Vjerojatnost

primjeri i zadaci

Ivana Geček, Ante Mimica, Azra Tafro

27. listopada 2009.

Sadržaj

1

Vjerojatnost

Neka je Ω neprazan skup.

Zadatak 1.1 Dokažite da za $A_n \subseteq \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ vrijede **de Morganovi** zakoni:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c, \qquad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

Zadatak 1.2 Neka je $A \subseteq \Omega$ i $B_n \subseteq \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite:

$$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n).$$

Zadatak 1.3 Dokažite da za $A, B, C \in \Omega$ vrijedi:

(a) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$, $A \triangle B = B \triangle A$, $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle A^c = \Omega$, $A \triangle \emptyset = A$,

(b) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$,

(c) $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$,

(d) $A \triangle B = C \iff A = B \triangle C$.

Definicija. Familija $\mathcal{F}$ podskupova of Ω je σ-**algebra** ako vrijedi:

(F1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(F2) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$,

(F3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Zadatak 1.4 Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra i $A, B \in \mathcal{F}$. Dokažite da je tada i

$$A \cap B,\ A \setminus B,\ A \triangle B \in \mathcal{F}.$$

Zadatak 1.5 Nađite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži $A \subseteq \Omega$.

Zadatak 1.6 Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω i $B \in \mathcal{F}$. Dokažite da je

$$\mathcal{G} = \{C \subseteq \Omega \colon \text{ postoji } A \in \mathcal{F} \text{ takav da je } C = A \cap B\}$$

σ-algebra na B.

Zadatak 1.7 Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Koje od sljedećih familija podskupova od Ω su σ-algebre na Ω

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}\},\\
&\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}\{1, 2\}, \{3, 4\}\},\\
&\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}?
\end{aligned}$$

Zadatak 1.8 Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nađite najmanju σ-algebru $\mathcal{F}$ na Ω koja sadrži skupove

$$\{1\},\ \{1, 2\},\ \{1, 2, 3\},\ \{1, 2, 3, 4\}.$$

Zadatak 1.9 Neka su A, B, C događaji vezani uz neki slučajni pokus. Prikažite pomoću A, B i C sljedeće događaje:

(a) dogodio se barem jedan gornji događaj,

(b) dogodio se točno jedan gornji događaj,

(c) dogodila su se točno dva gornja događaja,

(d) nije se dogodilo više od dva gornja događaja.

Zadatak 1.10 Slučajni pokus se sastoji od bacanja dviju igraćih kocki. Odredite prostor elementarnih događaja Ω. Ako su

$$\begin{aligned}
E &= \{\text{zbroj brojeva na kockama je neparan}\},\\
F &= \{\text{barem jedna kocka je pala na } 1\},\\
G &= \{\text{zbroj brojeva na kockama je } 5\},
\end{aligned}$$

prikažite pomoću elementarnih događaja sljedeće događaje:

$$F,\ G,\ E \cap F,\ F \cap G \text{ i } E \cap F \cap G.$$

Zadatak 1.11 Slučajni pokus se sastoji od bacanja novčića sve dok ne padne pismo. Odredite prostor elementarnih događaja i prikažite pomoću njih sljedeće događaje

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{potreban je neparan broj bacanja do pojave pisma}\},\\
B &= \{\text{glava je pala barem 5 puta zaredom}\}.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.12 Richard, Lancelot i Mordred bacaju redom novčić. Pobjednik je onaj kome prvo padne pismo. Odredite prostor elementarnih događaja i prikažite pomoću njih sljedeće događaje

$$\begin{aligned}A &= \{\text{Lancelot je pobijedio}\},\\ B &= \{\text{nitko nije pobijedio}\},\\ C &= \{\text{Richard ili Mordred su pobijedili}\}.\end{aligned}$$

Definicija. Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algerba na Ω. **Vjerojatnost** je funkcija

$$\mathbb{P} \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

sa sljedećim svojstvima:

(P1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$,

(P2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(P3) $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktni $\implies$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zovemo **vjerojatnosni prostor**.

Zadatak 1.13 Bacamo dvije simetrične kocke. Izračunajte vjerojatnost događaja:

$$\begin{aligned}A &= \{\text{suma brojevana kockama ja 7 ili 11}\},\\ B &= \{\text{brojevi na kockama nemaju zajedniškog djelitelja većeg od 1}\},\\ C &= \{\text{produkt brojeva na kockama je neparan}\},\\ D &= \{\text{jedan broj na kocki dijeli drugi}\}.\end{aligned}$$

Zadatak 1.14 Simetrični novčić se baca četiri puta. Izračunajte vjerojatnost da padnu

(a) barem tri pisma,

(b) točno tri pisma,

(c) barem tri pisma zaredom,

(d) točno tri pisma zaredom.

Zadatak 1.15 Bacamo n simetričnih kocki. Izračunajte vjerojatnost da produkt dobivenih brojeva

(a) bude djeljiv s 5,

(b) ima zadnju znamenku 5,

(c) ima zadnju znamenku 0.

Zadatak 1.16 Da bi počeli igrati s čovječuljkom u igri "Čovječe, ne ljuti se!", morate prvo dobiti šesticu na kocki.

(a) Izračunajte vjerojatnost da u trećem pokušaju dobijete šesticu.

(b) Kolika je vjerojatnost da vem treba više od tri pokušaja da dobijete šesticu?

(c) Nakon koliko bacanja bi vjerojatnost da ste dobili šesticu bila barem 0.95?

Zadatak 1.17 Luka, Karlo i Marko bacaju redom kocku. Svaki igrač završava igru kad mu padne šestica.

(a) Odredite prostor elementarnih događaja.

(b) Izračunajte vjerojatnost da Luka drugi po redu dobije šesticu.

Zadatak 1.18 Set za čaj se sastoji od tri šalice i tri tanjurića u tri boje. Šalice su slučajno raspoređene na tanjuriće. Kolika je vjerojatnost da nijedna šalica nije na tanjuriću iste boje?

Zadatak 1.19 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: vjerojatnosni prostor i $A, B, C \in \mathcal{F}$. Dokažite:

(a) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \leq 2$,

(b) $\mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Zadatak 1.20 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: vjerojatnosni prostor i $A, B, C \in \mathcal{F}$. Dokažite:

(a) $\mathbb{P}(A \triangle B) \leq \mathbb{P}(A \triangle C) + \mathbb{P}(C \triangle B)$,

(b) $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$.

(c) Ako je $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$, izračunajte $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.

Zadatak 1.21 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: vjerojatnosni prostor i $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktni događaji. Postoji li

$$\lim_n \mathbb{P}(A_n)?$$

Zadatak 1.22 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: vjerojatnosni prostor i $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ događaji takvi daje

$$\mathbb{P}(A_n) \leq 2^{-n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n).$$

Zadatak 1.23 U nekoj školi učenici mogu učiti tri strana jezika: engleski, njemački i francuski. Od 100 učenika te škole je :

- 28 na engleskom
- 26 na njemačkom
- 16 na francuskom
- 12 na engleskom i njemačkom
- 4 na engleskom i francuskom
- 6 na njemačkom i francuskom
- 2 na sva tri jezika.

(a) Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrani učenik ne uči ni jedan strani jezik.

(b) Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrani učenik uči samo engleski ili samo francuski.

(c) Ako su slučajno odabrana dva učenika, izračunajte vjerojatnost da barem jedan od njih uči barem jedan strani jezik.

Zadaci za vježbu

1.24 Neka su $A, B, C \subseteq \Omega$. Dokažite:

(a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,

(b) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

(c) $A \cap B = \emptyset \iff A \setminus B = A$ ili $A \cup B = A \triangle B$,

(d) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$,

(e) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

1.25 Neka su $A, B \subseteq \Omega$. Pokažite da vrijedi

(a) $A \cup B = A \cap B \iff A = B$,

(b) $A \cap B = A \iff A \subseteq B$,

(c) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A \cup B \iff A \cap B = \emptyset$,

(d) $(A \cup B) \cap B^c = A \iff A \cap B = \emptyset$.

1.26 Neka je $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Nađite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži skupove $\{2\}$ i $\{3\}$.

1.27 Neka su $A, B \subseteq \Omega$. Nađite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži skupove A i B.

1.28 Neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ σ-algebre na Ω.

(a) Je li $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ σ-algebra?

(b) Je li $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ σ-algebra?

1.29 U kutiji su tri kuglice: crvena, zelena i plava. Promatramo slučajni pokus u kojem izvučemo jednu kuglicu iz kutije i zatim izvučemo jošjednu kuglicu. Odredite prostor elementarnih događaja ako

(a) nakon izvlačenja prvu kuglicu vratimo u kutiju,

(b) nakon izvlačenja prvu kuglicu ne vratimo u kutiju.

1.30 Bacamo kocku sve dok ne padne šestica. Odredite prostor elementarnih događaja. Neka je

$$E_n = \{\text{ kocku smo bacili barem } n \text{ puta }\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Prikažite E_n preko elementarnih događaja. Što je

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c ?$$

1.31 Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra. Pokažite da $\mathcal{F}$ ne može imati točno 6 elemenata.

1.32 Neka je $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Odredite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži skupove

$$A_1 = \{1,3,5\},\ A_2 = \{2,4,6\},\ A_3 = \{1,3\},\ A_4 = \{2,6\},\ A_5 = \{3\} \text{ i } A_6 = \{2\}.$$

1.33 Neka je $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Odredite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži skupove A, B i C ako je

(a) $A \cup B = \{1,2,4,5\}$, $A = \{2,5\}$, $A \cap B = \{2\}$, $C = \{3,6\}$,

(b) $A \setminus B = \{1,3\}$, $B \setminus A = \{2,6\}$, $A \cap B = \{4\}$, $C = \{5\}$.

1.34 Neka je Ω neprebrojiv skup. Je li

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega \colon A \text{ prebrojiv ili } A^c \text{ prebrojiv}\}$$

σ-algebra?

1.35 Neka su $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$. Pokažite:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \{x \in \Omega \colon x \text{ se nalazi u beskonačno mnogo } A_n\},$$
$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \{x \in \Omega \colon x \text{ se nalazi u svim osim u konačno mnogo } A_n\}.$$

1.36 Neka su $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$. U kakvom su odnosu skupovi

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \text{ i } \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n ?$$

1.37 Neka je $\Omega = \{a,b,c\}$. Ako je $\mathbb{P}(\{a,b\}) = 0.7$, $\mathbb{P}(\{b,c\}) = 0.6$, odredite vjerojatnosti događaja $\{a\}, \{b\}, \{c\}$.

1.38 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $A, B \in \mathcal{F}$, takvi da je $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.8$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$, $\mathbb{P}(A^c) = 0.6$ Izračunajte $\mathbb{P}(A),\ \mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A \setminus B)$.

1.39 Neka su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ vjerojatnosni prostori.

(a) Je li $\frac{\mathbb{P}}{2}$ vjerojatnost?

(b) Je li $\mathbb{P}^2$ vjerojatnost?

(c) Odredite $a, b \geq 0$ tako da $a\mathbb{P} + b\mathbb{Q}$ bude vjerojatnost.

1.40 Neka je $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\omega(\omega+1)},\ \omega \in \Omega$. Je li $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor?

1.41 Bacamo dvije simetrične kocke. Označimo s A rezultat na prvoj i s B rezultat na drugoj kocki. Kolika je vjerojatnost da jednadžba

$$x^2 + Ax + B = 0$$

nema realnih rješenja.

1.42 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Postoji li niz događaja $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}$ takav da je

$$\mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{2n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}?$$

1.43 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Postoje li $A,\ B,\ C \in \mathcal{F}$ takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(C) \quad &> \quad \frac{3}{4} \\ \mathbb{P}(A \triangle B) + \mathbb{P}(B \Delta C) \quad &< \quad \frac{2}{3}\ ? \end{aligned}$$

1.44 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$. Pokažite nejednakost

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \sqrt{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}.$$

1.45 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B, C \in \mathcal{F}$. Vrijedi li

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = {} & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) - \\ & - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C)? \end{aligned}$$

1.46 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1).$$

1.47 Set za čaj se sastoji od šest šalica i šest tanjurića u tri boje. Šalice su slučajno raspoređene na tanjuriće. Kolika je vjerojatnost da ni jedna šalica nije na tanjuriću iste boje?

1.48 Bacamo par simetričnih kocaka sve dok se ne pojavi zbroj jednak 5 ili 7. Izračunajte vjerojatnost da se zbroj 5 pojavi prije.

1.49 Neka su A i B događaji. Pokažite da je

$$\max\{\mathbb{P}((A \cup B)^c), \mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(A \triangle B)\} \geq \frac{1}{5}.$$

1.50 Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$. Pokažite da vrijedi

(a) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)\}$,

(b) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \geq \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)\}$.

1.51 U bolničkoj čekaonici 70% ljudi ima polomljene kosti, 75% pati od iscrpljenosti, 80% boli želudac i 85% ima vrućicu. Koliki je minimalni postotak ljudi u čekaonici koji imaju sve simptome? (*Jutarnji list 8.6.2007, str. 61*)

1.52 Izračunajte vjerojatnost da u 24 bacanja para simetričnih kocki ni jednom ne padne dvostruka šestica. Kolika je vjerojatnost u sluăju 25 bacanja?

1.53 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}$ takvi da je $P(A_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n).$$

1.54 Neka su $A, B \in \mathcal{F}$. Pokažite da vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B)^2 + \mathbb{P}(A^c \cap B)^2 + \mathbb{P}(A \cap B^c)^2 + \mathbb{P}(A^c \cap B^c)^2 \geq 1/4.$$

Pokažite da vrijedi jednakost ako i samo ako je $\mathbb{P}(A) = P(B) = 1/2$,
$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$.
(Uputa: koristite aritmetičko-kvadratnu nejednakost)

1.55 Dokažite **Bonferronijevu nejednakost:** Za $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

1.56 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}$ takvi da

$$\lim_n \mathbb{P}(A_n \triangle A) = 0.$$

Izračunajte

$$\lim_n \mathbb{P}(A_n).$$

1.57 * Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je

$$\mathcal{N} = \{E \subseteq \Omega \colon \exists\, F \in \mathcal{F} \text{ takav da je } E \subseteq F \text{ i } \mathbb{P}(F) = 0\}.$$

(a) Pokažite da je familija $\mathcal{N}$ zatvorena na prebrojive unije.

