Matematička fizika

(od Aristotela do Galilea)

2024.

Ibrahim Aganović
professor emeritus Sveučilišta u Zagrebu

U spomen akademiku Zlatku Jankoviću (1916.–1987.)

Uvod

Za točan opis prirodnih zakona bio je nužan pojam broja općenitiji od onog kojega je rana grčka filozofija (6.–5. st. pr. n. e.) baštinila od starijih istočnih civilizacija. Odgovarajuća teorija pripada pitagorejcima. Oni su poznavali aritmetičku strukturu skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i skupa (pozitivnih) racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, a njihova najveća spoznaja je postojanje *iracionalnosti*: metodom *reductio ad apsurdum* dokazali su da ne postoji racionalni broj p takav da je $p^2 = 2$, tj. $p = \sqrt{2}$. Paralelno s tim u geometriji su otkrili postojanje *nesumjerljivih* dužina, što je dovelo u pitanje njihovu dalekosežnu *teoriju sličnosti*, koja se zasnivala na pretpostavci da su svake dvije dužine sumjerljive. Izlaz iz nastalih teškoća bila je *opća teorija proporcija* (Eudokso, 4. st. p. n. e.), u kojoj se definira *omjer veličina* kao poopćenje racionalnog broja. Teorija je aksiomatski izložena u *Knjizi V* Euklidovih *Elemenata* ([12]). Tokom tzv. *Mračnog doba* europske povijesti antička matematika bila je zapostavljena i gotovo zaboravljena. Arapski prijevodi *Elemenata* ili kasniji prijevodi s arapskog na latinski imali su nejasnoća, posebno u vezi s osnovnom Def. V.5 ([12], Vol. 2, s. 114). Točno značenje proporcije otkriveno je ponovo tek u 16. st., zahvaljujući N. Tartagliji (1500.–1557.).

Teorija proporcija ekvivalent je suvremene teorije realnih brojeva (*Grci su imali pojam broja u svoj njegovoj općenitosti*).

Od starijih civilizacija Grci nisu naslijedili fizikalne spoznaje koje bi prevazilazile nivo jednostavnog iskustva. Prve jasne fizikalne ideje pripadaju Aristotelu (384.–322.). Svoje tvrdnje o gibanju on nastoji formulirati pomoću proporcija kinematičkih veličina; bio je to početak *matematičke fizike*. Razmišljanja o gibanju nastavljaju se tek u 14. st. u djelima franjevačkih skolastika oksfordske i pariške škole. Eksperimentalno otkriće i egzaktna formulacija zakona gibanja teških tijela pomoću teorije proporcija pripada Galileu (1564.–1642.). Bila je sretna okolnost da je Galileov učitelj matematike bio Tartaglijin učenik O. Ricci (1540. -1603.), pa je Galileo dobio pravu poduku iz *Knjige V*. Galileov pristup nastavio je Huygens, a istom metodom napisani su i Newtonovi *Principia*.

U točkama 1–5 opisujemo teoriju proporcija u suvremenom formaliziranom obliku i obrazlažemo osnovnu tvrdnju (vidi [12, Vol. 2, s. 124–126], [18]) da je ona ekvivalentna Dedekindovoj konstrukciji realnih brojeva kao *prereza* u skupu racionalnih brojeva. Sve što slijedi sadržano je u *Elementima* najvećim dijelom eksplicitno, a manjim dijelom prešutno se podrazumijeva. Činjenice koje Euklid implicitno ali nedvosmisleno podrazumijeva dokazujemo njegovom metodom ili citiramo prema suvremenoj teoriji realnih brojeva ([15, 16]). U točkama 6–7 opisujemo povijest fizike od Aristotela do Galilea, u točki 8 Galileovu fenomenološku fiziku, a u točkama 9–13 Galileovu matematičku fiziku (teoriju jednolikog i jednoliko ubrzanog gibanja te gibanja projektila).

Zahvale. Za pomoć i razgovore o temama ovog teksta zahvalnost dugujem mnogim kolegama. Unos i prijelom stranice uz pomoć programskog paketa LateX uradio je Jagor Tambača, student Matematičkog odsjeka. Korisne savjete dali su mi profesori L. Čaklović, K. Delinić, M. Essert, Z. Šikić, Josip Tambača, Z. Tutek i K. Veselić. Za višegodišnju informatičku pomoć zahvaljujem mojim nećacima Edi i Emiru Mulaliću.

1 Sistem veličina

Definicija 1.1. *Neprazan skup X je sistem veličina (kraće sistem) ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

(a) X je komutativna polugrupa u odnosu na operaciju zbrajanje $(+)$.

