MATEMATIČKA ANALIZA I

primjeri i zadaci

Ante Mimica

8. siječnja 2010.

Sadržaj

1

Funkcije

2

Nizovi

Definicija. **Niz** je funkcija

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Oznake: (a_n) ili $\{a_n\}$

Zadatak 2.1 Napišite prvih nekoliko članova nizova zadanih općim članom:

$$\text{(a)}\quad a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{(b)}\quad a_n = (-1)^n \qquad \text{(c)}\quad a_n = 2n.$$

Zadatak 2.2 Odredite opće članove nizova:

(a) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$;

(b) $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$;

(c) $1, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{17}{16}, \frac{13}{16}, \frac{37}{64}, \ldots$.

Rješenje. (b) $a_n = 2^n - 1$; (c) Niz je zapravo $\frac{2}{2}, \frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{17}{16}, \frac{26}{32}, \ldots$ pa je $a_n = \frac{n^2+1}{2^n}$.

△

Primjer 2.1 (Gaussova dosjetka) Sumu $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$ možemo izračunati na sljedeći način. Zbrajanjem sljedeća dva retka

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\ S_n = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

dobijemo

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ sumanada}} = n(n+1),$$

odakle je $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Primjer 2.2 (a) **Aritmetički niz** s prvim članom a_1 i razlikom d je niz (a_n) zadan općim članom:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,\ n \in \mathbb{N}.$$

Svojstva:

- $a_{n+1} - a_n = d$
- $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},\ n \geq 2$ (zbog čega se i zove aritmetički niz)
- $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, jer je

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1 + d) + \ldots + (a_n + (n-1)d) = n \cdot a_1 + (1 + 2 + \ldots + (n-1)) \\ &= n \cdot a_1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) \\ &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

(b) **Geometrijski niz** s prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 1$ je niz (a_n) zadan općim članom:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Svojstva:

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
- $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}},\ n \geq 2$ (zbog čega se i zove geometrijski niz)
- $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ slijedi iz formule

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(koja se lako provjeri) za $a = 1$ i $b = q$.

Zadatak 2.3 Izračunajte:

(a) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n+1)$ (b) $1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \ldots + \left(-\frac{2}{5}\right)^n$

(c) $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$.

Rješenje.

(c) Primijetimo da je

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

pa sumiranjem po $k = 1, 2, \ldots, n$ dobijemo

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + n,$$

odakle je

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Napomena. Sume možete računati i koristeći *WolframMathematica*™(pogledajte također i *WolframAlpha*™)

```
In[1]:= Sum[k^2, {k, 1, n}]
Out[1]= 1/6 n (1 + n) (1 + 2 n)
```

Definicija. Niz (a_n) je **rastući** ako vrijedi

$$a_n \leq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Niz (a_n) je **strogo rastući** ako vrijedi

$$a_n < a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Analogno definiramo **padajući** i **strogo padajući** niz.

Zadatak 2.4 Ispitajte monotonost sljedećih nizova:

(a) $a_n = \frac{n-1}{n}$ (b) $a_n = n^2$ (c) $a_n = 2^{-n}$
(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (e) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+9}$ (f) $a_n = \operatorname{arctg} \frac{1-n}{1+n}$
(g) $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+n}$.

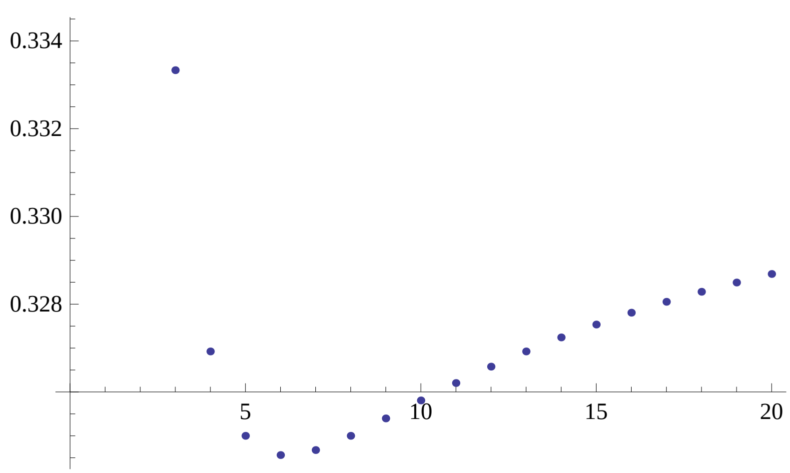
Napomena. Nacrtajmo prvih 20 članova niza $a_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2+n}$ u *WolframMathematica*™:

```
In[1]:= niz = Table[(n^2 + 1)/(3 n^2 + n), {n, 1, 20}]

Out[1]= {1/2, 5/14, 1/3, 17/52, 13/40, 37/114, 25/77, 13/40, 41/126,
         101/310, 61/187, 145/444, 17/52, 197/602, 113/345, 257/784,
         145/442, 65/198, 181/551, 401/1220}

In[2]:= ListPlot[niz]

Out[2]=
```



Definicija. Niz (a_n) je **odozgo omeđen** ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je

$$a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Niz (a_n) je **odozdo omeđen** ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je

$$a_n \geq m, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 2.5 Ispitajte omeđenost nizova

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{n-1}{n} \qquad \text{(b)} \quad a_n = 2^n.$$

Rješenje. (b) Niz (a_n) nije odozgo omeđen. Matematičkom indukcijom se može pokazati da je

$$2^n > n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Drugi način da se pokaže gornja nejednakost je koristeći binomni teorem:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

gdje je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{i} \quad n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Za $a = b = 1$ dobijemo

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} > \binom{n}{1} = n.)$$

Iz Arhimedovog aksioma slijedi da za svaki $M > 0$ možemo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > M$ pa je $a_{n_0} = 2^{n_0} > n_0 > M$, odakle vidimo da je niz neomeđen.

Definicija. Niz (a_n) konvergira k $L \in \mathbb{R}$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N) \text{ takav da je } \ |a_n - L| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Može se pokazati da je broj $L \in \mathbb{R}$ jedinstven i zovemo ga **limes** niza (a_n) ze označavamo s

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \qquad \text{ili} \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n.$$

U tom slučaju kažemo da niz (a_n) **konvergentan**.

Zadatak 2.6 Neka je (a_n) niz. Dokažite da je

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0.$$

Rješenje.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ zakav da je $|a_n - 0| < \varepsilon$, za $n \geq n_0$. Drugačije zapisano,

$$||a_n| - 0| = |a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon, \quad \text{za} \quad n \geq n_0.$$

Dakle, $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Analogno.

Zadatak 2.7 Neka je (a_n) niz takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i neka je $c \in \mathbb{R}$. Po definiciji dokažite da je i $(c \cdot a_n)$ konvergentan niz i da je

$$\lim_{n\to+\infty} (c \cdot a_n) = 0.$$

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $c \neq 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \quad \text{za} \quad n \geq n_0$$

pa je

$$|c \cdot a_n| = |c||a_n| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon, \quad \text{za} \quad n \geq n_0,$$

odakle slijedi tvrdnja.