(b) Pokažite da je familija

$$\mathcal{G} = \{A \subseteq \Omega \colon \exists\, B \in \mathcal{F} \text{ takav da je } A \triangle B \in \mathcal{N}\}$$

σ-algebra.

1.58 * Kažemo da je $A \subseteq \mathbb{Z}$ **periodičan** ako postoji $i \in \mathbb{N}$ i skup $I \subseteq \{1, 2, \ldots, i\}$ takav da je

$$A = \bigcup_{l=-\infty}^{\infty} (I + li),$$

gdje je $I + li = \{n + li \colon n \in I\}$. Dokažite da je

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{Z} \colon A \text{ je periodičan}\}$$

σ-algebra na $\mathbb{Z}$.

1.59 * Nađite beskonačnu familiju podskupova od $\mathbb{R}$ koja sadrži skup $\mathbb{R}$, zatvorena je na prebrojive presjeke i prebrojive unije, ali nije σ-algebra.

2

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.

Definicija. Neka su A, $B \in \mathcal{F}$ t.d. je $\mathbb{P}(B) > 0$.

Uvjetna vjerojatnost od A uz uvjet B definira se kao

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

• Kako je i $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A|B^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)$, onda vrijedi:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)$$

Definicija. Niz događaja $\{H_i \colon \ : i \in I\}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{N}$, zovemo **potpun sistem događaja** ako je

$$\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega \quad \text{i} \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \ \text{za sve } i, j, \in \mathbb{N}, \ i \neq j.$$

• Za $A \in \mathcal{F}$ je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) =& \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap (\bigcup_{i \in I} H_i)) = \\ =& \mathbb{P}(\bigcup_{i \in I}(A \cap H_i)) \overset{(\sigma)\text{-ad.}}{=} \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i).\end{aligned}$$

Tada formulu

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|H_i)\mathbb{P}(H_i)$$

zovemo **formula potpune vjerojatnosti**.

- **Bayesovo pravilo**:

$$\mathbb{P}(H_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_j) \cdot \mathbb{P}(B_j)}{\sum_i \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}$$

Definicija. Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su **nezavisni** ako je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Familija događaja $\{A_i \colon i \in I\}$, gdje je I neki indeksni skup, je **nezavisna** ako je

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in F} A_i\right) = \prod_{i \in F} \mathbb{P}(A_i),$$

za svaki konačni podskup $F \subseteq I$.
Familija događaja $\{A_i \colon i \in I\}$ je **u parovima nezavisna** ako je

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j), \quad \text{za sve } i, j \in I,\ i \neq j.$$

Zadatak 2.1 Iz skupa $S = \{1, 2, \ldots, 20\}$ slučajno se izabire jedan broj. Ako znamo da je izabrani broj djeljiv s 3. odredite vjerojatnost da je izabrani broj paran.

Zadatak 2.2 U kutiji se nalazi 8 bijelih i 10 crnih kuglica. Dva puta uzastopno izvlačimo po jednu kuglicu. Izračunajte vjerojatnost da su obje izvučene kuglice bijele ako se izvučena kuglica ne vraća u kutiju.

Zadatak 2.3 (**Shema urni Polya**) U urni imamo b bijelih i c crvenih kuglica. Izvlačimo na slučajan način kuglicu iz urne, zabilježimo njenu boju i potom je vratimo nazad u urnu s još d kuglica iste boje. Tako ponavljamo postupak. Kolika je vjerojatnost da

(a) je druga izvučena kuglica crvena,

(b) prva izvučena kuglica crvena ako znamo da smo u drugom izvlačenju izvukli crvenu kuglicu?

Zadatak 2.4 Neka su A, B, C nezavisni događaji. Dokažite da su tada nezavisni i sljedeci događaji:

(a) A i B^c,

(b) A^c i B^c,

(c) A i $B \cup C$,

(d) $A \setminus B$ i C.

Zadatak 2.5 U svakoj promatranoj godini vjerojatnost da muški vozač ima prometnu nesreću zbog koje zatraži odštetu od svoje osiguravajuće kuće je μ (i nezavisna je od dstalih godina). Ista je vjerojatnost za ženske vozačice λ. Pretpostavimo sa osiguravajuća kuća koja nas zanima ima isti broj osiguranih vozača i vozačica. Izaberimo od njih na slučajan način jednog.

(a) kolika je vjerojatnost da će izabrani vozač u ovoj godini zatražiti odštetu za neku svoju nesreću,

(b) kolika je vjerojatnost da će to učiniti dvije uzastopne godine za redom,

(c) ako osiguravajuća kuća na slučajan način izabere osiguranika koji je ove godine podnio zahtjev za odštetom, kolika je vjerojatnost da će on i iduće godine zatražiti odštetu za neku svoju nesreću?

Zadatak 2.6 Vjerojatnost da strijelac pogodi metu kad je vjetrovito vrijeme iznosi 0.4, a kada nije vjetrovito 0.7. U bilo kojem gađanju mete vjerojatnost pojave vjetra je 0.3. Nađite vjerojatnost da

(a) u promatranom bacanju se javi vjetar, a strijelac ipak pogodi metu,

(b) pogodi metu u prvom gađanju,

(c) pogodi metu točno jednom u dva gađanja

Zadatak 2.7 Bacamo 5 simetričnih noćića. Nakon prvog bacanja bacamo ponovno one novčiće koji pokazuju glavu. Kolika je vjerojatnost da će nakon drugog bacanja pasti ukupno barem 3 pisma?

Zadatak 2.8 Tri simetrična novčića C_1, C_2, C_3 leže na stolu. Vjerojatnost da na njima padnu glave su redom 1/3, 2/3 i 1. Na slučajan način uzmemeo jedan novčić, bacimo ga i uočimo da je pala glava. Izračunajte vjerojatnost da je to novčić C_k za $k = 1, 2, 3$.

Zadatak 2.9 U nekom gradu na aeordrom vozi 30 % taksija plave boje, 20 % taksija zelene boje i 50 % taksija žute boje. Oni putnike na aerodrom dovedu prekasno na let s vjerojatnostima 0.1, 0.2, 0.3. Jednog dana, žureći na aerodrom, neki putnik je zaustavio taksi na ulici i rekao vozaču da vozi na aerodrom. Na kraju putnik nije zakasnio na avion. Izračunajte vjerojatnost da se putnik vozio u žutom taksiju.

Zadatak 2.10 Simetrična kocka A ima 2 zelene i 4 bijele strane, a simetrična kocka B ima 4 zelene i 2 bijele strane. Bacamo simetrični novčić. Ako padne pismo, bacamo kocku A, a inače bacamo kocku B. Ako znate da je kocka pala na zeleno, izračunajte vjerojatnost da smo bacali kocku A.

Zadatak 2.11 U kutiji je 5 različitih kuglica, od kojih svaka moze biti bijela ili crna s jednakom vjerojatnošću. Ako smo izvukli bijelu kuglicu iz kutije, koji je najvjerojatniji broj crnih kuglica u kutiji na početku?

Zadatak 2.12 Kutija A sadrži 3 bijele i 2 crne, kutija B 1 bijelu i 3 crne te kutija C 5 bijelih i 4 crne kuglice. Iz kutije A izvučemo kuglicu, prebacimo je u kutiju B, a potom iz kutije B izvučemo kuglicu i prebacimo je u kutiju C. Nakon toga, iz kutije C izvučemo kuglicu u prebacimo je u kutiju A. Ako je poznato da je broj bijelih i crnih kuglica u svim kutijama ostao nepromijenjen nakon prebacivanja, kolika je vjerojatnost da smo iz kutije B u kutiju C prebacii crnu kuglicu?

Zadatak 2.13 (**Kockareva propast**) Ulazite u kockarnicu s k kn i kladite se u 1 kn da ce na ruletu kuglica pasti na crveno. Kockarnica nije poštena pa je vjerojatnost da na ruletu padne crveno jednaka $p < \frac{1}{2}$. U slučaju da izgubite čitav novac ili ako u nekom trenutku budete imali K kn, napuštate kockarnicu. Kolika je vjerojatnost da odete bez ičega? Pretpostavite da su vrtnje ruleta međusobno nezavisne.

Zadatak 2.14 Simetrična kocka se baca n puta. Izračunajte vjerojatnost da šestica padne neparan broj puta.

Zadatak 2.15 Dvije ceste spajaju gradove A i B. Gradove B i C također spajaju dvije ceste. A i C su direktno spojeni željeznicom. Sve ceste i željeznika pruga mogu biti blokirane zbog snježnih nanosa nezavisno jedna od druge s vjerojatnošću p. Nalazite se u gradu A.

(a) Izračunajte vjerojatnost da u C možete doći cestom.

(b) Izračunajte vjerojatnost da možete doći u C.

(c) Ako znate da možete doći u C, kolika je vjerojatnost da je željeznika pruga blokirana zbog snijega?

Zadatak 2.16 Neka je (A_n) niz nezavisnih događaja takav da je

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Zadatak 2.17 Neka su $A_1, \ldots, A_n$ nezavisni događaji. Dokažite:

$$1 - e^{-(\mathbb{P}(A_1)+\ldots+\mathbb{P}(A_n))} \leq \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n).$$

Zadaci za vježbu

2.18 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $B \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. Pokažite da je funkcija $\mathbb{P}_B \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A|B), \quad A \in \mathcal{F}$$

vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.

2.19 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathbb{P}(B) > 0$. Pokažite da je

$$\mathbb{P}(A|B) \geq \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1}{\mathbb{P}(B)}.$$

2.20 U kutiji je n kuglica označenih brojevima $1, 2, \ldots, n$. Iz kutije na slučajan način izvučemo jednu kuglicu. Ako je kuglica bila označena brojem 1, ne vraćamo je u kutiju, a inače je vraćamo. Nakon toga izvučemo još jednu kuglicu. Izračunajte vjerojatnost da je druga kuglica označena brojem 2?

2.21 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Jesu li događaji $A \Delta B$ i C nezavisni?

2.22 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Pokažite da je

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c) \iff A \text{ i } B \text{ su nezavisni.}$$

2.23 U kutiji se nalazi 4 plave, 5 bijelih i 6 crnih kuglica. Izvlačimo tri kuglice, jednu po jednu bez vraćanja. Promotrimo sljedeće događaje:

$$A = \{\text{sve tri kuglice su različitih boja}\}, \ B = \{\text{prva kuglica je bijela}\}$$

$$C = \{\text{prve dvije kuglice su različitih boja.}\}$$

Izračunajte $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$. Jesu li događaji A i B nezavisni?

2.24 Neka je $E \in \mathcal{F}$ događaj koji je nezavisan sa samim sobom. Koje vrijednosti može poprimiti $\mathbb{P}(E)$?

2.25 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$ događaji takvi da je

$$\mathbb{P}(A \Delta B) = 0, \, \mathbb{P}(A \cup B) = p \ \text{ za neki } p \in [0, 1].$$

(a) Izračunajte $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \setminus B)$ i $\mathbb{P}(B \setminus A)$.

(b) Jesu li događaji A i B nezavisni?

2.26 U ponoć su na parkiralištu bila 2 siva i 1 crni Ford, 3 siva i 4 crna BMW-a i 3 sive i 1 crna Toyota. Te noći je kradljivac automobila nasumce odabrao automobil i ukrao ga. Ako je ukraden automobil sive boje, koja je vjerojatnost da je to bio BMW?

2.27 Marko je ozbiljan student koji uči petkom navečer. Međutim, njegov cimer ide van petkom navečer; 40 % puta ode van s djevojkom, a 60 % puta ode do obližnjeg bara. Ako ode van s djevojkom, onda kod nje prespava 30 % puta, a ako otiđe u bar, onda u 40 % puta izazove tuču i noć provede u zatvoru. Jedne subote Marko se probudio i vidio da mu cimer nije u sobi. Izračunajte vjerojatnost da je Markov cimer u zatvoru.

2.28 Tri prijateljice, Dunja, Lidija i Tina, prijavile su se kao ekipa na kviz znanja. One se za odgovor na pitanje prijavljuju s vjerojatnostima $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. Na pitanje odgovaraju točno s vjerojatnostima $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{5}$. Ako pitanje nije točno odgovoreno, nađite vjerojatnost da je na pitanje odgovarala Tina.

2.29 Nekim kanalom se prenose podaci zapisani pomoću znakova 0 i 1. Vjerojatnost da se pošalje 1 je 0.3, a vjerojatnost da se pošalje 0 je 0.7. Na izlazu se 15% znakova pogrešno interpretira. Ako je primljen znak 1, izračunajte vjerojatnost da je poslan znak 0.

2.30 Na stolu su dvije kutije. U prvoj kutiji su plava, zelena i crvena kuglica, a u drugoj kutiji je p plavih, z zelenih i c crvenih kuglica ($p, z, c \geq 1$). Slučajno odaberemo dvije kuglice iz prve kutije i prebacimo ih u drugu kutiju. Nakon toga iz druge kutije izvučemo kuglicu. Ako je izvučena kuglica zelene boje, izračunajte vjerojatnost da u prvoj kutiji nema crvene kuglice.

2.31 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.

(a) Neka su $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $\mathbb{P}(A) = 0.9$ i $\mathbb{P}(B) = 0.8$. Pokažite da je $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.7$.

