

2. Osnovne funkcije složenog ukamaćivanja

1. Klijent je u banci podigao kredit u iznosu 3 000 i otplaćuje ga u 15 godišnjih rata u iznosu od 500 od kojih prva dospijeva 5 godina od trenutka podizanja kredita. Nađite prinos ove transakcije.

2. Pokažite da vrijedi

(a)

$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}},$$

(b)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i},$$

(c)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1 + i)a_{\overline{n}|i},$$

(d)

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1 + i)s_{\overline{n}|i}.$$

3. Odredite konstantnu e.k.s. uz koju se iznos investiran na razdoblje od 11 godina utrostruči.

4. U zamjenu za jednokratnu uplatu u iznosu 1 000 banka nudi 3 mogućnosti:

(a) Jednokratna isplata u iznosu 1 330 nakon 3 godine.

(b) Jednokratna isplata u iznosu 1 550 nakon 5 godina.

(c) Četiri godišnje isplate u iznosu 425 od kojih prva dospijeva nakon 5 godina

Nađite prinose ovih transakcija. Pretpostavimo da investitor odabere (a) te da uplaćenu svotu reinvestira uz fiksnu kamatnu stopu. Kolika mora biti ta stopa da bi nakon 2 godine akumulacija iznosila 1 550? Pretpostavimo da investitor odabere (b) te da nakon isplate odluči kupiti prenumerando rentu plativu tijekom 4 godine. Kolika bi trebala biti kamatna stopa da bi godišnji iznos te rente bio 425?

5. Neka se u danom planu štednje plaća godišnje unaprijed u iznosu X tijekom n godina. Investitor zauzvrat dobiva m godišnjih isplata u iznosu Y s tim da prva isplata dospijeva 1 godinu nakon zadnje uplate.

(a) Napišite jednadžbu vrijednosti.

(b) Neka je $X = 1\,000$, $Y = 2\,000$, $n = 10$. Odredite prinos na transakciju za $m = 10$.

6. Postnumerando renta se plaća 20 godina:

- prvih 6 godina u iznosu 5
- daljnjih 9 godina u iznosu 7
- preostalih 5 godina u iznosu 10

Pokažite da je vrijednost rente u trenutku prve isplate

$$10a_{\overline{19}|} - 3a_{\overline{14}|} - 2a_{\overline{5}|} + 5.$$

7. Investitor uplaćuje 20 premija godišnje prenumerando. Nakon 20 godina primit će akumulirani iznos svojih uplata koji je izračunat po kamatama $i = 8\%$ za prvih 5 godina, $i = 6\%$ za sljedećih 7 godina te $i = 5\%$ za zadnjih 8 godina. Nađite iznos isplate ako je svaka uplata iznosila 100. Izračunajte prinos na transakciju.

8. U zamjenu za zajam u iznosu 100, dužnik treba platiti 110 nakon 7 mjeseci.

- (a) Nađite godišnju kamatnu stopu, godišnju diskontnu stopu i godišnji intenzitet kamate za ovu transakciju.
- (b) Ubrzo nakon posudbe, dužnik predlaže reprogramiranje i platio bi 50 nakon 7 mjeseci, a preostali iznos platio bi 6 mjeseci kasnije. Uz suglasnost druge strane i podrazumijevajući istu kamatnu stopu, odredite odgovarajući iznos druge uplate.

9. U zamjenu za uplatu 500 sada i uplatu 200 nakon 2 godine, investitor će dobiti 1000 nakon 5 godina od sada. Nađite prinos na transakciju.

10. Neka se u $t = 0$ investira iznos X i neka se na kraju svake godine tijekom n godina uprihodi jX te neka se u $t = n$ povuče početna investicija X . Nađite prinos na transakciju.

11. Investitor može birati između sljedeća dva plana štednje:

- (a) 10 godišnjih premija u iznosu 100 plativih unaprijed koje donose 1700 nakon 10 godina,
- (b) 15 godišnjih premija u iznosu 100 plativih unaprijed koje donose 3200 nakon 15 godina.

Koji plan nudi viši prinos?

12. (**Komercijalni diskont**) Zajmodavac temelji svoje kratkoročne transakcije na stopi komercijalnog diskonta D , ($0 < D < 1$). Ako je $0 < t \leq 1$, nudi se zajam $X(1 - Dt)$ u $t = 0$ u zamjenu za otplatu X u trenutku t . Za takvu transakciju za period $[0, t]$ treba izvesti izraz za efektivnu godišnju diskontnu stopu d preko D i t . Jasno je da d ovisi o t . Pokažite da d raste s t .

13. Pretpostavimo da imamo postnumerando rentu kod koje iznosi isplata čine aritmetički niz. Npr. neka je iznos prve uplate P , druge $P+Q$, treće $P+2Q$, itd. Izrazite sadašnju vrijednost ove rente pomoću $P, Q, a_{\overline{n}|}$ i $(Ia)_{\overline{n}|}$.
14. Promotrite godišnju postnumerando rentu kod koje prva isplata iznosi 500, a svaka sljedeća je za 200 veća od prethodne. Renta se isplaćuje tijekom 40 godina. Efektivna kamatna stopa je fiksna i iznosi 6%. Nađite vrijednost ove rente u trenutku prve isplate.

DZad Investitor će na poseban račun uplaćivati iznos 10 000 u 10 godišnjih rata. Zauzvrat, 1 godinu nakon zadnje uplate, počinje primati godišnju rentu u iznosu 15 000 tijekom 12 uzastopnih godina.

- (a) Odredite prinos na transakciju.
- (b) Podrazumijevajući kamatnu stopu impliciranu transakcijom, odredite trenutak u kojem bi temeljem izvršenih uplata umjesto ugovorene rente investitoru trebao biti isplaćen iznos 200 000.

DZad Dužnik treba posuđeni iznos od 3 000 otplatiti u iznosu 3 500 nakon 8 mjeseci. Pretpostavite fiksnu efektivnu kamatnu stopu i nađite efektivnu godišnju kamatnu stopu, efektivnu godišnju diskontnu stopu i godišnji intenzitet kamate za ovu transakciju.

Odmah nakon posudbe dužnik predlaže reprogramiranje otplate: platio bi 2 000 nakon 8 mjeseci, a drugu preostalu uplatu bi izvršio 2 godine kasnije. Uz suglasnost druge strane, podrazumijevajući istu kamatnu stopu, odredite iznos druge uplate.

DZad U zamjenu za jednokratnu uplatu u iznosu 1 000 banka nudi dvije opcije:

- (a) Jednokratnu isplate u iznosu 1 200 nakon 4 godine,
- (b) Četiri isplate u iznosu 500 na kraju 9. 10. 11. i 12. godine.

Nađite prinos na obje transakcije.

Pretpostavimo fiksnu efektivnu kamatnu stopu u periodu koji nastupa nakon 4. godine. Kolika mora biti ta stopa da bi akumulacija na kraju 12. godine bila jednaka za oba investicijska plana?

DZad Ako je

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 7.029584 \text{ i } \ddot{a}_{\overline{2n}|} = 10.934563,$$

nađite pripadu kamatnu stopu i n .

DZad Ako promatrate plan kao u zadatku 6, pokažite da su vrijednost plana u trenutku prve uplate i trenutku zadnje uplate redom dani sa

$$10\ddot{a}_{\overline{20}|} - 3\ddot{a}_{\overline{15}|} - 2\ddot{a}_{\overline{6}|}, \quad 5s_{\overline{20}|} + 2s_{\overline{14}|} + 3s_{\overline{5}|}.$$