Zadatak 2.8 Dokažite po definiciji da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Rješenje. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada po Arhimedovom aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n_0\sqrt{\varepsilon} > 1$$

(alternativno, uzmemo $n_0 := \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$). Za $n \geq n_0$ je

$$|\frac{1}{n^2} - 0| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} < \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})^2} = \varepsilon.$$

Napomena. Slično kao u prethodnom zadatku se može pokazati da je za $p > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

(Primijetite da je po definiciji npr. $n^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln n}$.)

Napomena. Na predavanju je pokazano da za konvergentne nizove (a_n) i (b_n) i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi:

· $(\lambda a_n + \mu b_n)$ je konvergentan i

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} a_n + \mu \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

· $(a_n \cdot b_n)$ je konvergentan i

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

· ako je $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, onda je i $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergentan i

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}.$$

Zadatak 2.9 Izračunajte limese:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n-1}{3n+2}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-n+2}{2n^3-n^2+1}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^3}{2n^3-n+2}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^3(n^2+n+1)^2}{n^7-50n+5}$ (e) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\ldots+2n+1}$ (f) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n - \frac{(n-1)^5}{(n+1)^4}\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3}$.

Napomena. U *WolframMathematica*™:

```
In[1]:= Limit[n - (n - 1)^5/(n + 1)^4, n -> Infinity]

Out[21]= 9
```

Na predavanju je dokazan sljedeći

Teorem. (Teorem o sendviču) Neka su $(a_n), (b_n)$ i (c_n) nizovi takvi da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \ \forall n \geq m.$$

Ako (a_n) i (c_n) konvergiraju prema istom realnom broju $L \in \mathbb{R}$, onda je i (b_n) konvergentan s istim limesom L:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

■

Zadatak 2.10 Izračunajte

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}\sqrt{n}}{n^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2\cos n + 8n}{n^3+1}$.

Rješenje. (b) Dovoljno je dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n \operatorname{arctg}\sqrt{n}}{n^3}\right| = 0,$$

što slijedi po teoremu o sendviču.

$\triangle$

Zadatak 2.11 Neka je $q \in \langle -1, 1\rangle$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0.$$

Rješenje. Ako je $q = 0$, onda je $q^n = 0$ pa tvrdnja vrijedi. Zbog Zad 2.6 je dovoljno dokazati da je $\lim_{n\to+\infty}|q^n| = \lim_{n\to+\infty}|q|^n = 0$ pa možemo pretpostaviti da je $q \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je $\frac{1}{q} > 1$ pa je po binomnom teoremu

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{q}\right)^n &= \left(1 + (\frac{1}{q} - 1)\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{\left(\frac{1}{q}-1\right)^k}_{>0} \geq n\left(\frac{1}{q}-1\right),\end{aligned}$$

odakle dobijemo

$$0 \leq q^n \leq \frac{1}{\frac{1}{q}-1}\cdot\frac{1}{n} \to 0, \quad \text{kada } n \to +\infty.$$

Po teoremu o sendviču je

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0.$$

Zadatak 2.12 Izračunajte:

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n-2}}{2^n-2} \quad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+3^n}{1+3^n} \quad \text{(c)} \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+6^n}{2^n+(-7)^n}.$$

Zadatak 2.13 Izračunajte:

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\ldots+(-1)^n\frac{2^n}{3^n}\right) \quad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty}\frac{1+5^n}{5+25+125+\ldots+5^n}$$

$$\text{(c)} \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}}.$$

Zadatak 2.14 Dokažite da je

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ \forall a > 0.$$

Rješenje. (a) Zbog monotonosti funkcije $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ na $[0, +\infty\rangle$ vrijedi

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

S druge strane, po binomnom teoremu dobijemo za $n \geq 2$ dobijemo

$$\begin{aligned} n = (\sqrt[n]{n})^n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(\sqrt[n]{n} - 1)^k}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + \binom{n}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \end{aligned}$$

pa je

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{2}{n},$$

odakle je

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Dakle,

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 1, \quad \text{kada} \ \ n \to +\infty$$

pa je po teoremu o sendviču

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(b) Pretpostavimo prvo da je $a \geq 1$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \geq a$ (koji postoji po Arhimedovom aksiomu; jedan takav m je sigurno $\lfloor a \rfloor + 1$). Tada je

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}, \ \forall n \geq m$$

pa tvrdnja u ovom slučaju slijedi iz teorema o sendviču i (a). Ako pretpostavimo da je $a \in \langle 0, 1\rangle$, onda je $b = \frac{1}{a} > 1$ pa je po prvom slučaju primijenjenom na $b > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dakle,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ a > 0,} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.}$$

Zadatak 2.15 Izračunajte

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(10+3\cos n)^n+6^n}{(10+3\cos n)^n+3^n}.$$

Rješenje. (a) Za $n \geq 1$ vrijedi

$$4 \leq \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \leq \sqrt[n]{3\cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{3} \to 4, \quad \text{kada} \quad n \to +\infty$$

pa je po teoremu o sendviču traženi limes jednak 4.
(b) Primijetite da za $n \geq 1$ vrijedi

$$1 \leq \frac{(10+3\cos n)^n+6^n}{(10+3\cos n)^n+3^n} \leq 1 + \frac{6^n}{(10+3\cos n)^n} \leq 1 + \frac{6^n}{7^n} \to 1, \quad \text{kada } n \to +\infty$$

pa je po teoremu o sendviču traženi limes jednak 0.

Zadatak 2.16 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$$

Definicija. Niz (a_n) **teži k** $+\infty$ ako

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \;\; \text{takav da je} \;\; a_n > M, \forall n \geq n_0$$

i pišemo $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Niz (a_n) **teži k** $-\infty$ ako

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \;\; \text{takav da je} \;\; a_n < -M, \forall n \geq n_0$$

i pišemo $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Definicija. Definiramo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Niz (a_n) **konvergira** u $\overline{\mathbb{R}}$ ako konvergira u $\mathbb{R}$ ili teži k $-\infty$ ili $+\infty$.

Zadatak 2.17 Dokažite da je za $q > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty.$$

Rješenje. Za $n \geq 1$ po binomnom teoremu dobijemo

$$q^n = [(q-1)+1]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^k \geq 1 + n(q-1) > n(q-1).$$

Neka je $M > 0$ proizvoljan. Odaberimo $n_0 \geq 1$ takav da je

$$n_0(q-1) > M$$

Takav n_0 postoji po Arhimedovom aksiomu (ili konkretno možemo uzeti $n_0 = \lfloor \frac{M}{q-1} \rfloor + 1 > M$).

Tada je za $n \geq n_0$

$$q^n > n(q-1) \geq n_0(q-1) > M$$

pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Limesi se ponekad računaju koristeći rekurzivno zadane nizove.

Primjer 2.3 (Fibonaccijev niz) Fibonaccijev niz je niz (a_n) zadan na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{za } n \geq 3. \end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom se može pokazati tzv. **Binetova formula** za n-ti član Fibonaccijevog niza:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Iz Binetove formule slijedi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

pri čemu je $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ poznat kao **omjer zlatnog reza**.