(b) Pokažite da za $C, D \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(C|C \cup D) \geq \mathbb{P}(C|D).$$

2.32 Pijanac šeta ulicom dugom m blokova. Na početku ulice je bar, a na kraju njegov stan. U svakom trenutku pijanac s jednakom vjerojatnošću ide lijevo ili desno. Ako se pijanac nalazi k blokova od bara ($0 \leq k \leq m$), kolika je vjerojatnost da dođe u stan prije nego završi u baru?

2.33 * Luka i Marko imaju po 60 kn. Oni igraju niz igara, pričemu Luka pobjeđuje s vjerojatnošću p, a Marko s vjerojatnošću $q = 1 - p$. U svakoj igri pobjednik dobije k kn od drugog igrača, pri čemu se iznos k određuje bacanjem simetrične kocke prije početka igranja.

(a) Kolika je vjerojatnost da Luka dobije sav Markov novac prije nego izgubi sav svoj?

(b) Ako Luka može birati ulog k takav da je $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i ako je $p < q$, koliki bi ulog trebao odabrati?

Rješenja: **2.20.** $\frac{n^2-n+1}{n^3-n^2}$ **2.24.** 0 ili 1 **2.26.** 0.375 **2.27.** 0.6666 **2.28.** 0.2222 **2.29.** 0.291 **2.30.** $\frac{2z+1}{3z+2}$ **??.** 0.6 **2.32** k/n **2.33.** (a) $\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \left(1 + (q/p)^{60/k})\right)^{-1}$ (b) $k = 6$

3

Prebrojavanje

Zadatak 3.1 Simetričnu kocku bacamo 3 puta. Kolika je vjerojatnost da ćemo svaki puta dobiti veći broj?

Rješenje:

$\Omega = \{(i,j,k) : i,j,k \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$
$\mathbb{P}(\{(i,j,k)\}) = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$
$A =$\{svaki puta dobivamo veći broj\}$= \{(i,j,k) : 1 \leq i < j < k \leq 6\}$
$\Rightarrow \quad |A| = \binom{6}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{3}}{6^3} = \frac{5}{54}.$

△

Zadatak 3.2 U vrećici imamo 550 jabuka, od čega je 2% trulih. Kolika je vjerojatnost da u slučajnom uzorku od 25 jabuka budu točno 2 trule?

Zadatak 3.3 Na slučajan način raspoređujemo 30 jednakih jabuka u 8 različitih kutija (u svaku kutiju može stati proizvoljno mnogo jabuka). Izračunajte vjerojatnost da

(a) se u svakoj kutiji nalaze barem 3 jabuke ,

(b) su 3 kutije ostale prazne.

Rješenje:

$\Omega = \{(x_1,\ldots,x_8) \ : \ x_1 \geq 0,\ldots,x_8 \geq 0 \ , \ x_1 + \ldots + x_8 = 30\}$
$|\Omega| = \text{broj rješenja od} \begin{cases} x_1 + \ldots + x_8 = 30 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,8. \end{cases}$
Zamislimo da smo jabuke poredali u red. Tada naš problem raspoređivanja jabuka u 8 kutija odgovara problemu raspoređivanja 7 pregrada među te poredane jabuke. Stoga je $|\Omega| = \binom{30+7}{7} = \binom{37}{7}$.

(a) $A := \{(x_1, \ldots, x_8) \ : \ x_1 \geq 3, \ldots, x_8 \geq 3 \ , \ x_1 + \ldots + x_8 = 30\}$

$\Rightarrow \quad |A| = \text{broj rješenja od} \begin{cases} x_1 + \ldots + x_8 = 30 \\ x_i \geq 3, \quad i = 1, \ldots, 8. \end{cases}$

Definiramo $y_i := x_i - 3 \quad \Rightarrow \quad |A| = \text{broj rješenja od} \begin{cases} y_1 + \ldots + y_8 = 30 - 8 \cdot 3 = 6 \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 8. \end{cases}$

$\Rightarrow \quad |A| = \binom{6+7}{7} = \binom{13}{7} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{7}}{\binom{37}{7}}$

(b) $B := \{(x_1, \ldots, x_8) \ : \ \text{točno tri } x_i = 0 \ , \text{ a ostali } \ x_i \geq 1 \ , \ x_1 + \ldots + x_8 = 30\}$

Na $\binom{8}{3}$ načina odaberemo 3 prazne kutije, a ostale popunimo tako da niti jedna ne smije ostati prazna, tj. $x_i \geq 1$. Dakle, tražimo broj petorki $(y_1, \ldots, y_5)$ t.d.
$\begin{cases} y_1 + \ldots + y_5 = 30 \\ y_i \geq 1, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$

Definiramo $z_i = y_i - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1 + \ldots + z_5 = 30 - 5 \cdot 1 = 25 \\ z_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 5. \end{cases}$

$\Rightarrow \quad |B| = \binom{8}{3} \cdot \binom{25+4}{4} = \binom{8}{3} \cdot \binom{29}{4}$

$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{29}{4}}{\binom{37}{7}}.$

△

Zadatak 3.4 (Problem rođendana) Izračunajte vjerojatnost da je u grupi od n ljudi barem dvoje rođeno istog dana.

Zadatak 3.5 Set za čaj sastoji se od n šalice i n tanjurića, pri čemu su po jedna šalica i jedan tanjurić iste boje. Šalice su na tanjuriće raspoređene na slučajan način. Izračunajte vjerojatnost p_n da niti jedna šalica nije na tanjuriću iste boje. Izračunajte

$$\lim_{n \to \infty} p_n.$$

Zadatak 3.6 Lutrija je izdala n srećki, od kojih je m dobitnih ($m \leq n$). Ovisi li vjerojatnost dobitka za pojedinog igrača o broju preostalih srećki, tj. je li bitan redoslijed izvlačenja?

Zadatak 3.7 Iz očitih razloga Arthur ne želi sjediti kraj Mordreda ili Lancelota za Okruglim Stolom (za kojim sjedi n vitzova na n stolaca).

(a) Ako n vitezova sjedne na slučajan način, kolika je vjerojatnost da Arthur ne sjedi do Mordreda ili Lancelota?

(b) Mijenja li se vjerojatnost u (a) ako Arthur prvi sjedne, a ostali vitezovi onda sjednu za stol na slučajan način?

Zadaci za vježbu

3.8 Bacamo dvije simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost da

(a) dobiveni brojevi nemaju zajedničkog djelitelja većeg od 1?

(b) jedan dobiveni broj dijeli drugi?

3.9 Bacamo 6 simetričnih kocaka. Izračunajte vjerojatnost da su dobiveni brojevi međusobno različiti.

3.10 Na slučajan način biramo broj među brojevima $10000, \ldots, 99999$.
Izračunajte vjerojatnost

(a) da taj broj ima sve znamenke različite,

(b) da je taj broj oblika $\overline{abcba}$ (npr. 12321, 36663).

3.11 Ako je u nekom društvu 30 osoba, kolika je vjerojatnost da 6 mjeseci u godini sadrži po dva njihova rođendana, a preostalih 6 mjeseci po tri?

3.12 Što je vjerojatnije: da slučajno odabrana osoba ima rođendan u ponedjeljak ili da dvije slučajno odabrane osobe imaju rođendan na isti dan u tjednu?

3.13 U ormaru je 4 para cipela. Slučajno odaberemo 5 cipela. Izračunajte vjerojatnost da među izvučenim cipelama

(a) nema ni jednog para,

(b) ima točno 1 par,

(c) ima točno 2 para.

3.14 Na slučajan način od 52 karte biramo 13 karata. Izračunajte vjerojatnost da u dobivenim kartama neće biti zastupljene sve četiri vrste.

3.15 Na slučajan način od 52 karte biramo 7 karata. Izračunajte vjerojatnost

(a) da u dobivenim kartama imamo točno 5 karata iste vrste,

(b) da u dobivenim kartama imamo barem 5 karata iste vrste.

3.16 Bacamo 3 simetrične kocke. Izračunajte vjerojatnost da je najveći dobiveni broj najmanje dvostruko veći od najmanjeg dobivenog broja.

3.17 Na peronu je vlak koji ima 15 vagona. Ako od 7 putnika svaki nasumce bira vagon, izračunajte vjerojatnost

(a) da je u svakom vagonu najviše jedan putnik,

(b) da je u zadnjem vagonu točno jedan putnik.

3.18 Na peronu je vlak koji ima n vagona. Ako od m, $(m > n)$ putnika svaki nasumce bira vagon, izračunajte vjerojatnost da je u svakom vagonu barem jedan putnik.

3.19 Iz skupa $\{1, 2, \ldots, 20\}$ nasumce biramo 5 brojeva, jedan po jedan. Kolika je vjerojatnost da izaberemo

(a) 5 uzastopnih brojeva,

(b) 5 uzasopnih brojeva u rastućem poretku.

3.20 Bacamo n simetričnih kocaka. Izračunajte vjerojatnost da je pao barem jedan paran i barem jedan neparan broj.

3.21 Koliko puta treba baciti simetričnu kocku da bi se s vjerojatnosću 0.99 barem jednom pojavila jedinica?

3.22 Luster ima 5 grla za žarulje, od kojih su 2 ispravna i 3 neispravna. U grla nasumce stavimo 5 žarulja među kojima su 2 ispravne i 3 neispravne. Kolika je vjerojatnost da ćemo uključivanjem lustera u struju dobiti svjetlo?

3.23 Kuglice označene brojevima $1, \ldots, n$ su promiješane i poredane u niz $(a_1, \ldots, a_n)$. Izračunajte vjerojatnost da će se barem jedan broj s kuglice podudarati s mjestom na kojem se kuglica nalazi.

3.24 Neka je $\Omega = \{1, 2, \ldots, 120\}$. Izračunajte vjerojatnost da je nasumce odabrani broj iz Ω

(a) djeljiv s 3 i 4 ,

(b) djeljiv s 3 ili 4, ali ne s oba.

3.25 Na slučajan način bacamo 6 simetričnih kocaka. Kolika je vjerojatnost da će pasti 3 para istih brojeva?

3.26 Što je vjerojatnije: da se u 4 bacanja jedne kocke barem jednom pojavi šestica ili da se u 24 bacanja dviju kocaka barem jednom pojave dvije šestice?

3.27 Prodavačica u robnoj kući je nasumce zahvatila 8 čarapa iz hrpe od 14 pari čarapa. Kolika je vjerojatnost da se među odabranim čarapama nalazi barem jedan isovrsni par čarapa?

3.28 Četiri igrača igraju s 52 karte, pri čemu se svakom igraču podijeli 13 karata. Kolika je vjerojatnost da svaki igrač ima jednog asa?

3.29 Dva igrača, A i B, igraju niz igara. U svakoj pojedinoj igri bez obzira na ishode prethodnih igara svaki igrač pobjeđuje s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Pobjednik igre dobiva 1 bod, a poraženi 0 bodova. Dogovor je da igra traje dok A ne skupi 2 boda ili dok B ne skupi 3 boda. Prije početka igre A ulaže a kuna, a B b kuna, gdje je $a + b = 6$ kuna. Ukupni pobjednik dobiva sav novac. Koliko mora svaki od njih uplatiti kako bi igra bila fair?

3.30 U nekom kraljevstvu se organizira viteški turnir. Dan prije na turnir je došlo n vitezova. Netko je preko noći na slučajan način vitezovima izmiješao koplja.

(a) Kolika je vjerojatnost da je barem jedan vitez na turniru nastupio sa svojim kopljem?

(b) Označimo vjerojatnost iz (a) s p_n. Odredite $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

3.31 U kutiji se nalazi n kuglica. Na slučajan način izvučemo neki broj kuglica. Kolika je vjerojatnost da je broj izvučenih kuglica paran?

3.32 Na peronu je vlak koji se sastoji od n vagona. Ako m putnika ($m \leq n$) nasumce bira vagon, izračunajte vjerojatnost

(a) da je u svakom vagonu najviše jedan putnik,

(b) da je u zadnjem vagonu točno jedan putnik.

3.33 Dr. Elmex ima 10 "čudnih" pacijenata koji zbog straha od karijesa dolaze na pregled jednom tjedno. Svatko od njih na slučajan način i nezavisno od ostalih bira jedan od pet radnih dana u tjednu za posjet zubaru. Izračunajte vjerojatnost da dr. Elmexa barem jedan dan neće posjetiti ni jedan "čudni" pacijent.

3.34 Bacamo dvije simetrične kocke i dobivene ishode označimo s A i B. Kolika je vjerojatnost da jednadžba

$$x^2 + Ax + B = 0$$

ima realna rješenja?

3.35 10 kuglica je označeno brojevima $1, 2, \ldots, 10$. Na slučajan način poredamo kuglice u red. Izračunajte vjerojatnost da se mjesto barem jedne kuglice označene parnim brojem podudara s brojem na njoj.

3.36 Nekoć su Ana, Anja i Anita bile najbolje prijateljice. Prije dosta vremena sve tri su se međusobno posvađale i ne pričaju jedna s drugom. Jedne večeri su sve tri bile pozvane na svečanu večeru i, da bude još zanimljivije, sve tri su bile raspoređene za istim okruglim stolom. Za stolom je ukupno sjedilo n $(n \geq 6)$ osoba. Ako je razmještaj osoba za stolom bio slučajan, izračunajte vjerojatnost da nikoje dvije posvađane prijateljice nisu sjedile jedna do druge.

3.37 Na automobilskoj utrci se natjecalo prvih $n \geq 1$ vozača svijeta. Večer prije su se izvlačili startni brojevi. Izračunajte vjerojatnost da ni jedan vozač nije imao startni broj koji se podudarao s njegovim mjestom na rang-listi.