(b) X je trihotomno, tj. za $a, b \in X$ zadovoljena je jedna i samo jedna od ove tri mogućnosti:

1. $a = b$,

2. $b = a + c$, $c \in X$,

3. $a = b + c$, $x \in X$.

U daljnjem X označuje sistem.

Teorem 1.2. *Za $a, b, c \in X$ vrijedi*

$$a + b = a + c \quad \Longrightarrow \quad b = c. \tag{1.1}$$

Dokaz. Neka vrijedi lijeva strana. Ako je $b \neq c$, onda je prema uvjetu (b) ili $b = c+b'$ ili $c = b+c'$. U prvom slučaju imamo $a+b = a+c+b'$, tj. $a+b \neq a+c$, što je kontradiktorno pretpostavci. Analogno odbacujemo i drugi slučaj, pa vrijedi desna strana. □

Primjeri sistema su skupovi $(\mathbb{N}, +)$ i $(\mathbb{Q}, +)$.

Definicija 1.3. *Neka je $a, b \in X$. Kažemo da je $a < b$ ($b < a$) ako je $b = a + c$, $c \in X$.*

Ako je $a < b$, tj. $a + c = b$, prema Teoremu 1.2 veličina c je jedinstvena i označava se s $b-a$; operacija $(a, b) \to b-a$ je *restringirano oduzimanje*.

Teorem 1.4. *Relacija $<$ je striktni uređaj na X: za $a, b \in X$ zadovoljena je jedna i samo jedna od tri mogućnosti*

$$a = b, \quad a < b, \quad b < a; \tag{1.2}$$

za $a, b, c \in X$ vrijedi

$$a < b,\ b < c \quad \Longrightarrow \quad a < c, \tag{1.3}$$

$$a < b, \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + c. \tag{1.4}$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi neposredno iz trihotomnosti. Ako je $a < b$ i $b < c$, onda je $a + d = b$, $b + e = c$; iz toga slijedi $a + d = c - e$, ili $a + d + e = c$, tj. $a < c$. Ako je $a < b$, onda je $b = a + d$, pa imamo $b + c = (a + d) + c = (a + c) + d$, iz toga $b + c > a + c$. □

Teorem 1.5. *Za $a, b, c, d \in X$ vrijedi*

$$a < b,\ c < d \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + d. \tag{1.5}$$

Dokaz. Neka je $a' = b - a$, $c' = d - c$; imamo $b + d = (a + a') + (c + c') = (a + c) + (a' + c') > a + c$. □

Pomoću zbrajanja definiramo *množenje veličine* $a \in X$ s prirodnim brojem $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \cdot a = 1a = a; \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1, n \cdot a = na = a + (n - 1)a. \tag{1.6}$$

Teorem 1.6 ([12], Prop. V.1-V.3, V.5, V.6)**.** *Za $m, n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in X$ vrijedi sljedeće:*

$$\begin{aligned}
&m(a + b) = ma + mb, \\
&(m + n)a = ma + na, \\
&(mn)a = m(na), \\
&a > b \implies m(a - b) = ma - mb, \\
&m > n \implies (m - n)a = ma - na.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

U *Elementima* se sistem veličina proširuje do strukture (potpunog) polupolja, identičnog polupolju pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$. Proširenje do polja realnih brojeva (uvođenje nule i negativnih brojeva) čekat će (kao najvažniji doprinos indijske matematike) do 5. st. Iako su to otkriće Arapi prenijeli u Europu, ono nije stiglo do Galilea, ali polupolje $\mathbb{R}^+$ bit će dovoljno za matematičku formulaciju Galileove fizike.

2 Proporcije

Definicija 2.1 ([12], Def. V.4). *Kažemo da je sistem X arhimedski (ili da ima arhimedsko svojstvo) ako za svako $a, b \in X$, $a < b$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takvo da je $ma > b$.*

Primjeri arhimedskih sistema su $(\mathbb{N}, +, <)$ i $(\mathbb{Q}, +, <)$ (v. [15], s. 36, Zadatak 35). U daljnjem X označuje arhimedski sistem.

Definicija 2.2 ([12], Def. V.5). *Neka je relacija Π na X^2 definirana uvjetom: za $a, b, c, d \in X$ je $(a, b)\Pi(c, d)$ ako vrijedi*

$$m, n \in \mathbb{N}, na \iff mb \iff nc \iff md. \tag{2.1}$$

Tada kažemo da je Π PROPORCIJA.

