 godina. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana osoba starosti 80 godina doživi 85, ali ne i 90 godina.
19. Za osobu dobi od 55 godina pretpostavljamo da je izložena konstantnom intenzitetu smrtnosti $\mu = 0.02$ do dobi od 62 godine, nakon čega se pretpostavlja da je izložena intenzitetu smrtnosti prema LAT A 1967-70. Izračunajte
- vjerojatnost smrti prije navršene 60. godine,
 - vjerojatnost doživljenja dobi od 70 godina,
 - vjerojatnost smrti između 60. i 65. godine.

DZad Uz pretpostavku da LAT A 1967-70 slijedi *Gompertzov* intenzitet smrtnosti

$$\mu_x = Bc^x,$$

izračunajte c koristeći podatke l_{60} , l_{70} i l_{80} iz tablice.
(Rješenje: $c = 1.10194$)

DZad Ako je

$${}_n p_x = \frac{x}{n+x},$$

odredite μ_x .
(Rješenje: $\mu_x = x^{-1}$)

DZad Neka je

$$l_x = 100\sqrt{100-x}, 0 \leq x \leq 100.$$

Odredite μ_{84} približno i egzaktno
(Rješenje: egzaktno: 0.03125, približno: 0.03129 ili 0.03127)

DZad Pretpostavimo da je μ_{x+t} konstantan za $0 \leq t \leq 1$ i pretpostavimo da je $q_x = 0.16$. Odredite t takav da je ${}_t p_x = 0.95$.
(Rješenje: $t = 0.294$)