3.38 U kutiji je n kuglica iznačenih brojevima $1, 2 \ldots, n$. Izvlačimo jednu po jednu kuglicu (bez vraćanja). Pokažite da je vjerojatnost da zaredom nismo izvukli nikoje dvije kuglice na kojima su bili uzastopni brojevi jednaka

$$1 - \frac{1}{1!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

(Uputa: pokažite da je broj permutacija skupa $\{1, 2 \ldots, n\}$ u kojima je barem j uzastopnih brojeva jednak $(n - j)!$.)

Rješenja: **3.8.** (a) 0.638889 (b) 0.611111 **3.9.** $\frac{6!}{6^6}$ **3.10.** (a) 0.3024 (b) 0.01 **3.11.** $\frac{\binom{12}{6} \cdot \frac{30!}{(2!)^6 \cdot (3!)^6}}{12^{30}}$ **3.12.** isto je **3.13.** (a) 0 (b) 0.57429(c) 0.857143**3.14.** 0.051 **3.15.** (a) 0.0285 (b) 0.0306 **3.16.** 0.75 **3.17.** (a) 0.1898 (b) 0.30848 **3.18.** $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m}{n^m}$ **3.19.** (a) 0.00103 (b) 0.00000859 **3.20.** $1 - 2^{1-n}$ **3.21.** $n \geq 25$ **3.22.** 0.7 **3.23.** $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$ **3.24.** (a) 0.08333 (b) 0.41667 **3.25.** 0.039 **3.26.** prvi izbor je vjerojatniji **3.27.** 0.753 **3.28.** 0.105 **3.29.** a=44 kn, b=20 kn **3.30.** (a) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$ (b) $1 - e^{-1}$ **3.31.** $\frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}$ **3.32.** (a) $\frac{n!}{(n-m)!\, n^m}$ (b) $\frac{m\,(n-1)^{m-1}}{n^m}$ **3.33.** 0.47745 **3.34.** 0.527778 **3.35.** 0.401819 **3.36.** $\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}$ **3.37.** $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

4

Slučajne varijable

Definicija. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretni vjeroojatnosni prostor. Funkciju

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

zovemo **slučajna varijabla**.
Kod slučajne varijable nas zanima vjerojatnost da ona poprimi neku vrijednost, tj. za $a \in \mathbb{R}$ zanima nas vjerojatnost događaja

$$\{X = a\} = X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}.$$

Općenitije, za $B \subseteq \mathbb{R}$ zanima nas vjerojatnost događaja

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}.$$

Primjer 4.1 Bacamo dva simetrična novčića. Označimo s X broj pisama koja su pala. Znamo da je

$$\Omega = \{PP, PG, GP, GG\} \text{ i } P(\omega) = \frac{1}{4} \ \forall \omega \in \Omega.$$

Tada je $P(X = 0) = P(\{GG\}) = 1/4$, $P(X = 1) = P(\{PG, GP\}) = 1/2$, $P(X = 2) = P(\{PP\}) = 1/4$.
To kraće možemo zapisati u **tablicu distribucije**

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Općenito, ako je $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ i $P(a_i) = p_i, i = 1, 2, 3, \ldots$ onda pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}.$$

Obratno, ako je zadana tablica gornjeg oblika, ako vrijedi $p_i > 0$ za sve i i ako vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, tada je to tablica distribucije za neku slučajnu varijablu.

Napomena.

(a) Ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija i X slučajna varijabla, onda je i $g \circ X$ (kraće $g(X)$) slučajna varijabla jer je $g \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$.

(b) Ako je $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija i X i Y slučajne varijable, onda je i $h \circ (X, Y)$ (kraće $h(X, Y)$) sl. varijabla jer je $h \circ (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$.

Npr. $7X, X^2$, $\sin X$, $3X + 12Y, XY^2$ i $\sin X \cdot e^{X+Y}$ su slučajne varijable.

Napomena. Ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\{a_1, a_2, \dots\}) = \{b_1, b_2, \dots\}$, onda je

$$g(X) \sim \left(\begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & \dots & b_n & \dots \\ \sum\limits_{j:g(a_j)=b_1} p_j & \sum\limits_{j:g(a_j)=b_2} p_j & \dots & \sum\limits_{j:g(a_j)=b_n} p_j & \dots \end{array} \right).$$

Zadatak 4.2 Bacamo simetričnu kocku. Označimo s X broj koji je pao na kocki. Odredite razdiobu slučajnih varijabli X, X^2, $|X - 3|$.

Zadatak 4.3 Slučajna varijabla X ima distribuciju

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ c & 2c & 2c & 3c & c^2 & 2c^2 & 7c^2 + c \end{pmatrix}.$$

(a) Odredite konstantu c.

(b) Izračunajte $P(2 \leq X \leq 5)$.

(c) Odredite najmanji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $P(X \leq k) \geq 2/5$.

Zadatak 4.4 Neka je poznata razdioba slučajne varijable X,

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \text{ tj. } P(X = a) = \begin{cases} p_i & , a = a_i \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}.$$

Odredite distribucije slučajnih varijabli $-X$, $X^+ = \max\{0, X\}$, $X^- = \max\{0, -X\}$, $|X| = X^+ + X^-$, $\text{sgn} X = \begin{cases} \frac{X}{|X|} & , X \neq 0 \\ 0 & , X = 0 \end{cases}$.

Zadatak 4.5 Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\{\omega_i\}) = 1/3$. Definiramo sl. varijable: $X(\omega_1) = 1$, $X(\omega_2) = 2$, $X(\omega_3) = 3$,$Y(\omega_1) = 2$, $Y(\omega_2) = 3$, $Y(\omega_3) = 1$, $Z(\omega_1) = 3$, $X(\omega_2) = 1$, $X(\omega_3) = 2$. Nađite razdiobe od X, Y, Z, $X+Y$, $\sqrt{(X^2+Y^2)Z}$, $\frac{|X-Y|}{Z}$.

Zadatak 4.6 Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2^k} & \dots \end{pmatrix}.$$

Odredite razdiobu sl. varijable $Y = \sin(\dfrac{\pi X}{2})$.

Primjer 4.7 Neka je X broj uspjeha u nizu od n nezavisnih pokusa, pri čemu je vjerojatnost uspjeha u svakom od pokusa jednaka p. Tada vrijedi:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Odnosno, uz oznaku $q = 1 - p$:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ \binom{n}{0} p^0 q^n & \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} & \dots & \binom{n}{n} p^n q^0 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da po binomnom teoremu vrijedi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$.

X zovemo **binomna slučajna varijabla** s parametrima n i p i označavamo $X \sim B(n, p)$. Posebno, za $n = 1$ X je **Bernoullijeva** slučajna varijabla.

Zadatak 4.8 Marko svaki dan kasni na nastavu s vjerojatnošću 0.2.

(a) Koja je vjerojatnost da je u jednom tjednu (tj. u 5 radnih dana) zakasnio najviše jednom?

(b) Za koji broj dana možemo biti 90% sigurni da je barem toliko puta došao na vrijeme?

Napomena. Ako su $X_1, \dots, X_n$ Bernoullijeve sl. varijable s parametrom p, tj. $X_k \sim B(1, p)$, tada je $X_1 + \dots + X_n \sim B(n, p)$.

Zadatak 4.9 Neka su X i Y slučajne varijable s razdiobama $X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n & \dots \end{pmatrix}$. Pokažite da su X i Y nezavisne akko vrijedi $P(X = a_i, Y = b_j) = P(X = a_i)P(Y = b_j)$ za sve i, j.

Primjer 4.10 Neka je X vrijeme pojavljivanja prvog uspjeha u nizu nezavisnog ponavljanja pokusa, pri čemu je vjerojatnost uspjeha u svakom pokusu p. Tada vrijedi:

$$P(X=k)=q^{k-1}p,\ k\in\mathbb{N}.$$

Primijetimo, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}p=p\frac{1}{1-q}=1.$
X zovemo **geometrijska slučajna varijabla** s parametrom p i označavamo $X\sim G(p)$.

Zadatak 4.11 U 18. stoljeću lutrija se igrala tako da se izvlačila jedna od 32 različite kuglice, a dobitnici su dobivali isplatu 28 puta veću od uloga. Želeći dokazati poštenje, organizatori su tvrdili da će svaka kuglica biti izvučena barem jednom u 22 pokušaja i za to su nudili okladu s omjerom 1:1. Zbog čega ta oklada nije štetila organizatorima?

Primjer 4.12 Ako imamo m listića lutrije, od kojih je r dobitnih, neka je X broj dobitnih listića od n slučajno odabranih listića. Tada vrijedi:

$$P(X=k)=\frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}},\ \text{za } k\in\{0,1,\ldots,n\}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}=\frac{1}{\binom{m}{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}=(\text{Vand.})=\frac{1}{\binom{m}{n}}\binom{m}{n}=1.$$
X zovemo **hipergeometrijska slučajna varijabla** s parametrima r,m,n.

Zadatak 4.13 Iz standardnok špila od 52 karte nasumce izvlačimo 5 karata. Kolika je vjerojatnost da su svih 5 karata pikovi ili da ni jedna nije pik?

Primjer 4.14 Neka je X broj telefonskih poziva u telefonskoj centrali, pri čemu je $\lambda>0$ prosječan broj poziva u jednom vremenskom intervalu. Razdioba od X zadana je sa:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Vrijedi $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$
X zovemo **Poissonova slučajna razdioba** s parametrom λ i označavamo $X\sim P(\lambda)$.

Napomena. Neka je $X\sim B(n,p)$ takva da je $np=\lambda$. Tada za fiksni k vrijedi:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}.$$

Za fiksni k, $1 \leq j \leq n$ kada $n \to \infty$ vrijedi

$$\frac{n-k+j}{n} \to 1,\ (1-\frac{\lambda}{n})^k \to 1,\ (1-\frac{\lambda}{n})^n \to e^{-lambda},$$

tj. $P(X=k) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Zadatak 4.15 Očekivani broj jedinki neke rijetke vrste planktona u uzorku od 1 l vode iz Jadranskog mora je 2. Kolika je vjerojatnost da će u nekom uzorku biti barem 3 jednike?

Definicija. Neka je X diskretna slučajna varijabla zadana zakonom razdiobe:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Definiramo **matematičko očekivanje** slučajne varijable kao

$$\mathbb{E}X = \sum_i a_i\, p_i,$$

ako dani red konvergira.

Zadatak 4.16 Neka je

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Ako je $\mathbb{E}X = 1/3$, odredite a.

Zadatak 4.17 Marko i Ana igraju sljedeću igru. Svatko baci simetrični novčić . Ako padnu dva pisma, onda Ana dobije 6 kn od Marka, a inače Marko od Ane dobije a kn. Odredite a tako da igra bude poštena.

Napomena. Ako je $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onda je

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(a_i)p_i.$$

Zadatak 4.18 Bacama simetričnu kocku. Ako sa X označimo broj koji je pao na kocki, izračunajte

$$\mathbb{E}[\frac{1}{1+X}].$$

Definicija. **Varijanca** slučajne varijable X je definirana s $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2]$.

Napomena. Vrijedi:

(a) $\text{Var}X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$,

(b) $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}X$.

(c) Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, onda je

$$E[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Općenitije, ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, onda je

$$\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i].$$

(d) Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne, onda je

$$\text{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}X_i.$$

Zadatak 4.19 Bacate simetričnu kocku sve dok se ne pojavi šestica. Odredite očekivani broj bacanja kocke.

Zadatak 4.20 Neka je X nenegativna cjelobrojna slučajna varijabla. Dokažite da je

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

Zadatak 4.21 Marko je na piknik ponio 5 konzervi: 2 graha, 2 paprike i 1 tunejvinu. Nakon što ga je uhvatila kiša i oprala naljepnice, Marko je odlučio otvarati konzerve sve dok ne dobije sva tri jela. Odredite očekivani broj otvorenih konzervi.

Zadatak 4.22 Neka je $X \sim P(\lambda)$. Nađite razdiobu slučajne varijable $Y = \frac{1}{1+X}$ i odredite $\mathbb{E}[X \cdot Y]$.

Zadatak 4.23 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{P}(X = n) = \frac{c}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Odredite c i izračunajte $\mathbb{E}X$ i $\text{Var}X$.

Zadatak 4.24 Neka su X, Yi Z slučajne varijable koje su u parovima nezavisne. Vrijedi li

$$\text{Var}(X + Y + Z) = \text{Var}X + \text{Var}Y + \text{Var}Z?$$

Zadatak 4.25 Neka su $X \sim G(p_1)$ i $Y \sim G(p_2)$ nezavisne slučajne varijable. Izračunajte:

(a) $\mathbb{P}(X > n)$, $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\mathbb{E}[\min\{X, Y\}]$,

(c) $\mathbb{P}(X \geq 2Y)$.

Zadaci za vježbu

4.26 Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \frac{c}{3} & \frac{c}{3^2} & \frac{c}{3^3} & \cdots & \frac{c}{3^n} & \cdots \end{pmatrix}.$$

(a) Odredite c.

(b) Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = \ln\left(2 + \sin\frac{(2X-1)\pi}{2}\right)$.

4.27 Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots \\ \frac{c}{4} & \frac{c}{4^2} & \frac{c}{4^3} & \cdots & \frac{c}{4^n} & \cdots \end{pmatrix}.$$

(a) Odredite c.

(b) Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = \sqrt{1 + \cos\frac{\pi}{X}}$.

4.28 Neka su X, Y i Z nezavisne diskretne slučajne varijable.

(a) Pokažite da su $X + Y$ i Z nezavisne slučajne varijable.

(b) Pokažite da su $X \cdot Y$ i Z nezavisne slučajne varijable.

4.29 Neka su $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable takve da je

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo slučajne varijable

$$S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Izračunajte

(a) $\mathbb{P}(S_3 = 3 | S_2 \in \{-2, 0, 2\})$,

(b) $\mathbb{P}(S_3 = 3 | S_2 \in \{-2, 0, 2\}, S_1 = -1)$,

(c) $\mathbb{P}(S_4 \in \{-2, 0, 2\})$.

