1. Teorija kamatnih stopa

1. Pokažite da je za bilo koju vrijednost stope i akumulacija iznosa 1 nakon t godina uz jednostavnu kamatnu stopu veća (manja) od akumulacije iznosa 1 nakon t godina uz složenu kamatnu stopu za $0 < t < 1$ (za $t > 1$).

2. U nekoj godini intenzitet kamate je bio linearna funkcija vremena s vrijednostima 0.15 i 0.12 na početku i na kraju te godine. Nađite vrijednost nominalnih kamatnih stopa na početku te godine za transakcije plative tromjesečno, mjesečno i dnevno.

3. Banka isplaćuje kamate na depozite s varijabilnim intenzitetom kamate. Na početku godine investitor je uložio 20 000. Nakon pola godine akumulirana vrijednost je bila 20 596.21, a na kraju godine 21 183.7. Ako pretpostavimo da je intenzitet kamate linearna funkcija vremena (pri čemu vrijeme mjerimo od početka te godine), odredite

   (a) intenzitet kamate te godine,

   (b) akumuliranu vrijednost nakon 9 mjeseci.

4. Promotrimo sljedeću investiciju:

   - 1. 1. 2007. platimo 500
   - 1. 1. 2008. platimo 1000
   - 1. 1. 2009. dobijemo 400
   - 1. 1. 2010. dobijemo 1200

   Pretpostavimo da je efektivna kamatna stopa (e.k.s.) 3%. Isplati li se prihvatiti investiciju?

5. Dužnik u nekoj banci treba platiti 6280 za 4 godine, 8460 za 7 godina te 7350 za 13 godina. Ovaj plan se može reprogramirati tako da se odabere jedna od sljedeće dvije opcije:

   (a) jednokratna isplata za 5 godina,

   (b) jednokratna isplata ukupnog zaduženja 22 090 u odgovarajućem trenutku.

   Precizirajte program ponuđenih opcija ako je $\delta = 0.076961$.

6. Ako je intenzitet kamate $\delta(t)$ dan Stoodleyevom formulom

   $$\delta(t) = p + \frac{s}{1 + re^{st}},$$

   pronađite izraz za $v(t)$.

7. Neka je

$$\delta(t) = p + \frac{s}{1 + re^{st}},$$

pri čemu je p=0.058269, s=0.037041, $r = \frac{1}{3}$. Investitor će uplatiti 5 puta iznos 600 na početku 5 uzastopnih godina, prvi u $t = 0$. Zauzvrat može birati jednu od opcija:

   (a) isplatu ukupnog akumuliranog iznosa po isteku 5 godina,

   (b) seriju od 5 jednakih isplata, svaku u iznosu od 900 na početku 5 uzastopnih godina od kojih prva dospijeva 5 godina od sada.

   Koja opcija je povoljnija?

8. Zelimo dignuti kredit u iznosu 30 000 na 30 godina uz e.k.s. 6 %.

   (a) Koliko bi trebala iznositi godišnja rata za otplatu kredita ako je otplaćujemo u trenucima $t = 1, 2, \ldots, 30$?

   (b) Koliko iznosi dug nakon 5, odnosno 10 godina?

9. Intenzitet kamate $\delta(t)$ po godini u trenutku t je linearna funkcija prvih m godina (mjereno od $t = 0$), a nakon toga je konstantan na nivou dostignutom u trenutku m.

   (a) Nađite akumulaciju iznosa 1 u vremenskom intervalu $[0, n]$ izraženu preko n, m, $\delta(0)$, $\delta(m)$.

   (b) Izračuajte akumulaciju za konkretne podatke:

$$m = 16,\ \delta(0) = 0.08,\ \delta(16) = 0.048,\ n \in \{15, 40\}.$$

10. Neka je

$$v(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+t)(\alpha+t+1)},\ \ t \geq 0,\ \ \alpha > 0 \text{ konstanta.}$$

   (a) Odredite $\delta(t)$ i efektivnu kamatnu stopu $i(n)$ za period $[n, n+1]$.

   (b) Odredite sadašnju vrijednost $a(n)$ od n uzastopnih uplata, svake u iznosu 1 takvih da se k-ta uplata vrši u trenutku $t = k$.

   (c) Neka je $\alpha = 15$. Nađite iznos godišnje premije koja bi se plaćala godišnje unaprijed tijekom 12 godina i koja bi osigurala isplatu od 10 godišnjih isplata, svaku u iznosu od 1 800, pri čemu prva isplata dospijeva godinu dana nakon zadnje uplate.

   (d) U $t = 12$ odredite vrijednost svih uplata i isplata.

11. Investitor kupuje rentu koja se isplaćuje neprekidno n godina. Stopa isplate je linearna funkcija vremena.

    (a) Neka je I_r iznos isplaćen u r-toj godini, za $r = 1, 2, \ldots, n$. Izvedite izraz za stopu isplate u trenutku t po jedinici vremena (npr. godinama) u terminima I_1 i I_2. Nađite ukupni isplaćeni iznos do trenutka $t \leq n$.

    (b) Neka je intenzitet kamate po godini $\delta(t) = \delta$. Nađite sadašnju vrijednost rente u terminima I_1 i I_2.

    (c) Za $n = 20$, $I_2 = 1.07I_1$, $i = 6\%$ i sadašnju vrijednost rente 9047, nađite I_1 i iznos isplaćen u zadnjoj godini.

12. Neka je
$$\delta(t) = ae^{-bt}\,.$$

    (a) Odredite sadašnju vrijednost iznosa 1.

    (b) Pretpostavimo da je u 10 godina intenzitet kamate pao za 50 % i da je u trenutku $t = 0$ iznosio 0.10. Odredite sadašnju vrijednost 4 uzastopne godišnje uplate od po 1 000, pri čemu je prva uplata bila u $t = 1$.

DZad1 Početkom godine u nekoj banci je intenzitet kamate bio 0.15, polovinom godine 0.10 te na kraju godine 0.08. Nađite akumulirani iznos na kraju godine za investiciju 5 000 na početku godine uz pretpostavku da je intenzitet kamate te godine bio

(a) kvadratna funkcija,

(b) linearna funkcija u prvoj polovini te godine i (neka druga) linearna funkcija u drugoj polovini te godine.

(Rješenja: (a) 5 553.55 (b) 5 567.45)

DZad2 Neka je $\delta(t) = r + se^{-rt}$. Izračunajte sadašnju vrijednost iznosa 1 koji dospijeva u trenutku t.

(Rješenje: $e^{-\frac{s}{r}-rt+\frac{s}{r}e^{-rt}}$)