Na predavanju je dokazan sljedeći

Teorem. Ako je niz (a_n) rastući (padajući) i odozgo (odozdo) omeđen, onda je konvergentan i

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \ (\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}).$$

■

Primjer 2.4 Dokažimo na još jedan način da je za $q \in \langle 0, 1 \rangle$ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Definirajmo $a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a_{n+1} = q \cdot a_n.$$

Primijetimo da je niz (a_n) padajući:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

i odozdo omeđen:

$$a_n = q^n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

pa je i konvergentan po prethodnom teoremu. Označimo $L = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. Tada iz

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

u limesu dobijemo $L = qL$, odnosno

$$L \underbrace{(1-q)}_{>0} = 0$$

pa je $L = 0$.

Zadatak 2.18 Izračunajte:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a>1$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n}$, $a>1$ (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n}$, $a>1, p>0$ (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n!}$.

Rješenje. (a) Primijetimo da $a_n = \frac{a^n}{n!}$ zadovoljava

$$a_{n+1} = \frac{a}{n+1} a_n.$$

Tada je za $n \geq n_0 := \lfloor a \rfloor + 1 > a$ ispunjeno

$$\frac{a}{n+1} < \frac{a}{a+1} < 1,$$

odakle zaključujemo da je niz (a_n) padajući počevši od n_0-og člana. Očito je i odozdo omedjen s 0 pa je konvergentan. Neka je $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Tada iz

$$a_{n+1} = \frac{a}{n+1} a_n$$

u limesu dobijemo $L = 0 \cdot L = 0$, odakle je $L = 0$.

(b) Niz $a_n = \frac{n}{a^n}$ zadovoljava rekurzivnu relaciju

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{a \cdot n} a_n.$$

Tada je

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\iff \frac{n+1}{a\cdot n} < 1 \\ &\iff n > \frac{1}{a-1} \end{aligned}$$

pa je niz (a_n) padajući počevši od člana s indeksom

$$n_0 = \lfloor \frac{1}{a-1} \rfloor + 1.$$

Pošto je $a_n = \frac{n}{a^n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je niz odozdo omeđen pa je i konvergentan. Označimo $L = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Tada iz rekurzivne relacije u limesu dobijemo

$$L = \frac{L}{a},$$

odakle je

$$L \underbrace{(a-1)}_{>0} = 0$$

pa je $L = 0$.

(c) Neka je $n_0 = \lfloor p \rfloor + 1 > p$. Tada je za $n \geq n_0$

$$0 < \frac{n^p}{a^n} \leq \frac{n^{n_0}}{a^n} = \left(\frac{n}{b^n}\right)^{n_0},$$

gdje je $b = \sqrt[n_0]{a} > \sqrt[n_0]{1} = 1$ pa je po dijelu (b) ovog zadatka

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{b^n}\right)^{n_0} = \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{b^n}\right)^{n_0} = 0^{n_0} = 0.$$

Po teoremu o sendviču zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.$$

(d) Primijetimo da opći član niza čiji limes tražimo možemo zapisati kao

$$\frac{n^p}{n!} = \frac{n^p}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n!}$$

produkt dva konvergentna niza s limesima 0 (po (a) i (c)) pa je i promatrani niz konvergentan s limesom $0 \cdot 0 = 0$.

Napomena. Prethodni zadatak kaže da faktorijel raste brže od eksponencijalne funkcije (lako se provjeri tvrdnja i za $a \leq 1$ (vidite Zadatak 2.58)) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ a \in \mathbb{R};}$$

eksponencijalna funkcija raste brže od potencije:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0,\ a > 1,\ p > 0;}$$

faktorijel raste brže od potencije:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n!} = 0,\ a > 1,\ p > 0.}$$

Zadatak 2.19 Izračunajte limese:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 + 3^n}{n^3 + 4^n}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + n!}{(n-1)! + 2n!}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+4} + n \cdot (-4)^{n+2}}{2^n + n \cdot (-4)^n}$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n(n+1)^4 + 5^n n^2(3n^2+1)}{5^n(n+1)^4}$.

Zadatak 2.20 Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i odredite mu limes (ako postoji).

Zadatak 2.21 Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n}), \; n \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i odredite mu limes (ako postoji).

Napomena. U *WolframMathematica*™:

```
In[1]:=a[1]:= 3
       a[n_]:= (a[n - 1] + 3/a[n - 1])/2
In[2]:=Table[N[a[n], 10], {n, 1, 10}]

Out[2]= {3.000000000, 2.000000000, 1.750000000, 1.732142857, 1.732050810,
         1.732050808, 1.732050808, 1.732050808, 1.732050808, 1.732050808}
```

Primijetite da je

```
In[3]:= N[Sqrt[3], 10]

Out[3]= 1.732050808
```

Zadatak 2.22 Ispitajte konvergenciju niza

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korijena}}, \; n \in \mathbb{N}$$

i odredite mu limes (ako postoji).

Zadatak 2.23 Niz (a_n) je zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{9 - 2a_n}{7 - 2a_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

Zadatak 2.24 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n + \sqrt{n^2 + n + 1}}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[4]{n^4 + n^3 + n^2 + n + 1} - n)$.

Na predavanju ste pokazali da je niz

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

rastući i odozgo omeđen pa je i konvergentan. Označimo njegov limes s e. Dakle,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}.$$

Zadatak 2.25 Izračunajte limese:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+1}$.

Rješenje.

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} = e^{\frac{1}{2}}\cdot 1 = \sqrt{e}\end{aligned}$$

Definicija. Niz (b_n) je **podniz** niza (a_n) ako postoji strogo rastuća funkcija

$$p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

takva da je

$$b_n = a_{p_n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Na predavanjima ste dokazali sljedeće teoreme

Teorem. Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom L, onda je svaki njegov podniz također konvergentan s istim limesom L.

■

Teorem. Svaki niz ima monoton podniz. ■

Korolar. Svaki omeđeni niz ima konvergentni podniz. ■

Definicija. Gomilište niza (a_n) je element $L \in \overline{\mathbb{R}}$ takav da postoji podniz (a_{n_k}) niza (a_n) takav da je
$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = L.$$

Primjer 2.5 $a_n = (-1)^n$ ima 2 gomilišta: -1 i 1, jer je
$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} = -1 \\ a_{2k} &= (-1)^{2k} = 1. \end{aligned}$$

Primijetite da (a_n) nije konvergentan.

Primjer 2.6 Promotrimo niz $a_n = q^n$, gdje je $q < -1$. Pokazat ćemo da niz (a_n) nije konvergentan tako da pronađemo dva različita gomilišta (primijetite da je $|q| > 1$ pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$):
$$\begin{aligned} a_{2k} &= q^{2k} = (|q|^2)^k \to +\infty, \quad \text{kada} \quad k \to +\infty \\ a_{2k-1} &= q^{2k-1} = (|q|^2)^k \underbrace{q^{-1}}_{<0} \to -\infty, \quad \text{kada} \quad k \to +\infty. \end{aligned}$$

Dakle,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} \text{ne postoji}, & q \le -1 \\ 0, & -1 < q < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1. \end{cases}}$$

Napomena. Niz koji ima više od jednog gomilišta ne može biti konvergentan.