4.30 Odredite konstantu c tako da tablica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \frac{cq}{1\cdot 2} & \frac{cq^2}{2\cdot 3} & \frac{cq^3}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{cq^n}{n\cdot(n+1)} & \cdots \end{pmatrix}$$

bude razdioba neke slučajne varijable, pri čemu je $q \in \langle 0, 1\rangle$.

4.31 Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ nezavisne slučajne varijable, gdje su $\lambda, \mu > 0$. Odredite distribuciju od $X+Y$.

4.32 Slučajna varijabla X može poprimiti dvije vrijednosti: a i b ($a < b$) s vjerojatnostima, redom, 0.3 i 0.7 . Nađite a i b ako je $\mathbb{E}X = 2.7$ i $\mathrm{Var}X = 0.21$.

4.33 Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = -1)$. Nađite $c \neq 1$ takav da je $\mathbb{E}[c^X] = 1$.

4.34 Bacaju se dvije simetrične kocke i rezultati se zbroje. Izračunajte očekivanje i varijancu dobivenog zbroja.

4.35 Naka je X slučajna varijabla takva da ja $\mathrm{Var}X < \infty$. Dokažite da funkcija $a \mapsto \mathbb{E}[(X-a)^2]$ poprima jedinstveni minimum u točki $a = \mathbb{E}X$.

4.36 Jednom bacamo simetričnu kocku. Ako slučajna varijabla X predstavlja broj koji je pao na kocki, nađite matematičko očekivanje slučajnih varijabli $Y = X^2 - 3X + 4$ i $Z = |X - 2|$.

4.37 Iz skupa od 100 proizvoda, od kojih je 10 neispravno, izabran je na slučajan način uzorak od 5 proizvoda. Odredite očekivani broj neispravnih proizvoda.

4.38 Iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ biramo dva broja (možemo 2 puta izabrati isti broj). Označimo s X veći od brojeva. Izračunajte $\mathbb{E}X$.

4.39 Neka su X i Y nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s očekivanjem μ i varijancom σ^2. Izračunajte $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$.

4.40 Nađite parametar p slučajne varijable X s geometrijskom distribucijom ako za nju vrijedi: $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X^2 > n) = 1$.

4.41 Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u skupu $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}X < +\infty$.

(a) Pokažite da postoji očekivanje slučajne varijable $\min\{X, Y\}$.

(b) Pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}[\min\{X, Y\}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n).$$

4.42 Diskretna slučajna varijabla može poprimiti vrijednosti $x_1, \ldots, x_n$ koje su dane u rastućem poretku. Pokažite da je $x_1 \leq \mathbb{E}X \leq x_n$.

4.43 Neka su X i Y diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{P}(|X-Y| \leq M) = 1$ za neki $M \in \mathbb{R}$ i da slučajna varijabla X ima očekivanje.

(a) Pokažite da slučajna varijabla Y ima očekivanje.

(b) Pokažite da vrijedi
$$|\mathbb{E}X - \mathbb{E}Y| \leq M.$$

4.44 Neka je X geometrijska slučajna varijabla s parametrom p. Pokažite da je
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{-p\ln p}{1-p}.$$

4.45 Neka je $X \sim P(\lambda)$. Pokažite da je
$$\mathbb{E}[X^n] = \lambda\mathbb{E}[(X+1)^{n-1}]$$
i izračunajte $\mathbb{E}[X^3]$.

4.46 Pretpostavite da igrate igru u kojoj pobjeđujete s vjerojatnošću p. Igrate 5 igara i ako pobijedite u petoj igri, nastavljate igrati sve dok ne izgubite.

(a) Nađite očekivani broj igara koje ćete odigrati.

(b) Nađite očekivani broj igara koje ćete izgubiti.

4.47 (**Jensenova nejednakost**) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tj.
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R},\ \lambda \in [0,1].$$

(a) Pokažite da za $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y < z$ vrijedi nejednakost
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$
(Uputa: $\lambda = \frac{y-x}{z-y}$)

(b) Zaključite da za sve $a \in \mathbb{R}$ postoji
$$\beta(a) := \sup_{x<a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
i da vrijedi
$$f(x) \geq f(a) + \beta(a)(x-a), \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

(c) **(Jensenova nejednakost za očekivanje)** Neka je X slučajna varijabla i neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, pri čemu postoje očekivanja slučajnih varijabli X i $f(X)$. Pokažite da vrijedi

$$f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X).$$

(Uputa: Iskoristite (b) uz $a = \mathbb{E}X$)

(d) Neka je X slučajna varijabla takva da postoje očekivanja slučajnih varijabli X i e^X. Pokažite da vrijedi nejednakost

$$e^{\mathbb{E}[X]} \leq \mathbb{E}[e^X].$$

(e) Neka je X pozitivna slučajna varijabla takva da postoje očekivanja slučajnih varijabli X i $\sqrt{X}$. Pokažite da vrijedi nejednakost

$$\mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq \sqrt{(\mathbb{E}X)}.$$

4.48 Neka je $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$.

(a) Izračunajte $\mathbb{E}[(X+1)^{-1}]$.

(b) Pokažite da vrijedi
$$\mathbb{E}[(X+1)^{-1}] \geq (\mathbb{E}[X+1])^{-1}.$$

(c) Pokažite da nejednakost iz (b) vrijedi za sve pozitivne slučajne varijable X. (Uputa: Jensenova nejednakost)

Rješenja: **4.26.** (a) 2 (b) $\mathbb{P}(Y=0) = 0.25$, $\mathbb{P}(Y = \ln 3) = 0.75$ **4.26.** (a) 3 (b) $\mathbb{P}(Y=0) = 0.8$, $\mathbb{P}(Y=\sqrt{2}) = 0.2$ **4.29.** (a) 0.125 (b) 0 (c) 0.875 **4.30.** $\frac{1}{1+\frac{(1-q)\ln(1-q)}{q}}$ **4.31.** $P(\lambda+\mu)$ **4.46.** (a) $4 + \frac{1}{1-p}$ (b) $4(1-p)+1$

5

Slučajni vektori

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ diskretni vjerojatnosni prostor.

Definicija. d**-dimenzionalni slučajni vektor** je funkcija

$$X = (X_1, \ldots, X_d) \colon \Omega \to \mathbb{R}^d.$$

Napomena.

(a) $X_1, \ldots, X_d$ su slučajne varijable.

(b) Dvodimenzionalni slučajni vektor (X, Y) često zadajemo preko tablice

$$\begin{array}{c|ccc} Y \setminus X & \cdots & a_i & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ b_j & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

gdje je $p_{ij} = \mathbb{P}(X = a_i, Y = B_j)$.

Definicija. **Funkcija gustoće** slučajne varijable X je funkcija

$$f_X \colon \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle,\ f_X(x) = \mathbb{P}(X = x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Napomena.

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x)$$

Primjer 5.1

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \implies f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & x \in \{0, 1\} \\ 1/2, & x = 2 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija. **Funkcija gustoće** slučajnog vektora (X, Y) je funkcija

$$f_{X,Y}\colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty\rangle,\ f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Napomena.

$$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \sum_{x,y} h(x,y) f_{X,Y}(x,y)$$

Definicija. **Kovarijanca** slučajnih varijabli X i Y je definirana sa

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)],$$

ako gornje očekivanje postoji. Ako je $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, onda kažemo da su X i Y **nekorelirane**.

Koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y je definiran sa

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}X}\sqrt{\mathrm{Var}Y}}.$$

Napomena.

(a) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

(b) nezavisnost $\Longrightarrow$ nekoreliranost, ali obrat općenito ne vrijedi.

(c) $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

(d) $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\mathrm{Cov}(X,Y)$

Definicija. Neka je (X, Y) slučajni vektor s funkcijom gustoće $f(x, y)$. **Uvjetna funkcija gustoće** je funkcija

$$f_{X|Y}(x|y)\colon \mathbb{R} \to [0,\infty),\ f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\ x \in \mathbb{R},$$

za sve $y \in \mathbb{R}$ takve da je $f_Y(y) > 0$.

Napomena.

(a) $f_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y)$

(b) X i Y su nezavisne $\iff$ je $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\iff$ $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$ i $\forall y \in \mathbb{R}$ takve da je $f_Y(y) > 0$.

Definicija. **Uvjetno očekivanje** slučajne varijable uz uvjet $Y = y$, gdje je $f_Y(y) > 0$ je definirano sa

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_{x} x f_{X|Y}(x|y).$$

Definiramo

$$\mathbb{E}[X|Y]\colon \Omega \to \mathbb{R},\ \mathbb{E}[X|Y](\omega) = \mathbb{E}[X|Y = y],$$

gdje je $y = Y(\omega)$.

Napomena.

(a) $\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_x x\mathbb{P}(X = y|Y = y)$

(b) $\mathbb{E}X = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \sum_y \mathbb{E}[X|Y = y]\mathbb{P}(Y = y)$

Zadatak 5.2 Bacamo dvije simetrične kocke. Označimo s X broj šestica, a s Y broj jedinica koje su pale.

(a) Odredite razdobu slučajnog vektora (X, Y).

(b) Odredite razdiobu slučajnih varijabli X i Y.

(c) Izračunajte koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y.

(d) Jesu li X i Y nezavisne?

(e) Odredite razdiobu slučajne varijable $X + 2Y$.

Zadatak 5.3 Slučajni vektor (X, Y) ima funkciju gustoće zadanu s $f(0, 0) = 1 - 3a$, $f(0, 1) = f(1, 0) = f(1, 1) = a$, gdje je $0 < a < \frac{1}{3}$. Odredite

(a) $\mathbb{E}[X|Y]$

(b) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$.

(c) Kada su X i Y nezavisne?

Zadatak 5.4 Rudar se nalazi u rudniku u prostoriji s 3 vrata. Prva vrata vode u tunel koja rudara do izlaza dovede nakon 3 sata, dok druga i treća vrata rudara dovedu natrag do iste prostorije nakon 5, odnosno 7 sati. Ako rudar bira vrata na slučajan način, nađite očekivano vrijeme izlaska iz rudnika.

Zadatak 5.5 Bacamo simetričnu kocku. Neka X i Y označavaju broj bacanja potreban da se po prvi put dobije šestica, odnosno petica. Izračunajte:

(a) $\mathbb{E}X$,

(b) $\mathbb{E}[X|Y = 1]$,

(c) $\mathbb{E}[X|Y = 5]$.

Zadaci za vježbu

5.6 Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

i $Y = X^2$.

(a) Nađite razdiobu slučajnog vektora (X, Y).

(b) Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne?

(c) Odredite koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y.

5.7 Neka su X, Y i Z slučajne varijable i a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Pokažite da vrijedi:

(a) $\operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) = ac \operatorname{Cov}(X, Y)$,

(b) $\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a \operatorname{Cov}(X, Z) + b \operatorname{Cov}(Y, Z)$,

(c) $\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}X + \operatorname{Var}Y + 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$.

5.8 Za sljedeće funkcije $f \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ nađite $c \in \mathbb{R}$ tako da one budu funkcije gustoće neke slučajne varijable. Izračunajte očekivanja tih slučajnih varijabli.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c\,2^x}{x!} & , x \in \mathbb{N} \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x(x+1)} & , x \in \mathbb{N} \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases}$$

5.9 Funkcija gustoće slučajnog vektora (X, Y, Z) je dana s

$$f(1, 2, 3) = f(2, 1, 1) = f(2, 2, 1) = f(2, 3, 2) = 0.25.$$

Izračunajte:

(a) $\mathbb{E}[XYZ]$,

(b) $\mathbb{E}[XY + XZ + YZ]$.

5.10 Slučajni vektor (X, Y) ima razdiobu

$X \setminus Y$	-a	0	a
-a	0	0.25	0
0	0.25	0	0.25
a	0	0.25	0

Pokažite da su slučajne varijable $X + Y$ i $X - Y$ nezavisne.

5.11 Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{4} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2. \end{cases}$$

i neka je $Y = X^2$. Izračunajte:

(a) $\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 1.5)$,

(b) $\mathbb{P}(Y \leq X)$,

(c) $\mathbb{P}(X + Y \leq 0.75)$.

5.12 Neka su X_1, X_2, X_3, X_4 i X_5 nezavisne slučajne varijable s varijancom σ^2. Izračunajte:

(a) $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_4 + X_5)$,

(b) koeficijent korelacije između slučajnih varijabli $X_1 + X_2 + X_3$ i $X_3 + X_4 + X_5$.

5.13 Bacamo dvije simetrične kocke. Neka je X manji, a Y veći broj koji je pao na kockama. Odredite $\mathbb{E}[X|Y]$.

5.14 * Neka su X i Y slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ i $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y = 1$. Ako je $\rho = \rho(X, Y)$, pokažite nejednakosti

(a) $\mathbb{E}[\max\{X^2, Y^2\}] \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}$,

(b) $\mathbb{E}[\min\{X^2, Y^2\}] \geq 1 - \sqrt{1 - \rho^2}$.

(Uputa: $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$)

Rješenja: **6.43.** (b) Ne (c) 0 **6.45.** (a) $c = (e^2 - 1)^{-1}$, $\mathbb{E}X = 2e^2(e^2 - 1)^{-1}$ (b) $c = 1$, očekivanje ne postoji **5.9.** (a) 6 (b) 10 **5.11.** (a) 0.25 (b) 0.5 (c) 0.5 **5.12.** (a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ **5.13.** $\frac{Y^2}{2Y-1}$

6

Neprekidne slučajne varijable

Definicija. Slučajna varijabla X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je **neprekidna slučajna varijabla** ako postoji funkcija $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ takva da je

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt, \quad \text{za sve } a \in \mathbb{R}.$$

Funkciju f se zove **funkcija gustoće** slučajne varijable X.
Napomena.