Primijetimo da iz Definicije 2.2 za $a, b, c, d \in X$ neposredno slijedi

$$\begin{gathered}(a, a)\Pi(a, a),\\ (a, b)\Pi(a, b),\\ (a, b)\Pi(c, d) \implies (c, d)\Pi(a, b).\end{gathered} \tag{2.2}$$

Teorem 2.3 ([12], Prop. V.11). *Za $a, b, c, d \in X$ vrijedi*

$$(a, b)\Pi(c, d),\ (c, d)\Pi(e, f) \implies (a, b)\Pi(e, f). \tag{2.3}$$

Prema (2.2_2), (2.2_3) i (2.3) *proporcija* je *relacija ekvivalencije.* Element kvocijentnog skupa $R(X) = X^2/\Pi$ je *omjer*; omjer definiran parom (a, b) označujemo s $a : b$, pa uvjete (2.2_1)–(2.3) pišemo u obliku

$$\begin{aligned}&a : a = b : b,\\ &a : b = a : b,\\ &a : b = c : d \implies c : d = a : b,\\ &a : b = c : d,\ c : d = e : f \implies a : b = e : f.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Iz Definicje 2.2 neposredno slijedi

$$(a,b),\ (c,d) \in X^2,\ a:b=c:d \implies b:a=d:c \tag{2.5}$$

Ako je $a:b=c:d$, kažemo da se a prema b *odnosi* kao c prema d. Definicija 2.2 razlikuje se u važnom detalju od Euklidove ([12], Def. V.5). Uvjetom (2.1) Euklid definira odnos omjera $a:b$ i $c:d$ uz pretpostavku da su veličine a i b elementi sistema X, a veličine c i d elementi sistema Y, općenito različitog od X. Većina propozicija odnosi se na slučaj $Y=X$. U Euklidovoj definiciji kriju se implicitne pretpostavke o funkcionalnosti i potpunosti sistema (v. tt. 3–4).

Teorem 2.4 ([12], Prop. V.7)**.** *Za $a,b,c \in X$ vrijedi*

$$a=b \iff a:c=b:c. \tag{2.6}$$

Teorem 2.5 ([12], Prop. V.4, V.9, V.12, V.14-V.16, V.19- V.25)**.** *Za $a,b,\ldots,h \in X$, $m,n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:*

$$\begin{aligned}
&a:b=c:d \implies (ma):(nb)=(mc):(nd),\\
&a:b=c:d \implies a=c \iff b=d,\\
&a:b=c:d \implies (a+c):(b+d)=a:b,\\
&a:b=c:d \implies a<>c \iff b<>d,\\
&(ma):(mb)=a:b,\ a:b=c:d,\ a=mb \implies c=md,\\
&a:b=c:d \implies a:c=b:d,\\
&a:b=c:d,\ c<a \implies (a-c):(b-d)=a:b,\\
&a:b=c:d,\ b:e=d:f,\ a \iff e \implies c \iff f,\\
&a:b=c:d,\ b:e=f:c,\ a \iff e \implies f \iff d,\\
&a:b=c:d,\ b:e=d:f \implies a:e=c:f,\\
&a:b=c:d,\ b:e=f:c \implies a:e=f:d,\\
&a:b=c:d,\ e:b=f:d \implies (a+e):b=(c+f):d,\\
&a:b=c:d,\ a>b,\ a>c, \implies a+d>b+c.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Definicija 2.6. *Neka je $a,b,c,d \in X$. Kažemo da je*

$$a:b<c:d \quad (c:d>a:b) \tag{2.8}$$

ako postoje $m, n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljavaju jedan od ovih uvjeta:

$$\begin{aligned} na &< mb, \ nc > md, \\ na &< mb, \ nc = md, \\ na &= mb, \ nc > md. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Teorem 2.7 ([12], Prop. V.13). *Relacija $<$ je* STRIKTNI UREĐAJ *na $R(X)$: za $a : b, c : d \in R(X)$ zadovoljena je samo jedna od tri mogućnosti*

$$\begin{aligned} a : b &= c : d, \\ a : b &< c : d, \\ a : b &> c : d \end{aligned} \tag{2.10}$$

i vrijedi

$$a : b < c : d, \ c : d < e : f \implies a : b < e : f. \tag{2.11}$$

Teorem 2.8 ([12], Prop. V.8, V.10). *Za $a, b, c \in X$ vrijedi*

$$\begin{aligned} a > b &\iff a : c > b : c, \\ a > b &\iff c : a < c : b. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Za $X = \mathbb{Q}$ uvjet (1.1) možemo pisati u obliku

$$\frac{m}{n} \iff \frac{a}{b} \iff \frac{m}{n} \iff \frac{c}{d}. \tag{2.13}$$

To znači da između racionalnih brojeva $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ ne leži niti jedan racionalni broj $\frac{m}{n} \neq \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, pa je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; obrat je očigledan. Prema tome vrijedi

$$a, b, c, d \in \mathbb{Q} \implies a : b = c : d \iff \frac{a}{b} < \frac{c}{d}. \tag{2.14}$$

uvjete (2.9_{1-3}) možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &< \frac{m}{n} < \frac{c}{d}, \\ \frac{a}{b} &< \frac{m}{n} = \frac{c}{d}, \\ \frac{a}{b} &= \frac{m}{n} < \frac{c}{d}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Svaki od tih slučajeva znači da je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Prema tome vrijedi

$$a, b \in \mathbb{Q} \implies a : b < c : d \iff \frac{a}{b} < \frac{c}{d}. \tag{2.16}$$