Označimo skup svih gomilišta niza (a_n) s A. Primijetite da (a_n) ima barem jedan konvergentan podniz u $\overline{\mathbb{R}}$(!) pa je $A \neq \emptyset$ i tada ima smisla

Definicija. Neka je (a_n) niz i neka je A skup njegovih gomilišta u $\overline{\mathbb{R}}$. Definiramo **limes superior** i **limes inferior** niza (a_n) s
$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \sup A \qquad \text{i} \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n = \inf A.$$

Zadatak 2.26 Izračunajte
$$\text{(a)} \quad \limsup_{n\to+\infty} \frac{1 + n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1} \qquad \text{(b)} \quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{(1 + (-1)^n)^n + n\cos(n\pi)}{2n+1}$$

Dokazan je i sljedeći

Teorem. Niz (a_n) je konvergentan ako i samo ako je

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

i tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Zadatak 2.27 Neka je

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} + (1+a)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da niz (a_n) bude konvergentan.

Rješenje. Odredimo gomilišta niza (a_n):

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} a_{2k} &= \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{3^{2k} + (-2)^{2k}}{3^{2k+1} + (-2)^{2k+1}} + (1+a)\cdot 0\right] = \frac{1}{3}\\
\lim_{k\to+\infty} a_{4k-1} &= \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{3^{4k-1} + (-2)^{4k-1}}{3^{4k} + (-2)^{4k}} + (1+a)\cdot(-1)\right] = -\frac{2}{3} - a\\
\lim_{k\to+\infty} a_{4k-3} &= \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{3^{4k-3} + (-2)^{4k-3}}{3^{4k-2} + (-2)^{4k-2}} + (1+a)\cdot(1)\right] = \frac{4}{3} + a
\end{aligned}$$

Da bi niz (a_n) bio konvergentan, mora vrijediti

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n$$

pa skup gomilišta mora biti jednočlan. Dakle, mora vrijediti

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - a = \frac{4}{3} + a,$$

odakle zaključujemo da je $a = -1$.

Za računanje limesa je koristan sljedeći

Teorem. (Stolzov teorem) Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da je (b_n) strogo rastući i neograničen. Ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

tada postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

■

Zadatak 2.28 Izračunajte:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Rješenje. (a) Stavimo $a_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}$ i $b_n = n$. Vidimo da je (b_n) strogo rastući i neograničen pa je po Stolozovom teoremu traženi limes jednak

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{1} = 1.$$

(b) Primijetimo da je

$$\ln\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right) = \ln n - \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n}{n} = \frac{\ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n}}{n}.$$

Po Stolzovom teoremu je

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n}}{n} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln\frac{n+1}{1} + \ln\frac{n+1}{2} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n+1}) - (\ln\frac{n}{1} + \ln\frac{n}{2} + \ldots + \ln\frac{n}{n})}{1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1
\end{aligned}$$

pa je traženi limes jednak $e^1 = e$.

Zadatak 2.29 Neka je (a_n) konvergentan niz takav da je $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Rješenje. Primijetite da je po Stolzovom teoremu

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln a_1 + \ldots + \ln a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \ln a_n$$

pa je zbog neprekidnosti funkcije ln,

$$\ln \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \ln \lim_{n\to+\infty} a_n,$$

odakle slijedi tvrdnja.

Zadatak 2.30 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Zadaci za vježbu

2.31 Izračunajte:

$$\text{(a) } 3+8+13+18+\ldots+(5n+3) \qquad \text{(b) } \frac{3}{7}-\frac{9}{49}-\ldots+\left(-\frac{3}{7}\right)^n$$

$$\text{(c) } 1+8+27+\ldots+n^3.$$

2.32 Dokažite da je niz s općim članom

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+3}+2n}$$

strogo padajući.

2.33 Ispitajte monotonost sljedećih nizova

$$\text{(a)} \quad a_n = \left(\frac{n-8}{1-n}\right)^2, \ n \geq 2, \qquad \text{(b)} \quad a_n = \frac{n^2+2n+1}{3n^2+n}$$

$$\text{(c)} \quad a_n = \frac{1}{\operatorname{arctg}(-n)} \cdot \frac{3n-2}{n^2+n+10} \qquad \text{(d)} \quad a_1 = 10, \quad a_{n+1} = \frac{2+a_n^2}{2a_n}, \ n \in \mathbb{N}.$$

2.34 Ispitajte ograničenost sljedećih nizova

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{n^2}{n^2+1} \quad \text{(b)} \quad a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+4} \quad \text{(c)} \quad a_n = \frac{n^3}{n+1}.$$

2.35 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^3+n}{n^4+1} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(n - \frac{n^2+2n}{n+5}\right)$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\ldots+2n}{n^2+1} \qquad \text{(d)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{n^2+1}.$$

2.36 Izračunajte limese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(n - \frac{(n-a)^3}{(n+1)^2}\right), \qquad \text{u ovisnosti o parametru } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^n}{1+2+2^2+\ldots+2^n} \qquad \text{(c)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right).$$

2.37 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin n}{n^2+n+1}.$$

2.38 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}{n+1}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+n^2})$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[4]{n^4+n^2+1})$.

2.39 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n(2n^3+1)+3^n n(n^2+1)}{3^n(2n^3+1)}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n+1)(3n+2)(n+1)!}{(4n+3)^3 n!}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+n^{2009}}{n!+2009^n}$.

2.40 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n+2\sqrt{n^3+1}}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+2^n+4^n+8^n+32^n}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n})$.

2.41 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^{n}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5n^3+1}{5n^3-1}\right)^{2n^3}$.

2.42 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n\pi \rfloor}{n}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n2^n+1}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{4}{n^4}}$ (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{\lfloor n\sqrt{3} \rfloor}$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3+\cos n}$ (f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n+2]{3^n+4^{n+1}}$.

2.43 Izračunajte $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ i $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ za

(a) $a_n = \cos^n n\pi$ (b) $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$ (c) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

Koji nizovi su konvergentni?

2.44 Dokažite da za niz zadan rekurzivno s

$$a_{n+1} = \frac{3a_n-1}{3-a_n},\ n \in \mathbb{N}$$

vrijedi $a_n = \dfrac{(2^{n-1}+1)a_1 - 2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1-(2^{n-1}-1)a_1}$.

2.45 Dokažite da niz Fibonaccijevih brojeva (a_n) zadovoljava

$$a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n.$$

2.46 Niz (a_n) je zadan rekurzivno:

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{2a_n},\ n, \geq 1.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

2.47 Niz (a_n) je zadan rekurzivno:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n + 2},\ n, \geq 1.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

2.48 Niz (a_n) je zadan rekurzivno:

$$a_1 = 0.5,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{5},\ n, \geq 1.$$

Dokažite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

2.49 Nađite rekurzivno zadan niz (a_n) takav da mu je limes jednak $\sqrt{7}$.

2.50 Koristeći rekurzivno zadani niz dokažite da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{(n+1)!} = 0.$$

2.51 Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{5 + \sqrt{5 + \ldots + \sqrt{5}}}}_{n \text{ korijena}}.$$

2.52 Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdots \sqrt{3}}}}_{n \text{ korijena}}.$$

2.53 Je li niz

$$a_n = \frac{2^n + (-5)^n}{3^n + 4^n},\ n \in \mathbb{N}$$

konvergentan?