(a) Može se pokazati da je

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_{B} f(t)\, dt, \text{ za izmjerivi podskup } B \subseteq R.$$

Npr.

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\, dt, \text{ za } a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

(c) Za $B = \mathbb{R}$ iz (a) slijedi

$$1 = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt.$$

Dakle, da bi f bila funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable, mora vrijediti:

- $f(x) \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

(d) Vrijedi

$$\mathbb{P}(X = a) = \int_{a}^{a} f(t)\, dt = 0 \text{ pa je}$$

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X < a) + 0 = \mathbb{P}(X < a)$$

i slično je

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq B) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b).$$

(d) Ako je f neprekidna funkcija, onda je

$$\mathbb{P}(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta X} \underbrace{f(t)}_{\approx f(x)} \, dt \approx f(x)\Delta x \text{ za male } \Delta x.$$

Definicija. **Funkcija distribucije** neprekidne slučajne varijable X je definirana sa

$$F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Napomena.

(a) Ako je f neprekidna, onda je

$$f = F'.$$

(b) Vrijedi:

$$F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$
$$F(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Zadatak 6.1 Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite c.

(b) Izračunajte $\mathbb{P}(X > 1)$.

Rješenje:
(a) Mora vrijediti:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = c \int_0^2 (4x - 2x^2) \, dx = c(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2 = \frac{8c}{3}$$

pa je $c = \frac{3}{8}$.
(b)

$$\mathbb{P}(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x) \, dx = \frac{3}{8} \int_1^2 (4x - 2x^2) \, dx = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2}{3}x^3)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

△

Definicija. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. **Matematičko očekivanje** slučajne varijable X je definirano sa

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

ukoliko gornji integral apsolutno konvergira.
Napomena. Općenito, za funkciju $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx,$$

ukoliko gornji integral apsolutno konvergira. Tako je **varijanca** slučajne varijable X definirana sa

$$\mathrm{Var}X := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 f(x)\, dx.$$

Zadatak 6.2 Slučajna varijabla X ima neprekidnu **uniformnu razdiobu** na intervalu $\langle a, b\rangle$ i pišemo $X \sim U(a,b)$ ako joj je funkcija gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite očekivanje, varijancu i funkciju distribucije slučajne varijable X.

Rješenje:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\, dt, & x > b \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

△

Zadatak 6.3 Slučajna varijabla X ima **eksponencijalnu razdiobu** s parametrom $\lambda > 0$ i pišemo $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ ako joj je funkcija gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite očekivanje, varijancu i funkciju distribucije slučajne varijable X.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda}\,dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = 0 + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \ldots = \frac{2}{\lambda^2} \\ \mathrm{Var}X &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = (*)$$

1. $x < 0$

$$(*) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0;$$

2. $x \geq 0$

$$(*) = \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

pa je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$\triangle$

Zadatak 6.4 Pretpostavite da slučajna varijabla ima funkciju distribucije

$$F(x) = C - e^{-x^2},\ x > 0.$$

(a) Odredite C.

(b) Izračunajte $\mathbb{P}(X > 2)$ i $\mathbb{P}(1 < X < 3)$.

(c) Odredite funkciju gustoće f.

(d) Izračunajte $\mathbb{E}X$.

Rješenje:

(a) $1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(C - e^{-x^2}) = C \implies C = 1.$

(b) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2^2}) = e^{-4}$
$\mathbb{P}(1 < X < 3) = \mathbb{P}(\{X < 3\} \setminus \{X \leq 1\}) = \mathbb{P}(X < 3) - \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X \leq 3) - \mathbb{P}(X \leq 1) = F(3) - F(1) = (1 - e^{-3^2}) - (1 - e^{-1^2}) = e^{-1} - e^{-9}$

(c)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\cdot 2xe^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx = \\
&= -xe^{-x^2}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{rr} & x = \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \implies & dx = \frac{dy}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} = \\
&= 0 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 1.$$

△

Slučajna varijabla X ima **normalnu razdiobu** s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ i pišemo $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ako joj je funkcija gustoće

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 6.5 Nađite distribuciju slučajne varijable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Rješenje:
Računamo:

$$
\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \mu + \sigma x) = \\
&= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left\{ \begin{array}{rr} & y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ \Longrightarrow & dx = \frac{dy}{\sigma} \end{array} \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, \sigma\, dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy
\end{aligned}
$$

pa je Z neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, y \in \mathbb{R},$$

odnosno $Z \sim$N$(0,1)$.

$\triangle$

Napomena. Ako je $X \sim$N$(0,1)$, onda je

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \Phi(x)$$

i Φ čitamo iz tablice.

Zadatak 6.6 Neka je $X \sim$N$(0,1)$. Odredite $\mathbb{E}X$ i Var$X$.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \\
\text{Var}X &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[X^2] - 0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [0 + \sqrt{2\pi}] = 1
\end{aligned}
$$

$\triangle$

Zadatak 6.7 Neka je $X \sim$N(μ, σ^2). Odredite $\mathbb{E}X$ i Var$X$.

Rješenje:
Iz zadatka 5.13 slijedi da je

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \text{N}(0,1)$$

pa iz zadatka 6.6 slijedi

$$0 = \mathbb{E}Z = \mathbb{E}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}X - \frac{\mu}{\sigma} \qquad \Longrightarrow \mathbb{E}X = \mu$$
$$1 = \mathrm{Var}Z = \mathrm{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}X \qquad \Longrightarrow \mathbb{E}X = \sigma^2$$

△

Zadatak 6.8 Vijek trajanja neke automobilske gume je normalno distribuiran s očekivanjem 34 000 km i standardnom devijacijom od 4 000 km.

(a) Izračunajte vjerojatnost da guma traje više od 40 000 km.

(b) Ako je guma prešla 30 000 km, izračunajte vjerojatnost da će guma trajati još 10 000 km.

Rješenje:
X =vijek trajanja gume $\Longrightarrow$ $X \sim$N$(34000, 4000^2)$
$\mu = 34000$, $\sigma = 4000$
Zadatak 5.13 $\Longrightarrow$ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ $\sim$N$(0, 1)$

(a)

$$\mathbb{P}(X > 40000) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{40000-\mu}{\sigma}) = \mathbb{P}(Z > 1.5)$$
$$= 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9333 = 0.0668$$

(b)

$$\mathbb{P}(X > 40000|X > 30000) = \frac{\mathbb{P}(X > 40000, X > 30000)}{\mathbb{P}(X > 30000)} = \frac{\mathbb{P}(X > 40000)}{\mathbb{P}(X > 30000)} = (*)$$
$$\mathbb{P}(X > 30000) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{30000-\mu}{\sigma})$$
$$= \mathbb{P}(Z > -1) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0.8413$$
$$\Longrightarrow (*) = \frac{0.0668}{0.8413} = 0.0794$$

△

Zadatak 6.9 Pretpostavite da je vrijeme putovanja nekog studenta od kuće do fakulteta približno normalno distribuirano s očekivanjem 40 minuta i standardnom devijacijom od 7 minuta. Student želi stići na predavanje koje počinje u 12:15 sati.

(a) Ako je student krenuo od kuće u 11:40, izračunajte vjerojatnost da on zakasni na predavanje.

(b) Kada bi student trebao krenuti od kuće da s vjerojatnošću od barem 0.95 bude siguran da će stići na vrijeme na predavanje?

Rješenje:
X =vrijeme putovanja $\implies X \sim$N$(40, 7^2)$

(a) $\mathbb{P}(X > 35) = \mathbb{P}(\frac{X-40}{7} > \frac{35-40}{7}) = \mathbb{P}(\frac{X-40}{7} > -0.7142) = 1 - \Phi(-0.7142) = \Phi(0.7142) = 0.7611$

(b) Tražimo a takav da je $0.95 \leq \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(\frac{X-40}{7} \leq \frac{a-40}{7}) = \Phi(\frac{a-40}{7})$, odakle slijedi

$$\frac{a-40}{7} \geq 1.64 \implies a \geq 51.48.$$

Dakle, student bi trebao krenuti 51.48 minuta prije, tj. otprilike u 11 sati 23 min i 30 s.

△

Zadatak 6.10 Autobus dolazi na stanicu svakih 15 minuta počevši od 7:00 ujutro. Ako neki putnik dolazi na stanicu u neko slučajno vrijeme između 7:00 i 7:30, izračunajte da on čeka autobus

(a) manje od 5 minuta,

(b) više od 10 minuta.

Rješenje:
X =vrijeme kada putnik stiže na stanicu $\implies X \sim$U$(0, 30)$

(a) $\mathbb{P}(X \in \langle 10, 15\rangle \cup \langle 25, 30\rangle) = \mathbb{P}(10 < X < 15) + \mathbb{P}(25 < X < 30) = \int_{10}^{15} \frac{dx}{30} + \int_{25}^{30} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3}$

(b) $\mathbb{P}(X \in \langle 0, 5\rangle \cup \langle 15, 20\rangle) = \mathbb{P}(0 < X < 5) + \mathbb{P}(15 < X < 20) = \int_{0}^{5} \frac{dx}{30} + \int_{15}^{20} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3}$

△

Zadatak 6.11 Neka je $X \sim$ Exp(λ). Pokažite da X ima svojstvo **memorijske odsutnosti**:

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t), \ s, \ t \geq 0.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > s + t|X > s) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t)\end{aligned}$$

△

Zadatak 6.12 Pretpostavite da je duljina telefonskog poziva u minutama eksponencijalno distribuirana s parametrom $\lambda = \frac{1}{10}$. Ako je netko prije vas došao u telefonsku govornicu, izračunajte vjerojatnost da ćete čekati

(a) više od 10 minuta,

(b) između 10 i 20 minuta.

Rješenje:
X=duljina telefonskog poziva u minutama $\implies X \sim$Exp$(\frac{1}{10})$.
$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot t}$, $t \geq 0$.

(a) $\mathbb{P}(X > 10) = 1 - F_X(10) = 1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot 10} = 1 - e^{-1} = 0.368$

(b) $\mathbb{P}(10 < X < 20) = F_X(20) - F_X(10) = e^{-\frac{1}{10}\cdot 20} - e^{-\frac{1}{10}\cdot 10} = e^{-2} - e^{-1} = 0.233$

△

Zadatak 6.13 Neka je $X \sim \mathrm{N}(70, 4)$. Izračunajte $\mathbb{P}((X - 68)^2 \geq 9)$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X - 68)^2 \geq 9) &= \mathbb{P}(|X - 68| \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(|X - 68| < 3) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(-3 < X - 68 < 3) = 1 - \mathbb{P}(65 < X < 71) = \\ &= \mathbb{P}(\frac{65 - 70}{2} < \frac{X - 70}{2} < \frac{71 - 70}{2}) \\ &= 1 - (\Phi(0.5) - \Phi(-2.5)) = 1 - (\Phi(0.5) - (1 - \Phi(2.5))) = \\ &= 1 - (0.6915 - 1 + 0.9938) = 0.3147\end{aligned}$$

△

Zadatak 6.14 Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Izračunajte:

(a) $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$,

(b) $\mathbb{P}(X^2 - 2\mu X \geq \sigma^2 - \mu^2)$.

Rješenje:
(a) $\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = \mathbb{P}(-3 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 3) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9973$
(b) $\mathbb{P}(X^2 - 2\mu X \geq \sigma^2 - \mu^2) = \mathbb{P}((X-\mu)^2 \geq \sigma^2) = \mathbb{P}(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \geq 1) = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq 1) + \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -1) = (1-\Phi(1)) + \Phi(-1) = (1-\Phi(1)) + (1-\Phi(1)) = 2(1-\Phi(1)) = 0.3173$

△

Zadatak 6.15 Neka je $X \sim U(0,1)$. Odredite distribuciju slučajne varijable

$$Y = -\frac{1}{\lambda}\ln X,$$

gdje je $\lambda > 0$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(-\frac{1}{\lambda}\ln x \leq y) = \mathbb{P}(\ln X \geq -\lambda y) \\ &= \mathbb{P}(X \geq e^{-\lambda y}) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y}, & y \leq 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle,

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \leq 0 \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

pa $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

△

Zadatak 6.16 U pravkutniku stranica duljine 3 cm i 4cm biramo slučajno točku. Izračunajte očekivanu udaljenost točke od najbliže stranice pravokutnika.

Rješenje: Označimo s X udaljenost točke od najbliže stranice pravokutnika. Tada je za $x \in [0, 3/2]$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \frac{(4-2x)(3-2x)}{4 \cdot 3} = -\frac{x^2}{3} + \frac{7x}{6}.$$

Odavde je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{x^2}{3} + \frac{7x}{6}, & 0 \leq x \leq 3/2 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

pa je

$$f_X(x) = F_X'(x) = (-\frac{2x}{3} + \frac{7}{6})1_{[0,3/2]}(x).$$

Odavde je

$$\mathbb{E}X = \int_0^{3/2} x(-\frac{2x}{3} + \frac{7}{6})\, dx = \frac{27}{48} = 0.5625.$$

$\triangle$

Aproksimacija binomne slučajne varijable

Teorem. (Poisson) Neka je $X_n \sim B(n, p_n)$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ za $0 < \lambda < \infty$ fiksan broj. Tada za svako $k = 0, 1, \ldots, n$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

△

Teorem najčešće koristimo u obliku:
za velike n ($n \geq 20$) i male p_n ($n \cdot p_n < 10$) je

$$\mathbb{P}(X_n = k) \approx \frac{\lambda_n^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_n} \quad , \quad \lambda_n = n \cdot p_n.$$

Zadatak 6.17 U telefonskoj centrali registrirano je 400 korisnika. Svaki korisnik u nekom određenom vremenskom intervalu poziva centralu s vjerojatnošću 0.01. Izračunajte vjerojatnost da je u promatranom vremenskom intervalu
(a) točno 5 korisnika pozvalo centralu,
(b) barem 3 korisnika pozvalo centralu.