Iz (2.14) i (2.16) zaključujemo da je $(R(\mathbb{Q}), <) = (\mathbb{Q}, <)$; očigledno je $(R(\mathbb{N}), <) = (\mathbb{Q}, <)$.

3 Funkcijski sistem

Sadržaj ove točke ne pripada *Knjizi V*, osim Teorema 3.6 koji je dokazan uz implicitnu pretpostavku o *funkcionalnosti.* To svojstvo sistema X omogućuje organizaciju skupa $R(X)$ kao polupolja. U slučaju sistema geometrijskih veličina (v. t. 5) ta struktura prepoznata je u novije doba (v. [1, 12, 18]).

Definicija 3.1 ([12], Vol.2, s. 170–171; [17])**.** *Sistem X je* FUNKCIJSKI *ako za svako $(a,b) \in X^2$ postoji 4.* PROPORCIONALA*, tj. (jedinstveno) $\gamma(a,b,f) \in X$ takvo da je*

$$a : b = f : \gamma(a,b,f) \tag{3.1}$$

(tada je $[a:b]$ graf funkcije $f \to \gamma(a,b,f), f \in X$).

Lako dokazujemo da za $f \in X$ vrijedi

$$a : b = \gamma(b,a,f) : f. \tag{3.2}$$

Iz Teorema 2.8 slijedi

$$a : b \iff c : d \iff \gamma(b,a,f) \iff \gamma(d,c,f). \tag{3.3}$$

Primjer funkcijskog sistema je $\mathbb{Q}$; sistem $\mathbb{N}$ nije funkcijski. U daljnjem X označuje funkcijski sistem.

Teorem 3.2. *Ako je $b \in X,\ n \in \mathbb{N}$, postoji $a \in X$ takvo da je $na = b$ (tada kažemo da je a mjera veličine b).*

Dokaz. Neka je $c \in X$ i $a = \gamma(nc,c,b)$; tada je $nc : c = b : a$, pa je (prema (2.7_5)) $b = na$. $\square$

Jednakost $b = na$ pišemo u obliku $a = \dfrac{b}{n} = \dfrac{1}{n}b$; ako je $m \in \mathbb{N}$, definiramo $\dfrac{m}{n}b = m\dfrac{b}{n}$. Lako se pokazuje da to množenje veličine s racionalnim brojem distributivno.

Aritmetička sredina veličina $a, c \in X$ je veličina $\frac{1}{2}(a+c)$. Ako je $a < c$, očigledno je $a < \dfrac{1}{2}(a+c) < c$. To znači da je (funkcijski) sistem x u sebi gust, tj. da *između svake dvije različite veličine* $a, c \in X$ *leži bar jedna veličina* $b \in X$.

Treća proporcionala veličina $a, c \in X$ je veličina $d = \gamma(a, c, c)$; vrijedi $a : c = c : d$.

Srednja proporcionala ili geometrijska sredina veličina $a, d \in X$ je (jedinstvena) veličina $c \in X$ koja zadovoljava uvjet $a : c = c : d$; o egzistenciji ove veličine bit će govora kasnije. Iz (2.7_{13}) slijedi važna nejednakost

$$a : c = c : d \implies \frac{1}{2}(a+d) > c \tag{3.4}$$

(aritmetička sredina veća je od geometrijske).

Definicija 3.3 (v. [12], Vol. 2, s. 132–135; [18])**.** *Zbroj odn. produkt omjera* $a : b,\ c : d \in R(X)$ *je omjer*

$$(a : b) + (c : d) = (\gamma(b, a, f) + \gamma(d, c, f)) : f \tag{3.5}$$

odn.

$$(a : b) \cdot (c : d) = \gamma(b, a, f) : \gamma(c, d, f), \tag{3.6}$$

gdje je $f \in X$ *proizvoljno.*

Lako se dokazuje da su zbroj i produkt dobro definirani (desne strane u (3.5) i (3.6) ne ovise o izboru veličine f). Npr., za proizvoljne f i f' imamo

$$\gamma(b, a, f) : f = \gamma(b, a, f') : f',\ \gamma(d, c, f) : f = \gamma(d, c, f') : f'; \tag{3.7}$$

iz toga prema (2.7_{12}) dobijamo

$$(\gamma(b, a, f) + \gamma(d, c, f)) : f = (\gamma(b, a, f') + \gamma(d, c, f')) : f'. \tag{3.8}$$