2.54 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n \text{ puta}} 1.$$

2.55 Dokažite po definiciji da je za $p > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

2.56 Dokažite po definiciji da je

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty.$$

2.57 Dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

koristeći teorem o sendviču i binomni teorem.

2.58 Dokažite da je za $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

2.59 Neka je (a_n) rastući niz takav da je $a_1 > 0$. Ako je $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_2}{a_1 \cdot S_2} + \frac{a_3}{S_2 \cdot S_3} + \ldots + \frac{a_n}{S_{n-1} \cdot S_n} \right) = \frac{1}{a_1}.$$

2.60 Neka je (a_n) konvergentan niz. Dokažite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

2.61 Izračunajte

$$\lim_{n\to+\infty} n \left[\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n} \right].$$

2.62 Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da niz s općim članom

$$a_n = \sqrt[n]{5 + (2a)^{(-1)^n \cdot n}}$$

konvergira.

2.63 Dokažite da je za $p > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

2.64 Dokažite da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e.$$

2.65 Dokažite da niz s općim članom

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n, \ n \in \mathbb{N}$$

konvergira. Njegov limes c se zove **Euler-Mascheronijeva konstanta** i $c \approx 0.5772156$.

3

Infimum i supremum

Definicija. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $M \in \mathbb{R}$ **supremum** skupa A ako je

(i) M **gornja međa** skupa A, tj.

$$a \leq M, \ \forall a \in A.$$

(ii) M **najmanja gornja međa** skupa A, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) \ \text{ takav da je } \ a > M - \varepsilon.$$

Može se pokazati da je supremum (ako postoji) jedinstven pa uvodimo oznaku $\sup A$.

Ako je još $M \in A$, onda kažemo da je M **maksimum** skupa A i M označavamo s $\max A$.

Definicija. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $M \in \mathbb{R}$ **supremum** skupa A ako je

(i) m **donja međa** skupa A, tj.

$$a \geq m, \ \forall a \in A.$$

(ii) m **najveća donja međa** skupa A, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) \ \text{ takav da je } \ a < m + \varepsilon.$$

Može se pokazati da je infimum (ako postoji) jedinstven pa uvodimo oznaku $\inf A$.

Ako je još $m \in A$, onda kažemo da je m **minimum** skupa A i m označavamo s $\min A$.

Realni brojevi se zadaju aksiomatski. Izdvajamo dva aksioma:

(A15) Svaki neprazan i odozgo ograničen skup u $\mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

(**aksiom potpunosti**)

(A16) Ako su $a, b > 0$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$b < n \cdot a.$$

(**Arhimedov aksiom**)

Primjer 3.1 Skup racionalnih brojeva nije potpun. Npr. skup

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \colon r^2 < 3\}$$

nema supremum u $\mathbb{Q}$.

Neka je $r \in A$. Tada je $r^2 < 3$ pa je $r < \sqrt{3}$. Dakle, $\sqrt{3}$ je gornja međa skupa A.

Dokažimo da je $\sqrt{3}$ najmanja gornja međa skupa A. Neka je $\varepsilon > 0$. Iz činjenice da između svaka dva različita realna broja postoji neki racionalni broj(sjetite se da svaki realni broj možemo aproksimirati nizom racionalnih brojeva), zaključujemo da postoji $r \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$\sqrt{3} - \varepsilon < r < \sqrt{3}.$$

Primijetite da je $r \in A$, odakle slijedi tvrdnja.

Dakle $\sup A = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Zadatak 3.1 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{2n-2}{n+3} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.2 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan podskup takav da postoji $\sup A$. Definirajmo

$$-A = \{-a \colon a \in A\}.$$

Dokažite da postoji $\inf(-A)$ i da je

$$\inf(-A) = -\sup A.$$

Rješenje. Trebamo pokazati da je:

(i) $-\sup A$ donja međa skupa $-A$:

Iz

$$a \leq \sup A, \ \forall a \in A$$

vidimo da je

$$-a \geq -\sup A, \ \forall a \in A.$$

(ii) $-\sup A$ najveća donja međa skupa $-A$:

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $a \in A$ takav da je

$$a > \sup A - \varepsilon$$

pa je

$$-a < -\sup A + \varepsilon.$$

Dakle, $-\sup A$ je najveća donja međa skupa $-A$ pa zbog jedinstvenosti infimuma slijedi

$$\inf(-A) = -\sup A.$$

Zadatak 3.3 Dokažite da svaki neprazan i odozdo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$.

Rješenje. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđen. Tada je $-A$ neprazan i odozgo omeđen pa po aksiomu potpunosti postoji $\sup(-A) \in \mathbb{R}$. Po prethodnom zadatku postoji $\inf(-(-A)) = \inf A$.

Zadatak 3.4 Neka je $A \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$ takav da je $\inf A > 0$. Definirajmo

$$\frac{1}{A} = \left\{\frac{1}{a} : a \in A\right\}.$$

Dokažite da je

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}.$$

Rješenje. Za $a \in A$ vrijedi

$$a \geq \inf A > 0$$

pa je

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{\inf A},$$

odakle zaključujemo da je $\frac{1}{\inf A}$ gornja međa skupa $\frac{1}{A}$. Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $\varepsilon' > 0$ takav da je

$$\frac{\varepsilon'}{\inf A(\inf A + \varepsilon')} = \varepsilon.$$

Tada postoji $a \in A$ takav da je $a < \inf A + \varepsilon'$, odakle je

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{\inf A + \varepsilon} = \frac{1}{\inf A} - \frac{\varepsilon}{\inf A(\inf A + \varepsilon)} = \frac{1}{\inf A} - \varepsilon,$$

odakle zaključujemo da je $\frac{1}{\inf A}$ najmanja gornja međa skupa A pa je zbog jedinstvenosti supremuma

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}.$$

Zadatak 3.5 Odredite infimum i supremum skupova:

(a) $A = \left\{3\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) : x \in [0, 3\pi\rangle\right\}$ (b) $A = \left\{\frac{x^2 - 2}{x^2 + 4} : x \in \mathbb{R}\right\}$

(c) $A = \left\{x + \frac{4}{x} : x > 0\right\}.$

Zadatak 3.6 Odredite infimum i supremum skupova:

$$\text{(a)}\quad A=\left\{\frac{n^2+4m^2}{mn}: m,n\in\mathbb{N}\right\}\qquad \text{(b)}\quad A=\left\{\frac{m^2-5mn+6m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N}, m<4n\right\}$$

Zadatak 3.7 Odredite infimum i supremum skupa

$$A=\left\{\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}: m,n\in\mathbb{N}\right\}$$

Rješenje. Očito je

$$\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}>0,\ \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

Primijetimo da je za $n=1$

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}=\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m^2+m+5}=0$$

pa je $\inf A=0$. S druge strane je

$$\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}\le\frac{n^2}{5n^2}\le\frac{1}{5},\ \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

Za $m=1$ slijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{m^2+m+5n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2+5n^2}=\frac{1}{5}$$

pa je $\sup A=\frac{1}{5}$.

