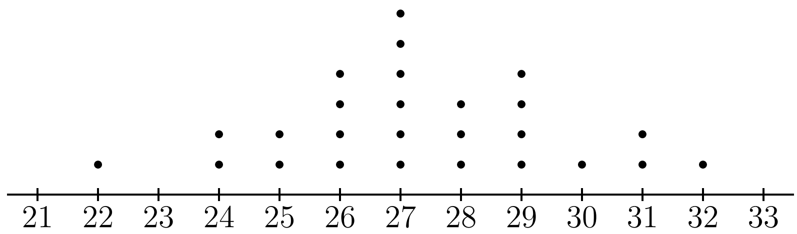
Zadaci

Zad 1.1 Zadan je dijagram točaka kao u Primjeru 1.5 koji opisuje mjerenja vezana uz vrijeme potrebno za izvođenje neke operacije u sekundama:



(a) Izračunajte aritmetičku sredinu i varijancu.

(b) Izračunajte medijan i interkvartil.

(c) Skicirajte dijagram pravokutnika.

Zad 2.1 Slučajno se bira točka unutar kvadrata duljine stranice 2. Označimo s X najmanju udaljenost te točke od stranica kvadrata. Nađite funkciju gustoće i matematičko očekivanje od X.

Zad 2.2 Neka je $X \sim N(0,1)$. Dokažite da je $X^2 \sim \chi^2(1)$.

Zad 3.1 Funkcija izvodnica kumulanata slučajne varijable X je

$$C_X(t) = 2\left(\frac{1}{(1-t)^{10}} - 1\right).$$

Izračunajte matematičko očekivanje, drugi moment i varijancu sl. var. X.

Zad 3.2 Neka je $X \sim U(0,1)$.

(a) Izračunajte funkciju izvodnicu momenata sl. var. $Y = -\ln X$

(b) Odredite razdiobu od X.

Zad 4.1 Je li $f(x,y) = 6x^2y$, $0 < x, y < 1$ funkcija gustoće neprekidnog slučajnog vektora (X,Y). Ako jest, izračunajte $P(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < y < 1)$.

Zad 4.2 Zadana je funkcija

$$F(x,y) = 1 - e^{-x} - 2e^{-2y} + 2e^{-(x+2y)}, \quad x, y > 0.$$

Je li F funkcija distribucije neprekidnog sl. vektora (X,Y)? U slučaju da jest odredite distribuciju sl. var. X i Y.

Zad 4.3 Neka su $X \sim Exp(1)$ i $Y \sim U(0,1)$ nezavisne slučajne varijable. Izračunajte $\mathbb{P}(X + Y \geq 1)$.

Zad 4.4 Slučajni vektor (X,Y) ima gustoću

$$f(x,y) = xe^{-x-xy}, \quad x, y > 0.$$

Izračunajte $\mathbb{E}[\frac{1}{X(Y+1)}]$. Jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne?

Zad 4.5 Simetrična kocka se baca 2 puta. Označimo s X manji, a s Y veći od brojeva koji su pali. Jesu li X i Y nezavisne sl. var.?

Zad 4.6 Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\nu)$ nezavisne slučajne varijable, $\lambda, \mu > 0$.

(a) Dokažite da $S = X + Y \sim P(\lambda + \mu)$.

(b) Dokažite da je uvjetna distribucija od X uz uvjet $S = s$ binomna. Odredite joj parametre.

Zad 4.7 Broj odlazaka aktuara s posla nakon redovnog radnog vremena tijekom radnog tjedna modelira se pomoću binomne slučajne varijable X s parametrima (n, θ) gdje je $n = 5$, a $\theta = \frac{4}{5}$. Za uvjetnu razdiobu ukupnog vremena Y koje je aktuar proveo na poslu tijekom tjedna (u satima) ako je taj tjedan morao na poslu ostati dulje x dana, vrijedi:

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = 4(x + 10), \quad \mathrm{Var}[Y|X = x] = x.$$

(a) Koliko u srednjem sati aktuar provodi u uredu tijekom tjedna?

(b) Izračunajte $\mathrm{Var}Y$.

Zad 4.8 Broj šteta N po portfelju istovrsnih nezavisnih polica osiguranja ima Poissonovu razdiobu s očekivanjem $\mu > 0$. Kada se šteta dogodi, njezin iznos $X_i (i = 1, 2, \ldots)$ ima gama razdiobu $\Gamma(\alpha, \frac{1}{\lambda})$, $\alpha, \lambda > 0$ i iznosi šteta su nezavisni od broja šteta. Označimo sa $S = X_1 + \ldots + X_N$ ukupni iznos šteta u tom portfelju. Izrazite $\mathbb{E}S$ i $\mathrm{Var}S$ preko parametara μ, α, λ.

Zad 4.9 Neka su $X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ nezavisne slučajne varijable. Dokažite:

$$S = X_1 + \ldots + X_n \sim \Gamma(n, \frac{1}{\lambda}).$$

Zad 4.10 Neka su $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne slučajne varijable. Dokažite:

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Zad 4.11 Neka su $X \sim \Gamma(\alpha, \frac{1}{\lambda})$ i $Y \sim \Gamma(\beta, \frac{1}{\lambda})$ nezavisne slučajne varijable, $\alpha, \beta, \lambda > 0$.

(a) Izračunajte

$$\alpha_3(X) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sigma(X)}\right)^3\right].$$

(b) Odredite razdiobu od $Z = X + Y$.