Teorem 3.4. *Za* $a, b, \ldots, e, f \in X$ *vrijedi*

$$\begin{aligned}
&(a : b) + ((c : d) + (e : f)) = ((a : b) + (c : d)) + (e : f),\\
&(a : b) + (c : d) = (c : d) + (e : f),\\
&a : b < c : d \implies (a : b) + (g : f) = c : d,\\
&c : d < a : b \implies (c : d) + (g : h) = a : b.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Dokaz. Dokažimo npr. (3.9_3). Ako vrijedi lijeva strana, onda je (prema (3.3)) $\gamma(b,a,f)+g=\gamma(c,d,f)$ pa imamo

$$c:d=(\gamma(b,a,f)+g):f=(\gamma(b,a,f):f)+(g:f)=a:b+(g:f), \tag{3.10}$$

tj. vrijedi desna strana. □

Korolar 3.5. *Struktura* $(R(X),+,<)$ *je sistem.*

Dokaz. Prema (3.9_{1-2}) je aditivna polugrupa, a prema (3.9_{3-4}) uređaj je ekvivalentan trihotomnosti. □

Teorem 3.6 ([12], Prop. V.18)**.** *Za* $a,b,c,d\in X$ *vrijedi*

$$a:b=c:d \iff (a+b):b=(c+d):d. \tag{3.11}$$

Dokaz. Slijedi iz Teorema 2.5 i (2.4_1). □

Korolar 3.7 ([12], Prop. V.17)**.** *Za* $a,b,c,d\in X$ *vrijedi*

$$a:b=c:d,\ a>b \implies (a-b):b=(c-d):d. \tag{3.12}$$

Dokaz. (v. [12], Vol. 2, s. 168–169). □

Teorem 3.8. *Za* $a,b,c,d,e,f\in X$ *vrijedi*

$$\begin{gathered}
(a:b)\cdot((c:d)\cdot(e:f))=((a:b)\cdot(c:d))\cdot(e:f),\\
(a:b)\cdot(c:d)=(c:d)\cdot(a:b),\\
(a:b)\cdot(c:d)=(c:d) \iff a=b,\\
(a:b)\cdot(c:d)=e:e \iff c:d=b:a,\\
a:b<c:d \implies (a:b)\cdot(e:f)<(c:d)\cdot(e:f),\\
(a:b)\cdot((c:d)+(e:f))=(a:b)\cdot(c:d)+(a:b)\cdot(e:f).
\end{gathered} \tag{3.13}$$

Taj teorem tvrdi sljedeće: $(R(X),+,\cdot,<)$ je multiplikativna komutativna grupa s *jedinicom* $\iota=e:e$ i *inverznim elementom* $(a:b)^{-1}=b:a$; uređaj je kompatibilan s množenjem i zbrajanjem. Uzimajući u obzir Korolar (3.5) zaključujemo da je struktura $(R(X),+,\cdot,<)$ *striktno uređeno polupolje.*

Teorem 3.9 (formula ex aequali)**.** *Neka je sistem X funkcijski i $a, b \in X$. Za proizvoljno $n \in X$ neka je $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} \subset X$ Tada vrijedi*

$$a : b = (a : c_1) \cdot (c_1 : c_2) \cdot \dots \cdot (c_{n-1} : c_n) \cdot (c_n : b) \tag{3.14}$$

(ako je $n = 1$ stavljamo $c_0 = a$).

Dokaz. Za $n = 1$ (3.14) vrijedi po definiciji. Pretpostavimo da (3.14) vrijedi za proizvoljno $n = k > 1$:

$$(a : b) = (a : c_1) \cdot (c_1 : c_2) \cdot \dots \cdot (c_k : b). \tag{3.15}$$

Neka je $c_{k+1} \in X$; tada je

$$c_k : b = (c_k : c_{k+1}) \cdot (c_{k+1} : b); \tag{3.16}$$

iz toga i (3.15) zaključujemo da (3.14) vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi za svako $n \in \mathbb{N}$. □

Teorem 3.10. *Za $a, b, \dots, e, f \in X$ vrijedi*

$$a : b = (c : d) \cdot (e : f) \implies c : d = (a : b) \cdot (f : e). \tag{3.17}$$

Dokaz. Ako vrijedi lijeva strana, imamo

$$\begin{aligned}(a : b) \cdot (f : e) &= ((c : d) \cdot (e : f)) \cdot (f : e) = (c : d) \cdot ((e : f) \cdot (f : e)) \\ &= (c : d) \cdot \iota = c : d,\end{aligned}$$

tj. vrijedi desna strana. □

Ako za veličine $a, d \in X$ postoji srednja proporcionala c , onda je $a : c = c : d$ jedinstven omjer kome je kvadrat jednak: $(a : c)^2 = (a : c) \cdot (c : d) = a : d$. Kažemo da je $a : c$ *kvadratni korijen* omjera $a : d$ i pišemo $a : c = \sqrt{a : d}$.