Zadatak 3.8 Odredite infimum i supremum skupa

$$A=\left\{\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+3}: n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rješenje. Neka je

$$x_n=\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+3}=-\frac{1}{(n+3)(n+4)}.$$

Lako se provjeri da je (x_n) rastući niz. Također je

$$x_n\le 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

pa je (x_n) konvergentan. Tada je

$$\begin{aligned}\inf A&=x_1=-\frac{1}{20}=\min A,\\ \sup A&=\lim_{n\to+\infty}x_n=0.\end{aligned}$$

Zadatak 3.9 Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo

$$A + B = \{a + b\colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Dokažite da je

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Rješenje. Vrijedi

$$a + b \leq \sup A + \sup B,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

pa je $\sup A + \sup B$ gornja međa skupa $A + B$. Dokažimo da je to i najmanja gornja međa. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $a \in A$ i $b \in B$ takvi da je

$$a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$$

pa je

$$a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Napomena. Analogno se dokaže da za odozdo omeđene i neprazne podskupove $A, B \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Zadatak 3.10 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{m - n - 1}{mn + 4m + 3n + 12}\colon m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.11 Neka su $A, B \subseteq [0, +\infty\rangle$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo

$$A \cdot B = \{a \cdot b\colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Dokažite da je

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Rješenje. Ako je $\sup A = 0$, onda je $A = \{0\}$ pa je $A \cdot B = \{0\}$ i tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je $\sup A > 0$ i $\sup B > 0$. Tada je za $a \in A, b \in B$

$$a \cdot b \leq \sup A \cdot \sup B$$

pa je $\sup A \cdot \sup B$ gornja međa skupa $A \cdot B$. Dokažimo da je i najmanja gornja međa. Neka je $0 < \varepsilon < \sup A \cdot \sup B$. Tada za

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2 \sup A} > 0 \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2 \sup B} > 0$$

postoje $a \in A$ i $B \in B$ takvi da je

$$a > \sup A - \varepsilon_1 \quad \text{i} \quad b > \sup B - \varepsilon_1,$$

odakle je

$$\begin{aligned} a \cdot b &> (\sup A - \varepsilon_1)(\sup B - \varepsilon_1) = \sup A \cdot \sup B - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4 \sup A \cdot \sup B} \\ &> \sup A \cdot \sup B - \varepsilon. \end{aligned}$$

Napomena. Analogno se dokaže da je za neprazne $A, B \subseteq [0, +\infty\rangle$

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

Općenito, ako su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni i omeđeni, onda je

$$\sup(A \cdot B) = \max\{\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B\}$$
$$\inf(A \cdot B) = \min\{\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B\}$$

Zadatak 3.12 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{n - \sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{m^2+1}{3m^2+m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rješenje. Primijetimo da je

$$S = A \cdot B,$$

gdje su

$$A = \left\{ \frac{n - \sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{m^2+1}{3m^2+m} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

i

$$A, B \subseteq [0, +\infty\rangle.$$

Odredimo prvo infimum i supremum skupa A:

Zbog $n \geq \sqrt{n}$ vrijedi

$$\frac{n - \sqrt{n}}{n+1} \geq 0, \ foralln \in \mathbb{N}$$

pa je 0 donja međa skupa A. Ako uzmemo $n = 1$, onda vidimo da je $0 \in A$ pa je

$$\inf A = \min A = 0.$$

S druge strane je

$$\frac{n - \sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{n}{n+1} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

pa je 1 gornja međa skupa A. Zbog

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n+1}=1$$

slijedi da je

$$\sup A = 1.$$

Odredimo infimumu i supremum skupa B:

Neka je $x_m = \frac{m^2+1}{3m^2+m}$. Tada je

$$x_m \le x_{m+1} \iff \ldots \iff m \ge 6$$

pa je

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5 > x_6 \le x_7 \le x_8 \le x_9 \le \ldots .$$

Dakle,

$$\inf B = \min B = x_6 = \frac{37}{114}$$

i

$$\sup B = \max\{x_1, \lim_{m\to+\infty} x_m\} = \max\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\} = \frac{1}{2} = \max B.$$

Konačno, zbog $A, B \subseteq [0, +\infty\rangle$ je

$$\sup S = \sup A \cdot \sup B = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\inf S = \inf A \cdot \inf B = 0 \cdot \frac{37}{114} = 0 = \min S.$$

Zadatak 3.13 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{\frac{4n-13}{n+2}\cdot\frac{12-5m}{m+3} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zadatak 3.14 Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni neprazni skupovi. Dokažite da je

$$\inf(A\cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Rješenje. Pretpostavimo da je $\inf A \le \inf B$ (inače zamijenimo uloge skupova A i B). Tada je $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf A$.

Ako je $x \in A\cup B$, onda je $x \in A$ ili $x \in B$ pa je $x \ge \inf A$ ili $x \ge \inf B \inf A$. Dakle, $\inf A$ je donja međa skupa $A\cup B$. Dokažimo da je to najveća donja međa. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $a \in A \subseteq A\cup B$ takav da je $a < \inf A + \varepsilon$ pa je $\inf A$ i najveća donja međa skupa $A\cup B$. Tvrdnja sada slijedi iz jedinstvenosti infimuma.

Napomena. Analogno se dokaže da je za odozgo omeđene i neprazne podskupove $A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$\sup(A\cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Općenitije, vrijedi:

(i) ako su $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđeni i neprazni, onda je

$$\sup(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \max\{\sup A_1, \ldots, \sup A_n\};$$

(ii) ako su $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni i neprazni, onda je

$$\inf(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \min\{\inf A_1, \ldots, \inf A_n\};$$

Zadatak 3.15 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.16 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \left\lfloor (-1)^n \frac{n}{n+1} \right\rfloor + \left(\frac{1 + (-1)^n \cdot 2}{3} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.17 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ 1 + \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{2} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.18 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ -\frac{n + (-1)^n}{n} \colon n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{-2 + \operatorname{th} x \colon x > 0\}.$$

Napomena. Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća i neprekidna funkcija onda je za omeđeni skup $A \subset \mathbb{R}$

$$\inf f(A) = f(\inf A), \quad \sup f(A) = f(\sup A).$$

U slučaju padajuće funkcije vrijedi

$$\inf f(A) = f(\sup A), \quad \sup f(A) = f(\inf A).$$

Zadatak 3.19 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ -\operatorname{arctg}\left((-1)^n \left(-2 + \cos\frac{1}{4n} \right) \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadatak 3.20 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadaci za vježbu

3.21 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{7n-4}{2n+1} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.22 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ odozdo i odozgo ograničen. Dokažite da je

$$A \subseteq [\inf A, \sup A]$$

3.23 Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažite:

(a) $\sup[a, b\rangle = b$;

(b) $\inf\langle a, b\rangle = a$.