Rješenje:

$n = 400$, $p = 0.01$, X =broj korisnika koji pozovu centralu u tom vrem.intervalu
$\Rightarrow X \sim B(400, 0.01)$, $\lambda = 400 \cdot 0.01 = 4 < 10$

(a) $\mathbb{P}(X = 5) \approx \frac{4^5}{5!} \cdot e^{-4} \approx 0.156$

(b) $\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) \approx 1 - (1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!}) \cdot e^{-\lambda} \approx$
≈ 0.76

△

Zadatak 6.18 U neko je skladište došlo 1000 porculanskih vaza. Vjerojatnost da se neka razbije tijekom transporta od tvornice do skladišta je 0.002. Neovisno o tome neke se vaze razbiju i unutar samog skladišta i to se događa s vjerojatnošću 0.0015 (vaze su u kutijama pa ista vaza može biti dva puta razbijena, ne znamo je li razbijena ili ne dok ne otvorimo kutije). Nađite vjerojatnost da je broj vaza razbijen u ukupnom procesu veći od 3.

Rješenje:

A :={vaza je razbijena u transportu} , B :={vaza je razbijena u skladištu}

Vjerojatnost da je vaza uništena je

$p = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0.002 + 0.0015 - 0.002 \cdot 0.0015 = 0.00349$

X =broj oštećenih vaza $\Rightarrow X \sim B(1000, p)$, $\lambda = 1000 \cdot 0.00349 < 10$.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \approx 1 - (1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}) \cdot e^{-\lambda} \approx 0.4627$

$\triangle$

Teorem. (Moivre Laplace) Neka je $0 < p < 1$ i $X_n \sim B(n,p)$. Tada za proizvoljne a,$b \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Ovo je specijalni slučaj tzv. centralnog graničnog teorema.
$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} e^{-x^2/2} dx = \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$,

gdje je Φ funkcija distirbucije jedinične normalne slučajne varijable.

Zadatak 6.19 Kolika je vjerojatnost da među 1000 novorođenčadi bude barem 490 dječaka, ako je za svako novorođenče jednako vjerojatno da bude dječak ili djevojčica?

Rješenje:

$n = 1000$, $p = \frac{1}{2}$, X =broj dječaka $\Rightarrow$ $X \sim B(1000, \frac{1}{2})$

$np = 500$, $npq = 250$

$\mathbb{P}(490 \leq X \leq 1000) \approx \Phi(\frac{1000-500}{\sqrt{250}}) - \Phi(\frac{490-500}{\sqrt{250}}) = \Phi(31.63) - \Phi(-0.63) =$
$= 1 - 0.2643 = 0.7357$

pri čemu smo koristili da je $\Phi(-0.63) = 1 - \Phi(0.63) = 1 - 0.7357 = 0.2643$.

$\triangle$

Zadatak 6.20 Prosjak dobije novčić od prolaznika s vjerojatnošću 0.05. Koliko prolaznika treba proći ulicom da bi prosjak sakupio barem 150 novčića s vjerojatnošću 0.95?

Rješenje:

n =broj prolaznika , X =broj novčića prosjak skupi $\Rightarrow \quad X \sim B(n, 0.05)$

$np = 0.05 \cdot n = \frac{n}{20}$, $npq = \frac{19 \cdot n}{20 \cdot 20}$

Tražimo n t.d. je

$$0.95 \leq \mathbb{P}(X \geq 150) = \mathbb{P}(150 \leq X \leq n) = \Phi(\frac{n-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{150-np}{\sqrt{npq}}) =$$
$$= \Phi(\sqrt{n} \cdot \frac{1-p}{\sqrt{pq}}) - \Phi(\frac{150-\frac{n}{20}}{\sqrt{\frac{19n}{20 \cdot 20}}}) \approx \text{za velike } n \approx 1 - \Phi(\frac{3000-n}{\sqrt{19n}})$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\frac{3000-n}{\sqrt{19n}}) \leq 1 - 0.95 = 0.05 = \Phi(-1.64)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3000-n}{\sqrt{19n}} \leq -1.64 \Rightarrow \quad n \geq 3429.$$

△

Vrijedi:

za $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\frac{X}{n} - p| < \varepsilon) = \mathbb{P}(np - n\varepsilon < X < np + n\varepsilon) = \mathbb{P}(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}} < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}) =$$
$$= \mathbb{P}(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) \approx \Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) - \Phi(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}})$$

Zadatak 6.21 Na prijemnom ispitu rješava se 40 zadataka i za svaki su ponuđena 4 odgovora, od kojih je samo jedan točan. Za točno zaokružen odgovor dobije se 15 bodova, a za pogrešno zaokružen se gubi 5 bodova. Kolika je vjerojatnost da se slučajnim odabirom ponuđenih odgovora prođe kvalifikacijski prag od 120 bodova?

Rješenje:

X = broj točno odgovorenih pitanja $\quad \Rightarrow \quad X \sim B(40, \frac{1}{4})$

Y = broj ostvarenih bodova $= 15 \cdot X - 5 \cdot (40 - X) = 20 \cdot X - 200$

$$\mathbb{P}(Y \geq 120) = \mathbb{P}(20X - 200 \geq 120) = \mathbb{P}(X \geq 16) = \mathbb{P}(16 \leq X \leq 40) \approx$$
$$\approx 1 - \Phi(\frac{16-40 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{40 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}}) = 0.0143$$

△

Zadatak 6.22 Kazalište koje prima 529 gledatelja ima dva ulaza i pored svakoga se nalazi jedna garderoba s n vješalica za kapute. Ako posjetitelji ulaze nezavisno jedan od drugoga i jednako vjerojatno na oba ulaza, koliki je najmanji n t.d. s vjerojatnošću 0.95 bude mjesta kapute svih posjetitelja baš u onoj garderobi pored ulaza na koji je taj posjetitelj ušao?

Rješenje:

$X =$ broj posjetitelja koji su ušli na prvi ulaz $\quad\Rightarrow\quad X \sim B(529, \frac{1}{2})$

Da bi bilo mjesta, mora vrijediti: $\quad 529 - n \leq X \leq n$, tj.

$0.95 \leq \mathbb{P}(529 - n \leq X \leq n) \approx \Phi(\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}) - \Phi(\frac{529-n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}) =$
$= \Phi(\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{2}}}) - \Phi(-\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{4}}}) = 1 - 2\cdot\Phi(-\frac{n-529\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{4}}})$
$\Rightarrow \quad -\frac{2n-529}{\sqrt{529\cdot\frac{1}{4}}} \leq -1.96 \quad\Rightarrow\quad n \geq 287.4$

△

Zadatak 6.23 Simetričnu kocku bacamo 4500 puta. Odredite interval u kojem možemo s vjerojatnošću 0.9 očekivati relativnu frekvenciju šestica.

Rješenje:

$n = 4500$, $p = \frac{1}{6}$, $X =$broj šestica koje padnu=frekvencija šestica
$\Rightarrow X \sim B(4500, \frac{1}{6})$, $\frac{X}{n} =$relativna frekvencija šestica

Tražimo $\varepsilon > 0$ t.d.

$$0.9 \leq \mathbb{P}(|\frac{X}{n} - p| < \varepsilon) \approx 1 - 2\cdot\Phi(-\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}})$$

$\Rightarrow \quad \Phi(-\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}) \leq 0.05 = \Phi(-1.64)$

$\Rightarrow \quad \varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}} \geq 1.64 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon \geq \frac{1.64\cdot 0.3726}{\sqrt{4500}} = 0.0091$

$\Rightarrow \quad$ traženi interval je $< p-\varepsilon, p+\varepsilon > = < 0.1575, 0.1757 >$.

△

Zadaci za vježbu

6.24 Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} cx^n, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite c.

(b) izračunajte $\mathbb{P}(X > x)$, za $0 < x < 1$.

6.25 Neprekidna slučajna varijabla X ima funkciju gustoće

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

i vrijedi $\mathbb{E}X = 0.5$.

(a) Izračunajte $\mathbb{P}(X < 0.5)$.

(b) Izračunajte $\mathrm{Var}X$.

6.26 Na nekom ispitu su bodovi normalno distribuirani s očekivanjem 76 i standardnom devijacijom 15. Najboljih 15 % studenata dobije ocjenu 5, a najlošijih 10 studenata ocjenu 1. Nađite:

(a) najmanji broj bodova potreban za ocjenu 5,

(b) najmanji broj bodova potreban za prolaz.

6.27 Neka je $X \sim \mathrm{N}(0,1)$. Pokažite da za $a \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(a) $\mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(X < -a)$,

(b) $\mathbb{P}(|X| > a) = 2\mathbb{P}(X > a)$,

(c) $\mathbb{P}(|X| < a) = 2\mathbb{P}(X < a) - 1$.

6.28 Neprekidna slučajna varijabla ima jediničnu **Cauchyevu razdiobu** ako joj je gustoća

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Postoji li $\mathbb{E}X$?

(b) Pokažite da $Y = \frac{1}{X}$ također ima jediničnu Cauchyevu razdiobu.

6.29 Ako je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem 5 i takva da je $\mathbb{P}(X > 9) = 0.2$, izračunajte $\mathrm{Var}X$.

6.30 Godišnje padaline (u cm) u nekom području su normalno distribuirane s očekivanjem 40 i standardnom devijacijom 4. Izračunajte vjerojatnost da će trebati barem 10 godina da količina padalina prijeđe 50 cm.

6.31 Zadana je funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X:

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2 \cdot e^{-a \cdot x} & \text{ako je } x > 0 \\ 0 & \text{ako je } x \leq 0 \end{cases}$$

Odredite c i izračunjate vjerojatnost da X poprimi vrijednosti u intervalu $\langle 0, \frac{1}{a} \rangle$.

6.32 Neki čovjek čeka na stanici vlak. Vrijeme u minutama koje provede čekajući je slučajna varijabla s funkcijom distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{4} \cdot x, & 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Odredite funkciju gustoće i nađite vjerojatnost da čovjek do dolaska vlaka čeka između 1 i 3 minuta. Također odredite vjerojatnost da čovjek čeka do dolaska vlaka više od 3 minute ako znamo da već stoji na stanici više od 1 minute .

6.33 Slučajna varijabla ima gustoću

$$f(x) = (\alpha - 1)x^{-\alpha}, \ x \geq 1,$$

gdje je $\alpha > 1$ konstanta. Izračunajte $\mathbb{E}X$.

6.34 Pretpostavimo da X ima jediničnu normalnu razdiobu. Izračunajte $\mathbb{E}[e^{t\,X}]$, $t \in \mathbb{R}$.

6.35 U prosjeku je 2% ljudi ljevoruko. Nađite vjerojatnost da je među 100 ljudi barem troje ljevaka.

6.36 Lord Farquaad organizira svečanu večeru u svom dvorcu. Pozvano je građanstvo i plemstvo. Građani moraju za večeru izdvojiti po 1 zlatnik, a plemići po 2 zlatnika. Čuvari na ulazu u dvorac puštaju jednog po jednog čovjeka, pri čemu je 3 puta vjerojatnije da se na ulazu pojavi građanin nego plemić. Koliko najmanje ljudi treba pustiti u dvorac da s vjerojatnošću većom od 0.95 lord Farquaad sakupi barem 500 zlatnika?

6.37 U nekom gradu su dva kina, koja imaju jednak broj sjedala. Svakog dana kina posjeti 1000 ljudi. Oba kina su jedako popularna pa svaki čovjek s jednakom vjerojatnošću i nezavisno od drugih bira bilo koje. Odredite najmanji broj sjedala u svakom kinu tako da bi s vjerojatnošću barem 0.95 u njima bilo mjesta za sve ljude?

6.38 Neka kompanija ima jeftine avionske letove iz Amsterdama za London. U avionu je 150 mjesta, a svaki putnik koji rezervira kartu se zaista vozi avionom s vjerojatnošću 0.9. Kompanija u svakom slučaju želi napuniti avion pa uvijek proda 160 rezervacija. Izračunajte vjerojatnost da u avionu neće biti mjesta.

6.39 Koliko puta treba baciti 3 simetrične kocke da bi s vjerojatnošću od barem 0.9 barem 50 puta dobili barem 2 šestice u jednom bacanju?

6.40 Promatramo sljedeći slučajni pokus: Marko baca kocku čije su stranice označene brojevima 2, 4, 6, 8, 10, 12, a Ana baca kocku čije su stranice označene brojevima 1, 3, 5, 7, 9, 11. Koliko puta treba ponoviti gore opisani slučajni pokus da bi s vjerojatnošću od barem 0.8 bili sigurni da će Marko u barem 120 pokusa dobiti na kocki veći broj od Ane?

6.41 Nadaleko poznata vještica Bellatrix bavi se vrlo unosnim poslom: čarolijom pretvara vjeverice u neke druge životinje koje se dobro prodaju na tržištu. Pošto još uvijek nije usavršila čaroliju, Bellatrix pretvara vjevericu u pegaza, jednoroga ili konja redom s vjerojatnostima 0.2, 0.3 ili 0.5. Trenutna cijena pegaza na tržistu je 5 zlatnika, dok jednorog i konj vrijede po 2 zlatnika. Koliko vjeverica Bellatrix treba naručiti da bi s vjerojatnošću od barem 0.95 zaradila barem 1000 zlatnika?

6.42 Turist dolazi u Las Vegas i odlučuje igrati kockarsku igru, takvu da u svakoj partiji ulaže 1 dolar, te ako dobije, osvaja 2 dolara plus što mu se vraća ulog od 1 dolara, a ako izgubi partiju gubi 1 uloženi dolar. Poznato je da je vjerojatnost dobitka u ovoj igri $\frac{1}{4}$. Naš je turist, vođen kockarskom groznicom, odigrao 240 partija. Kolika je vjerojatnost da turist nije na gubitku?