Definicija 3.11. *Kažemo da su veličine $a, b \in X$* SUMJERLJIVE *ako imaju* ZAJEDNIČKU MJERU *(v. Teorem 3.2), tj. ako postoje $q \in X$ i $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$a = kq, \ b = lq; \tag{3.18}$$

ako nisu sumjerljive, a i b su NESUMJERLJIVE.

Ako je q zajednička mjera dviju veličina i $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, onda je i $\frac{q}{n} < q$ zajednička mjera istih veličina. Najveću zajedničku mjeru sumjerljivih veličina $a, b \in X$ obilježavamo s $q(a, b)$. Tu veličinu određujemo *Euklidovim postupkom mjerenja* ([12], Vol. 3, p. 18). Neka je $a, b \in X$, $a > b$. Ako je b mjera za a, onda je $q(a, b) = b$. Pretpostavimo da $b_0 = b$ nije mjera za a. Tada postoji najveći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav je da je $n_0 b_0 < a$; neka je $a - n_0 b_0 = b_1$. Ako je b_1 mjera za b_0, npr. $n_1 b_1 = b_0$, onda je $a = n_0 b_0 + b_1$, pa je $q(a, b) = b_1$. Ako b_1 nije mjera za b_0, postoji najveći $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_1 b_1 < b_0$; neka je $b_0 - n_1 b_1 = b_2$. Ako je b_2 mjera za b_1, npr. $n_2 b_2 = b_1$, onda je $b = b_0 = n_1 b_1 + b_2 = (n_1 n_2 + 1) b_2$, $a = n_0 b_0 + b_1 = (n_0(n_1 n_2 + 1) + n_2) b_2$, pa je $q(a, b) = b_2$. Ako b_2 nije mjera za b_1, postupak ponavljamo. Ostaju dvije mogućnosti:

1. Postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je b_n mjera za b_{n-1}; tada je $q(a, b) = b_n$, pa su veličine a i b sumjerljive.

2. Niti za jedno $n \in \mathbb{N}$ veličina b_n nije mjera za b_{n-1}; tada su veličine a i b nesumjerljive.

Naravno, pitanje je kako možemo provjeriti da prva mogućnost nije realizirana (v. [12], Vol. 3, s. 19–20).

Teorem 3.12. *Veličine $a, b \in X$ su sumjerljive ako i samo ako postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$la = kb \tag{3.19}$$

Dokaz. Ako su a i b sumjerljive, iz (3.18) slijedi $la = l(kq) = (kl)q$, $kb = k(lq) = (kl)q$, a iz toga (3.19). Obratno, neka vrijedi (3.19) i neka je $q \in X$ definirano uvjetom (v. Teorem 3.2)

$$a = kq \tag{3.20}$$

Tada je $kb = l(kq) = k(lq)$ i $b = lq$, pa su a i b sumjerljivi. □

Skup omjera sumjerljivih veličina sistema X označavat ćemo s $\mathbb{Q}(X)$; njegove elemente nazivamo *racionalnim omjerima.* Skup $\mathbb{Q}(X)$ očigledno nije prazan; lako se pokazuje da je to potpolupolje u $R(X)$. Elemente skupa $\mathbb{I}(X) = \mathbb{Q}(X)^c$ nazivamo *iracionalnim omjerima.*

Teorem 3.13. *Uređena polupolja $\mathbb{Q}(X)$ i $\mathbb{Q}$ su identični ($\mathbb{Q}(X) \equiv \mathbb{Q}$), tj. postoji* JEDINSTVENI *izomorfizam $\phi_X : \mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}$ (bijekcija koja čuva zbroj, produkt i uređaj).*

Dokaz. Neka je preslikavanje $\phi_X : \mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}$ definirano formulom

$$\phi_X(a : b) = \frac{m}{n} \quad \text{ako je} \quad na = mb. \tag{3.21}$$

Lako se pokazuje da je to preslikavanje dobro definirano (tj. da ne ovisi o predstavnicima omjera $a : b$ i $\frac{m}{n}$). Neka je $a : b, c : d \in \mathbb{Q}(X)$, $\phi_X(a : b) = \phi_X(c : d) = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, tj. $mb = na$, $md = nc$. Za $k, l \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} la \Longleftrightarrow kb \Longleftrightarrow mla \Longleftrightarrow mkb = kna \Longleftrightarrow ml \Longleftrightarrow kn \Longleftrightarrow mlc \\ \Longleftrightarrow knc = kmd \Longleftrightarrow lc \Longleftrightarrow kd, \end{aligned} \tag{3.22}$$