3.24 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ 2\sin(3x+\pi) \colon x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} \right\rangle \right\}.$$

3.25 Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan podskup takav da postoji $\inf A$. Dokažite da postoji $\sup(-A)$ i da je

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

3.26 Odredite infimum i supremum skupa (koristeći nizove)

$$A = \left\{ \frac{10-3n}{n+3} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.27 Neka je $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni podskupovi takvi da je A odozgo omeđen .i B odozdo omeđen. Definiramo

$$A - B = \{a - b \colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Dokažite da je

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

3.28 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{2n+m+mn+2}{2n+18m-4mn-9} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.29 Odredite infimum i supremum skupova:

(a) $A = \left\{ \dfrac{m}{m+n} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}$ (b) $A = \left\{ \dfrac{m}{n} \colon m, n \in \mathbb{N}, m < 3n \right\}$

3.30 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \colon m, n \in \mathbb{N}, m < 10n \right\}.$$

3.31 Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \log_{1/e} \frac{n^2 + n}{n^2 + 4} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.32 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{2 - 3m}{m+1} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.33 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{2n^2 + n}{n^2 + 1} \cdot \frac{5m + 1}{1 + (-1)^m \cdot 9m} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.34 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \cos(n\pi) \frac{n^2 + 1}{3n^2 + n} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.35 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \sin \frac{4n^2 + 1}{n^2 + 1} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.36 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{(m+n)^2}{2^{mn}} \colon m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.37 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{n^2 - 9}{5n^2 + 3n + 2} \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3.38 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \colon a, b, c > 0 \right\}.$$

3.39 Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \sqrt{3n} - \lfloor \sqrt{3n} \rfloor \colon n \in \mathbb{N} \right\}.$$

4

Neprekidnost i limes

Definicija. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $c \in I$. Funkcija

$$f\colon I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$$

ima **limes u točki** c jednak $L \in \mathbb{R}$ ako za svaki niz (x_n) u $I \setminus \{c\}$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L.$$

Može se pokazati da je, u slučaju da postoji, limes funkcije jedinstven pa pišemo

$$\lim_{x\to c} f(x) = L.$$

Vrijedi:

Teorem. (Cauchyeva definicija limesa)

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f\colon I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ ima limes $L \in \mathbb{R}$ u točki $c \in I$ ako i samo ako vrijedi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) \text{ td. } \ x \in I, 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

■

Primjer 4.1 (a) Dokažimo po Cauchyevoj definiciji limesa da je

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\}$ i $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x - 2| < \delta$ vrijedi

$$|x + 2| \leq |x - 2| + 4 < \delta + 4 \leq 1 + 4 = 5$$

pa je

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5\delta \leq \varepsilon.$$

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}(x^2+4)=4+4=8.$$

Napomena. Ako funkcije $f\colon I\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ i $g\setminus\{c\}\colon I\to\mathbb{R}$ imaju limese u točki $c\in I$ i ako su $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, onda

· funkcija $\lambda f+\mu g$ ima limes u točki c i vrijedi

$$\lim_{x\to c}(\lambda f(x)+\mu g(x))=\lambda\lim_{x\to c}f(x)+\mu\lim_{x\to c}g(x);$$

· funkcija $f\cdot g$ ima limes u točki c i vrijedi

$$\lim_{x\to c}f(x)g(x)=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x);$$

· u slučaju da je $\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$ i funkcija $\frac{f}{g}$ ima limes u točki c i vrijedi

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}.$$

Definicija. Neka je $I\subset\mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f\colon I\to\mathbb{R}$ je **neprekidna** u $c\in I$ ako za svaki niz (x_n) u I vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=c\implies\lim_{f(x_n)}=f(c).$$

Teorem. (Cauchyeva definicija neprekidnosti)

Neka je $I\subseteq\mathbb{R}$ otvoreni interval. Funkcija $f\colon I\to\mathbb{R}$ je neprekidna u točki $c\in I$ ako i samo ako vrijedi

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\text{ td. }\; x\in I,|x-c|<\delta\implies|f(x)-f(c)|<\varepsilon.$$

■

Napomena. Na predavanjima ste pokazali da su sve elementarne funkcije neprekidne na njihovim prirodnim domenama.

Zadatak 4.1 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1},\ n\in\mathbb{N}$ (c) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3-a^3}{h},\ a\in\mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1},\ m,n\in\mathbb{N}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}.$

Definicija. Kažemo da $f\colon I\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ ima limes u točki $c\in I$ jednak $+\infty$ ako

$$(\forall M>0)(\exists\delta>0)\ \text{ td. }\ x\in I, 0<|x-c|<\delta \implies f(x)>M.$$

Pišemo

$$\lim_{x\to c} f(x)=+\infty.$$

Analogno definiramo limes jednak $-\infty$.

Primjer 4.2 Dokažimo po definiciji da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

Neka je $M>0$ proizvoljan. Za $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ vrijedi

$$0<|x|<\delta=\frac{1}{\sqrt{M}} \implies \frac{1}{x^2}>\frac{1}{\frac{1}{M}}=M.$$

Definicija. Kažemo da $f\colon\langle-\infty,a\rangle\to\mathbb{R}$ ima limes u $-\infty$ jednak $L\in\mathbb{R}$ ako

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists M>0)\ \text{ td. }\ x<-M \implies |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Pišemo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$

Analogno definiramo limes u $+\infty$.

Primjer 4.3 (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$ i $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$

(b) Dokažimo po definiciji da je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

Neka je $\varepsilon>0$. Tada za $M=\frac{1}{\varepsilon^2}$ vrijedi

$$x>M \implies \left|\frac{1}{\sqrt{x}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{M}}=\varepsilon.$$

Zadatak 4.2 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-3)(3x+5)(4x-5)}{3x^3+x^2-x+1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{100x}{x^2-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x-4}{\sqrt{x^4+1}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-8x+1}{3x+1}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-5+6}+x)$.

Napomena. Vrijedi analogon teorema o sendviču: ako je

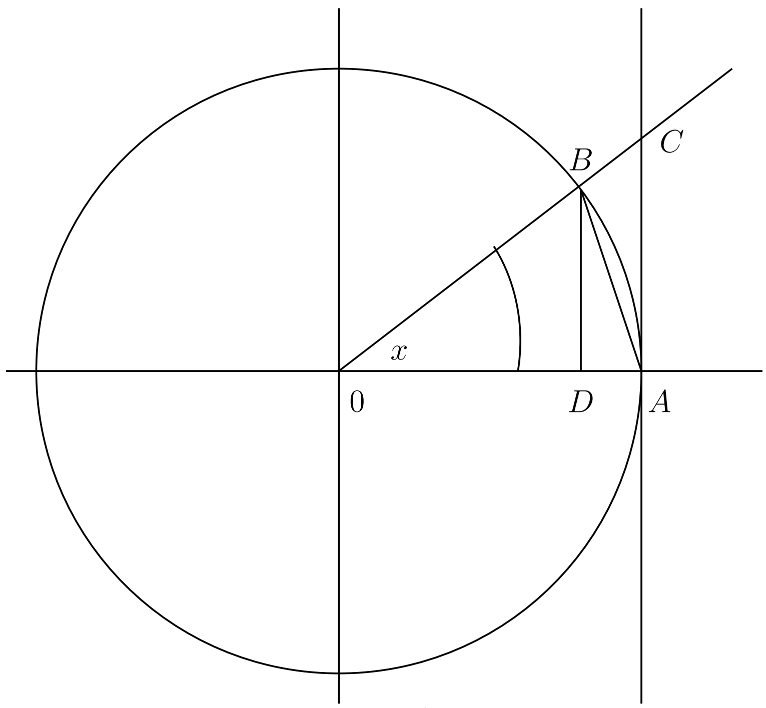
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \ \forall x \in I \setminus \{c\},$$

i ako je

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x),$$

onda i g ima limes u c i vrijedi

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x).$$



Primjer 4.4 (a) Izračunajmo $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

Vrijedi

$$-\frac{\pi}{2}x \leq x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{2}x$$

pa je po teoremu o sendviču

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0.$$

(b) Dokažimo da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tada iz slike vidimo da se za

$$O = (0,0), \ A = (1,0), \ B = (\cos x, \sin x), \ C = (0, \operatorname{tg} x), \ D = (\cos x, 0)$$

površina kružnog isječka OAB nalazi između površina trokuta $\triangle OAB$ i $\triangle OAC$:

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} \le \frac{1 \cdot x}{2} \le \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2},$$

odakle je

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Tada tvrdnja slijedi po teoremu o sendviču.