Zad 5.1 Iz portfelja istovrsnih polica na slučajan način je izabrano njih 500. Poznato je da se šteta po jednoj polici tijekom godine pojavljuje s vjerojatnosti 0.04 neovisno o ostalim policama. Po jednoj polici osiguranja moguća je najviše jedna šteta. Izračunajte (približno) vjerojatnost da na kraju godine u uzorku neće biti više od 30 šteta.

Zad 7.1 Nađite procjenitelja maksimalne vjerodostojnosti za parametar $\lambda > 0$ iz populacije s $Exp(\lambda)$-razdiobom.

Zad 7.2 Zadana je populacija s populacijskom gustoćom

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

i nepoznatim parametrom $\theta > 1$. Nađite MLE za θ.

Zad 7.2 Populacijska gustoća je Bernoullijeva s parametrom uspjeha $p \in (0, 1)$. Nađite MLE za p.

Kako biste procijenili parametar uspjeha binomne populacijske razdiobe s poznatim parametrom $m \in \mathbb{N}$?

Zad 7.4 U opaženom uzorku iz $Exp(\lambda)$-distribucije se nalaze vrijednosti $x_1, \ldots, x_n$ i za m vrijednosti se zna da je veće od $y > 0$. Nađite MLE za λ.

Zad 7.5 Podaci o štetama po 4000 polica osiguranja koje su bile pod rizikom točno godinu dana su prikazani frekvencijskom tablicom:

broj šteta i	frekvencija f_i
0	3288
1	642
2	66
≥ 3	4
ukupno	4000

Pretpostavimo da je broj šteta $X \sim P(\lambda)$. Odredite funkciju vjerodostojnosti te provjerite da je $\hat{\lambda} = 0.196551$ procjena maksimalne vjerodostojnosti na temelju danog opaženog uzorka.

Zad 8.1 Osiguravajuće društvo treba procjenu srednje vrijednosti šteta po policama određene klase koje su nastale tijekom prošle godine. Detaljni podaci o tim štetama sugeriraju da bi standardna devijacija mogla biti oko 450 kn. Ako se želi procijeniti srednja vrijednost iznosa šteta do na ± 80 kn točnosti uz 90% pouzdanosti, kolika je veličina uzorka potrebna?

Zad 9.1 Podaci o štetama po 4000 polica osiguranja koje su bile pod rizikom točno godinu dana iz Zadatka 7.5 su prikazani frekvencijskom tablicom:

broj šteta i	frekvencija f_i
0	3288
1	642
2	66
≥ 3	4
ukupno	4000

Pretpostavimo da je broj šteta $X \sim P(\lambda)$ i MLE procjena parametra je bila $\hat{\lambda} = 0.196551$. Provedite χ^2-test prilagodbe Poissonovog modela navedenim podacima.

Zad 9.2 Štete se mogu klasificirati na jednostavne, standardne i složene. Prošle je godine medu svim štetama bilo 18.4% jednostavnih, 70.3% standardnih i 11.3% složenih. U slučajnom uzorku od 120 ovogodišnih šteta opaženo je 15 jednostavnih, 87 standardnih i 18 složenih šteta. Pomoću χ^2-testa testirajte da li se raspodjela ovogodišnjih šteta značajno razlikuje od razdiobe prošlogodišnjih šteta.

Zad 9.3 U svrhu usporedbe iznosa premija osiguranja kućanstava koje naplaćuju dva osiguravajuća društva A i B, na slučajan način i nezavisno jedan od drugoga, odabrana su dva uzorka od po pet polica tog tipa iz svakog od navedenih društva. Opaženi iznosi premija su:
društvo A: 175 155 162 186 148
društvo B: 152 141 129 120 115

Pretpostavljamo da su iznosi premija normalno distribuirani s istim varijancama: redom $N(\mu_A, \sigma^2)$ i $N(\mu_B, \sigma^2)$.

(a) Procijenite zajedničku varijancu oba uzorka.

(b) Konstruirajte i izračunajte opaženi 95% pouzdani interval za razliku parametara očekivanja $\mu_A - \mu_B$.

(c) Kolika je p-vrijednost u jednostranom testu:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \qquad H_1 : \mu_A > \mu_B.$$

Je li (uz razinu značajnosti 5%) opažena uzoračka sredina iznosa premija osiguranja kućanstva A značajno veća od odgovarajuće uzoračke sredine za društvo B?

Zad 10.1 Za zadanih 12 vrijednosti varijable poticaja X izmjerene su pripadne vrijednosti $y_1, y_2, \ldots, y_{12}$ varijable odziva. Na taj način je dobiven uzorak $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, 12$ za koji vrijedi

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 516.4 \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 22741.34 \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i = 14821$$
$$\sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 18695125 \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 650264.8.$$

(a) Uz pretpostavku da je model regresijski, procijenite pravac regresije.

(b) Konstruirajte i procijenite 95% pouzdani interval za koeficijent smjera regresijskog pravca.

Zad 11.1 30 zaposlenika jednog poduzeća podijeljeno je u tri jednake grupe. Jedna grupa je pohađala tečaj A, druga tečaj B, a treća je kontrolna skupina (nije pohađala nikakav tečaj). Oba tečaja su istog tipa i nakon završenog tečaja zaposlenici su pisali test. Rezultati su sljedeći:

kontrola:	55 74 64 62 37 78 50 44
tečaj A:	63 79 60 75 89 58 75 72 84 69
tečaj B:	64 55 57 73 51 60 62 78 68.

Sprovedite test nulhipoteze da nema razlike u distribuciji rezultata testa izmedu tri navedena skupine