pa je $a : b = c : d$, tj. ϕ_X je injekcija; za $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in X$, postoji $b \in X$ takvo da je $mb = na$, tj. $\phi_X(a : b) = \frac{m}{n}$, pa je ϕ_X bijekcija. Dalje imamo

$$\begin{aligned} \phi_X((a : b) + (c : d)) &= \phi_X((\gamma(b, a, f) + \gamma(d, c, f)) : f), \\ nl(\gamma(b, a, f) + \gamma(d, c, f)) &= l\gamma(b, na, f) + n\gamma(d, lc, f) \\ &= (lm + kn)f, \\ \phi_X((\gamma(b, a, f) + \gamma(d, c, f)) : f) &= \frac{lm + kn}{nl} = \phi_X(a : b) + \phi_X(c : d), \end{aligned} \tag{3.23}$$

pa vrijedi

$$\phi_X((a : b) + (c : d)) = \phi_X(a : b) + \phi_X(c : d). \tag{3.24}$$

Analogno dokazujemo jednakost

$$\phi_X((a : b) \cdot (c : d)) = \phi_X(a : b) \cdot \phi_X(c : d). \tag{3.25}$$

Iz (3.24) i (3.9_3) slijedi

$$a : b < c : d \implies \phi_X(a : b) < \phi_X(c : d). \tag{3.26}$$

Prema tome, ϕ_X je izomorfizam. Neka je $\psi : \mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}$ proizvoljni izomorfizam. Tada je $\phi_X \circ \psi^{-1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ izomorfizam. Budući da je identitet jedini izomorfizam na $\mathbb{Q}$, to je $\phi_X \circ \psi^{-1} = id$, tj $\psi = \phi_X$. $\square$

Korolar 3.14. *Za $a : b \in \mathbb{Q}(X)$, $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\begin{aligned} \phi_X(a:b) = \frac{m}{n} &\implies \phi_X(b:a) = \frac{n}{m}, \\ \phi_X(a:b) < \frac{m}{n} &\iff na < mb. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Dokaz. (3.27_1) je očigledno. Neka je $\phi_X(a : b) = \dfrac{k}{l}$ $(k, l \in \mathbb{N})$. Ako u (3.27_2) vrijedi lijeva strana, onda je $kn < ml$, pa imamo

$$nla = nkb < mlb, \tag{3.28}$$

a iz toga $na < mb$, tj. vrijedi i desna strana. Ako vrijedi desna strana, onda je

$$kna < kmb = mla; \tag{3.29}$$

iz toga imamo

$$kn < ml, \tag{3.30}$$

tj. vrijedi lijeva strana. $\square$

Korolar 3.15. *Identitet $id_{\mathbb{Q}(X)} : \mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}(X)$ je jedinstveni izomorfizam na $\mathbb{Q}(X)$ (bijekcija koja čuva zbroj, produkt i uređaj).*

Dokaz. Ako je $\eta : \mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}(X)$ izomorfizam, onda je $\phi_X \circ \eta : \mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}$ izomorfizam, pa je $\phi_X \circ \eta = \phi_X$, tj. $\eta = id_{\mathbb{Q}(X)}$. $\square$

Teorem 3.16. *Skup $\mathbb{Q}(X)$ je* GUST *u $\mathbb{R}(X)$: za $a : b, c : d \in \mathbb{R}(X)$, $a : b < c : d$, postoji $g : h \in \mathbb{Q}(X)$ takvo da je*

$$a : b < g : h < c : d. \tag{3.31}$$

Dokaz. Neka je $a : b < c : d$. Tada postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je zadovoljen jedan od uvjeta:

$$\begin{aligned} &na < mb, nc > md, \\ &na < mb, nc = md, \\ &na = mb, nc > md. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ako vrijedi prvi uvjet, za $g : h = \phi^{-1}\Big(\frac{m}{n}\Big)$ vrijedi (3.31). Ako vrijedi drugi uvjet, postoji $l \in \mathbb{N}$ takvo da je $l(mb - na) > na$. Iz toga zaključujemo da je $n(1 + l)a < lmb$, ili $a : b < \phi^{-1}\Big(\frac{lm}{n(1+l)}\Big)$; s druge strane imamo

$$\frac{lm}{n(1+l)} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{l+1} < \frac{m}{n},$$
$$\phi^{-1}\Big(\frac{lm}{n(1+l)}\Big) < \phi^{-1}\Big(\frac{m}{n}\Big) = c : d.$$