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.}$$

Zadatak 4.3 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(13x)}{\sin(21x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \sin\frac{\pi}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{1-2\cos x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{\sin(\pi x)}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{\sin^2 x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x^3}$.

Zadatak 4.4 Izračunajte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot \cos 2x \cdots \cos nx - 1}{x^2}.$$

Napomena. Sljedeći oblici su neodređeni:

$$(\pm\infty)\cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, (\pm\infty)-(\pm\infty), (\pm\infty)+(\mp\infty), 1^{\pm\infty}.$$

Napomena. Određeni i neodređeni oblici:

DEFINIRANO	NIJE DEFINIRANO
$x + (\pm\infty) = \pm\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}$	
$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$	$(\pm\infty) + (\mp\infty)$
$-(+\infty) = -\infty$ $-(-\infty) = +\infty$	
$x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & x > 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}$	$0 \cdot (+\infty)$
$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & x > 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases}$	$0 \cdot (-\infty)$
$\dfrac{x}{\pm\infty} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \dfrac{\pm\infty}{\mp\infty},\ \dfrac{0}{0}$
$x^{+\infty} = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$	$1^{+\infty}$
$x^{-\infty} = \begin{cases} +\infty & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$	$1^{-\infty}$

Na predavanju je dokazano

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Napomena. Vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x-1}\right) = e\cdot 1 = e.\end{aligned}$$

Stoga je i

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.}$$

Napomena. Ako su f i g funkcije takve da je

$$\lim_{x\to c} f(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to c} g(x) = +\infty,$$

onda je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to c}(1+(f(x)-1))^{g(x)}\\ &= \lim_{x\to c}\left[(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{(f(x)-1)g(x)} = e^{\lim_{x\to c}(f(x)-1)g(x)}.\end{aligned}$$

Zadatak 4.5 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x},\ a\in\mathbb{R}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$

Primjer 4.5 (a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1;$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \begin{bmatrix} t=e^x-1 & x=\ln(t+1)\\ x\to 0 & t\to 0\end{bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = 1.$$

Dakle,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,}\qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.}$$

Zadatak 4.6 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x},\ a>0$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(2x)}e^{3x^2}-1}{x\operatorname{th}(4x)}.$

Zadatak 4.7 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a},\ a\in\mathbb{R}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2))$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

Zadatak 4.8 Izračunajte limese funkcija:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^{\pi}(\pi x)}{x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\cos^3 x}-1}{x^3\operatorname{ctg} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}).$

Zadaci za vježbu

4.9 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ (c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

4.10 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)^3(x^2+x+1)^2}{x^7-50x+5}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$

4.11 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3-x+2}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^2+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

4.12 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ (c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}, m,n\in\mathbb{N}$

4.13 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

4.14 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin ax}{\sin bx},\ a,b\in\mathbb{R}$ (b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{1-x^3}$

4.15 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a},\ a\in\mathbb{R}$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}$

4.16 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)$

4.17 Odredite parametar a takav da funkcija

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ a, & x=0\\ 1+x, & x>0\end{cases}$$

bude neprekidna.

4.18 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

4.19 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[n]{\cos\beta x}}{x^2}$, $m\in\mathbb{N},\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1+\operatorname{ctg}^2 x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x+\sin x}}$

4.20 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2\sin^2 x)}{x^2}$

4.21 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+\pi x)}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-5^x}{4^x-3^x}$

4.22 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x+\frac{2\pi}{3})}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+5}}{2-\sqrt{x+1}}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+3x}}{x-\sqrt[3]{x^3+2x^2}}$

4.23 Je li moguće proširiti funkciju

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$$

do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$?

4.24 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-\cos x}{3^x-\operatorname{ch} x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{tg} x-\sin x)^2}{x^2\operatorname{tg}(x^2)\sin(x^2)}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 2x}\cdot e^{2x^2}-1}{\ln(1+2x)\cdot\ln(1+2\arcsin x)}$

4.25 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}-e^{\arcsin x}}{1-\cos^3 x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)^{\operatorname{ctg}(\pi\sin x)}$

4.26 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x^2+3x+4)}{\ln(x^2+2x+3)}\right)^{x\ln x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$, $a\in\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

4.27 Izračunajte limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$

4.28 Izračunajte limese:

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)^2+x^2}{\cos x-1-\frac{1}{2}x^2}\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$$

4.29 Može li se funkcija

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$$

proširiti do neprekidne funkcije na $[-1,+\infty\rangle$?

4.30 Neka je $f\colon \langle -a,a\rangle \setminus \{0\}\to\mathbb{R}$. Koje su od sljedećih tvrdnji istinite:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=l \iff \lim\limits_{x\to 0} f(\sin x)=l$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=l \iff \lim\limits_{x\to 0} f(|x|)=l$?

Dokažite.

4.31 Dokažite da za $f\colon \langle -a,a\rangle\setminus\{0\}\to\langle 0,+\infty\rangle$ takvu da je

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=2$$

vrijedi

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1.$$

4.32 Izračunajte limese:

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 0}\sin x\cos\frac{1}{x^2}\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 2}\lfloor x\rfloor\sin(\pi x)\qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x}$$

4.33 Dokažite da je

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor 3e^x\rfloor+2}{\lfloor 2e^x\rfloor+1}=\frac{3}{2}\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 0}x^3\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=0\qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sin x\right]=0$$

♣ ♡ ♠ ♢

4.34 Neka je $f\colon [0,1] \to [0,1]$ neprekidna funkcija. Dokažite da f ima **fiksnu točku**, tj. da postoji $x_0 \in [0,1]$ takav da je $f(x_0) = x_0$.(Uputa: Bolzano-Weierstrassov teorem)

4.35 Dokažite da svaki polinom neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku.

4.36 Dokažite da jednadžba $x^5 - 3x - 1 = 0$ ima barem jedno realno rješenje na segmentu $[1,2]$.

4.37 Neka su $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ funkcije takve da je $f \circ g = g \circ f$. Dokažite da postoji $x_0 \in [0,1]$ takav da je $f(x_0) = g(x_0)$.

4.38 Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i periodična s periodom $\tau > 0$. Dokažite da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(x_0 + \frac{\tau}{2}) = f(x_0).$$

4.39 Neka je $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokažite da postoje $x, y \in [0,2]$ takvi da je

$$y - x = 1, \quad f(y) - f(x) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

4.40 Nađite sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju Cauchyevu funkcionalnu jednadžbu:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$

4.41 Nađite sve neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(1) > 0$ i

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \quad \text{za sve } x, y \in \mathbb{R}.$$