6.43 1920. godine su u Chicagu bila dva vlaka koja su se borila za 1000 putnika koji su u isti sat kretali iz Chicaga u Los Angeles. Pretpostavimo da putnici s jednakom vjerojatnošću odabiru svaki od vlakova. Koliko minimalno sjedala mora imati svaki vlak da bi s vjerojatnošću 0.99 bili sigurni da će svaki putnik imati svoje sjedalo?

6.44 Neki trgovac je glavni distributer porculanskih vaza za neki grad. On svaku od vaza naruči iz tvornice po cijeni od 80 kn, a prodaje ih trgovinama specijaliziranim za porculansko posuđe po cijeni od 90 kn. Međutim, pri prijevozu od tvornice do njegovog skladišta se razbije 5% vaza. Sve vaze koje stignu do njegovog skladišta uvijek uspješno proda trgovinama. Koliko vaza trgovac treba naručiti iz tvornice da s vjerojatnošću od barem 0.975 zaradi barem 10 000 kn?

6.45 Morsko dno u Zaljevu Bisera je bogato školjkama. Poznato je da se u prosjeku u svakoj četvrtoj školjci nalazi biser. Ronioc pri svakom zaronu izroni samo jednu školjku. Ako je ronioc izronio 150 školjaka, izračunajte vjerojatnost da je među školjkama barem dvostruko više školjaka sa biserom nego onih bez bisera.

6.46 U nekom gradu su se jednog kišnog dana na glavnom trgu prodavale dvije vrste kišobrana; jedna vrsta po 30 kn, a druga po 50 kn. Prodavač je na kraju dana zaključio da je svaki peti kupac kišobrana kupio skuplji kišobran. Ako je tog dana bilo 200 kupaca, izračunajte vjerojatnost da je prodavač zaradio barem 7 000 kn.

6.47 Rulet ima 18 crvenih polja, 18 crnih polja i jednu nulu. Pretpostavite da u svakoj igri igrate na crveno. Ako kuglica padne na crveno, onda dobijete 1 kn, a inače gubite 1 kn. Približno odredite vjerojatnost da ste nakon 50 igara na dobitku.

Rješenja: **6.24.** (a) $n+1$ (b) $1-x^{n+1}$ **6.27.** (a) 0.35 (b) 0.06 **6.26.** (a) 92 (b) 57 **6.28.** (a) ne **6.29.** 22.66 **6.30.** $(0.9938)^{10}$ **6.33.** Za $\alpha \leq 2$ X nema očekivanje, a za $\alpha > 2$ je $\mathbb{E}X = (\alpha-1)/(\alpha-2)$ **6.34.** $e^{t^2/2}$ **6.35.** 0.323 **6.36.** 424 **6.37.** 531 **6.38.** 0.0571 **6.39.** 804 **6.40.** 217 **6.41.** 400 **6.42.** ? **6.43.** ? **6.44.** 2142 **6.45.** 0 **6.46.** 0.0392 **5.11.** 0.4247

7

Funkcije izvodnice

Neka je X slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u skupu $\{0,1,2,3,\ldots\}$ s tablicom distribucije

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}.$$

Definicija. **Funkcija izvodnica** (kraće: FI) slučajne varijable X je funkcija g_X definirana sa

$$g_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_n s^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} p_n s^n, \ |s| < 1.$$

Napomena.

(a) $g_X(s) = \mathbb{E}[s^X]$, $|s| < 1$

(b) $p_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0,1,2,\ldots$, odakle slijedi da funkcija izvodnica jednoznačno određuje razdiobu:

$$X \sim Y \iff g_X = g_Y.$$

(c) Ako postoji $\mathbb{E}[X^n]$, onda je $g_X^{(n)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$, za $n \in \mathbb{N}$. Specijalno,

$$\mathbb{E}X = g'_X(1) \ \text{ i } \ \mathrm{Var}X = g''_X(1) + g'_X(1) - [g'_X(1)]^2.$$

(d) Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable, onda je

$$g_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(s) = g_{X_1}(s) \cdot g_{X_2}(s) \cdots g_{X_n}(s), \ |s| < 1.$$

Zadatak 7.1 Bacamo 3 simetrične kocke. Izračunajte vjerojatnost da suma brojeva koji su pali bude jednaka 9.

Rješenje: Neka je

$$X_i = \text{ broj koji je pao na } i\text{-toj kocki}, i = 1, 2, 3.$$

Tada su X_1, X_2 i X_3 nezavisne i vrijedi

$$g_{X_i}(s) = \frac{1}{6}s + \frac{1}{6}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{6}s^4 + \frac{1}{6}s^5 + \frac{1}{6}s^6 = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}, \ i = 1, 2, 3$$

pa je

$$\begin{aligned} g_{X_1+X_2+X_3}(s) &= g_{X_1}(s) \cdot g_{X_2}(s) \cdot g_{X_3}(s) = \frac{s^3(1-s^6)^3}{6^3(1-s)^3} \\ &= \frac{s^3}{6^3}(1 - 3s^6 + 3s^{12} - s^{18})(1-s)^{-3} \\ &= \frac{s^3}{6^3}(1 - 3s^6 + 3s^{12} - s^{18}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-s)^n \\ &= \frac{s^3}{6^3}(1 - 3s^6 + 3s^{12} - s^{18}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{3+n-1}{n} (-s)^n \\ &= \frac{s^3}{6^3}(1 - 3s^6 + 3s^{12} - s^{18}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} s^n. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 9) = \langle s^9 \rangle g_{X_1+X_2+X_3}(s) = \frac{1}{6^3}\left(\binom{2+6}{6} - 3 \cdot \binom{2+0}{2}\right) = \frac{25}{216}.$$

$\triangle$

Zadatak 7.2 Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ nezavisne slučajne varijable, gdje su $\lambda, \mu > 0$. Odredite razdiobu slučajne varijable $Z = X + Y$.

Rješenje: Prvo izračunajmo funkciju izvodnicu za X:

$$g_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} s^n = e^{\lambda s} e^{-\lambda} = e^{\lambda(1-s)}.$$

Zbog nezavisnosti je

$$g_Z(s) = g_{X+Y}(s) = g_X(s) g_Y(s) = e^{\lambda(1-s)} e^{\mu(1-s)} = e^{(\lambda+\mu)(1-s)}.$$

Funkcija izvodnica jedinstveno određuje razdiobu pa je

$$Z = X + Y \sim P(\lambda + \mu).$$

△

Zadatak 7.3 Neka su $X_1, \ldots, X_n \sim G(p)$ nezavisne slučajne varijable. Odredite razdiobu slučajne varijable

$$T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

Rješenje: Prvo izračunajmo funkciju izvodnicu za X_i:

$$g_{X_i}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = n)s^n = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1}s^n = \frac{ps}{1-qs}.$$

Zbog nezavisnosti je

$$\begin{aligned}
g_T(s) &= g_{X_1+\ldots+X_n}(s) = g_{X_1}(s)\cdots g_{X_n}(s) = \left(\frac{ps}{1-qs}\right)^n \\
&= p^n s^n (1-qz)^{-n} = p^n s^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}(-qz)^k = p^n s^n \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{n+k-1}{k}(-qz)^k \\
&= p^n z^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k s^{n+k} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-q} p^n q^{k-n} s^k.
\end{aligned}$$

Funkcija izvodnica jedinstveno određuje razdiobu pa je

$$\mathbb{P}(T = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}, \quad \text{za } k \geq n.$$

△

Napomena. Slučajnu varijabla T iz prethodnog zadatka se zove **negativna binomna** slučajna varijabla. U nizu nezavisnih ponavljanja pokusâ (pri čemu pojedini pokus ima kao ishod uspjeh ili neuspjeh, gdje je vjerojatnost uspjeha p) slučajna varijabla T ima sljedeću interpretaciju:

$$T = \text{ vrijeme } n\text{-tog uspjeha.}$$

Zadatak 7.4 Neka su $N, X_1, X_2, X_3, \ldots$ nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, \ldots\}$, pri čemu su $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jednako distribuirane. Neka je g_{X_1} funkcija izvodnica za X_i, a g_N funkcija izvodnica za N. Dokažite da je funkcija izvodnica za

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

dana s

$$g_Y = g_N \circ g_{X_1}.$$

(Ako je $N(\omega) = 0$, onda je $Y(\omega) = 0$.)

Rješenje:

$$\begin{aligned}
g_Y(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1+\ldots+X_N=n)s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1+\ldots+X_N=n, N=k)s^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1+\ldots+X_k=n, N=k)s^n = \text{ nezavisnost} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1+\ldots+X_k=n)\mathbb{P}(N=k)s^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1+\ldots+X_k=n)s^n)\mathbb{P}(N=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} g_{X_1+\ldots+X_n}(s)\mathbb{P}(N=k) = \text{ nezavisnost} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} g_{X_1}(s)\cdots g_{X_n}(s)\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty}(g_{X_1}(s))^k\mathbb{P}(N=k) \\
&= g_N(g_{X_1}(s)) = (g_N \circ g_{X_1})(s).
\end{aligned}$$

△

Zadatak 7.5 Harryev restoran dostavlja pizze. U petak navečer Harry je neplanirano završio u njegovom omiljenom baru pa u subotu baš i nije bio u potpunosti koncentriran pri primanju narudžbi za pizze. Broj ljudi koji je naručio pizzu ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$, a Harry s vjerojatnošću $p \in \langle 0, 1\rangle$ točno zapisuje adrese.

(a) Odredite distribuciju uspješno dostavljenih pizza.

(b) Izračunajte vjerojatnost da je te subote barem jedna pizza uspješno dostavljena.

Rješenje:

(a) Neka je

$$X_k = \begin{cases} 1, & k\text{-ta narudžba ima toču adresu} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, k = 1, 2, 3\ldots$$

i $N =$ broj narudžbi. Dakle,

$$X_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & 1 \end{pmatrix}.$$

i $N \sim P(\lambda)$. Definirajmo $Y =$ broj uspješno dostavljenih pizza$= \sum_{k=1}^{N} X_k$. Iz prethodnog zadatka slijedi

$$g_Y(s) = g_N(g_{X_1}(s)) = g_N((1-p)\cdot 1 + p \cdot s) = e^{\lambda p(s-1)}$$

pa je $Y \sim P(\lambda p)$, jer funkcija izvodnica jedinstveno određuje razdiobu.

(b) $\mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - e^{-\lambda p}$.

△

Zadatak 7.6 Nađite očekivani broj bacanja simetrične kocke do pojave uzastopnih šestica.

Rješenje: Označimo $X =$ broj bacanja potreban da po prvi put padnu uzastopne šestice. Tada je $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 0$ i $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}$. Za $n \geq 3$ definirajmo

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ u prvom bacanju je pala šestica}\} \\ B &= \{\text{ u drugom bacanju je pala šestica}\}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) &= \overbrace{\mathbb{P}(X = n, A \cap B)}^{=0(\text{ jer je } n \geq 3)} + \mathbb{P}(X = n, A \cap B^c) + \mathbb{P}(X = n, A^c) = \\ &= 0 + \mathbb{P}(X = n | A \cap B^c) \cdot \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(X = n | A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c) \\ &= \mathbb{P}(X = n-2) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \mathbb{P}(X = n-1) \cdot \frac{5}{6} \end{aligned}$$

pa je

$$\mathbb{P}(X = n)s^n = \frac{5}{36} s^2 \mathbb{P}(X = n-2) s^{n-2} + \frac{5}{6} s \mathbb{P}(X = n-1) s^{n-1},$$

odakle sumiranjem dobijemo

$$\sum_{n=3}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n = \frac{5}{36} s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n + \frac{5}{6} s \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n.$$

Stoga imamo jednakost

$$g_X(s) - \frac{1}{36}s^2 = \frac{5}{36}s^2 g_X(s) + \frac{5}{6} s g_X(s)$$

i dobijemo

$$g_X(s) = \frac{s^2}{36 - 30s - 5s^2}.$$

Dakle,

$$\mathbb{E}X = g_X'(1) = 42.$$

△

Zadaci za vježbu

7.7 Neka je g_X funkcija izvodnica slučajne varijable X. Odredite funkciju izvodnicu slučajne varijable $aX+b,\ a,b \in \mathbb{R}$.

7.8 Neka je X uniformno distribuirana na skupu $\{-a,-a+1,\ldots,0,\ldots,b\}$, gdje su $a,b>0$. Odredite funkciju izvodnicu slučajne varijable X.

7.9 Baca se simetrični novčić. Svaki put kada padne pismo se baca simetrična kocka. Kada padne glava stanemo s igrom. Nađite funkciju izvodnicu sume svih brojeva koji su pali na kocki.

7.10 Ploča za pikado je podijeljena na 10 jednakih dijelova označenih brojevima 1, 2, 3, $\ldots$, 10. Robin je početnik u pikadu i s jednakom vjerojatnošću pogađabilo koji dio na ploči (i ne može promašiti ploču). Izračunajte vjerojatnost da Robin u 3 nezavisna gađanja osvoji točno 24 boda.

7.11 * Neka je g_X funkcija izvodnica slučajne varijable X. Pokažite da ze sve $\alpha > 0$ vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X+\alpha}\right] = \int_0^1 s^{\alpha-1} g_X(s)\,\mathrm{d}s.$$

7.12 * Pokažite da je nemoguće napraviti dvije kocke koje poprimaju različite vrijednosti s različitim vjerojatnostima (nesimetrične kocke) tako da kada bacamo dvije takve kocke ukupan rezultat bude uniformno distribuiran na $\{2,3,\ldots,12\}$.

Rješenja: **7.7.** $g_{aX+b}(z) = z^b\, g_X(z^a)$ **7.8.** $g_X(s) = \frac{s^{-a}-s^{b+1}}{(a+b+1)(1-s)}$ **7.9.** $(2 - \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)})^{-1}$ **7.10.** 0.028