Za $g : h = \phi^{-1}\Big(\frac{lm}{n(1+l)}\Big)$ vrijedi (3.31). Analogan je dokaz u slučaju trećeg uvjeta. $\square$

4 Potpuni sistem

Sadržaj ove točke ne pripada *Knjizi 5. Potpunost sistema geometrijskih* veličina (v. t. 5) osnovna je implicitna pretpostavka u *Elementima* (v. [12], [18]). Potpunost funkcijskog sistema X omogućuje identifikaciju polupolja $\mathbb{R}(X)$ s polupoljem pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$. Sistem veličina X ima uređajnu strukturu, pa na običan način definiramo gornju odn. donju među skupa $A \subseteq X$ te $\sup A$ odn. $\inf A$. Sistem X je *potpun* ako za svako odozgo (odozdo) ograničeno $A \subseteq X$ postoji $\sup A \in X$ ($\inf A \in X$). Sistem $\mathbb{Q}$ nije potpun (npr. odozgo omeđen skup $\{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ nema supremum). Skup $\mathbb{R}(X)$ također ima uređajnu strukturu, pa možemo govoriti o njegovoj potpunosti.

Teorem 4.1. *Funkcijski sistem X izomorfan je sistemu $(\mathbb{R}(X), +, <)$, tj. postoji bijekcija $\psi : X \to \mathbb{R}(X)$ koja čuva zbroj i uređaj.*

Dokaz. Neka je $d \in X$ fiksirano i $\psi(a) = a : d, a \in X$. Ako je $\psi(a_1) = \psi(a_2)$, tj. $a_1 : d = a_2 : d$, onda je prema (2.7_2), pa je ψ injekcija. Ako je $a_1, d_1 \in X$, $a = \gamma(d_1, a_1, d)$, onda je $a : d = a_1 : d_1$, tj. $\psi(a) = a_1 : d_1$, pa je ψ surjekcija. Ako je $a_1 < a_2$, onda je $a_1 : d < a_2 : d$, tj. $\psi(a_1) < \psi(a_2)$. Po definiciji imamo

$$\psi(a + b) = (a + b) : d = (a : d) + (b : d) = \psi(a) + \psi(b). \tag{4.1}$$

□

Korolar 4.2. *Neka je sistem X funkcijski. Tada je sistem $\mathbb{R}(X)$ potpun ako i samo ako je potpun sistem X.*

Korolar 4.3. *Ako je funkcijski sistem X potpun, skup $\mathbb{I}(X)$ je neprazan.*

Dokaz. Ako je $\mathbb{I}(X)$ prazan, onda je $\mathbb{R}(X) = \mathbb{I}(X)$ i prema Teoremu 3.13 imamo $\mathbb{R}(X) = \mathbb{Q}$, pa $\mathbb{R}(X)$ odn. X nije potpun. □

Ako je omjer iracionalan, Euklidovim postupkom mjerenja (v. t. 3) za njega dobijamo niz *racionalnih aproksimacija.*

Primijetimo da je sistem $\mathbb{N}$ potpun, ali nije funkcijski; sistem $\mathbb{Q} \equiv \mathbb{R}(\mathbb{N})$ je funkcijski, ali nije potpun.

Teorem 4.4. *Ako je funkcijski sistem X potpun, identitet $(id)_{\mathbb{R}(X)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(X)$ je jedinstveni izomorfizam na uređenom polupolju $\mathbb{R}(X)$.*

Dokaz. Neka je $\omega : \mathbb{R}(X) \to \mathbb{R}(X)$ izomorfizam. Prema Korolaru 3.15 vrijedi $\varpi = \omega|_{\mathbb{Q}(X)} = (id)_{\mathbb{Q}(X)}$. Neka je $s \in \mathbb{R}(X)$, $A(s) = \{q \in \mathbb{Q}(X) : q < s\}$; očigledno je $A(s) = \Theta, \mathbb{R}(X)$. Imamo $\sup A(s) = s, \omega(A(s)) = \varpi(A(s)) = A(s)$, pa je $(s < \omega(s)) V (s = \omega(s))$; analogno je $(s > \omega(s)) V (s = \omega(s))$. Iz toga slijedi $\omega(s) = s$, tj. $\omega = (id)_{\mathbb{R}(X)}$. □

Teorem 4.5. *Ako su funkcijski sistemi X i Z potpuni, uređena polupolja $\mathbb{R}(X)$ i $\mathbb{R}(Y)$ su* IDENTIČNA *($\mathbb{R}(X) \equiv \mathbb{R}(Y)$), tj.* POSTOJI JEDINSTVENI IZOMORFIZAM $\omega : \mathbb{R}(X) \to \mathbb{R}(Y)$ *(bijekcija koja čuva zbroj, produkt i uređaj).*

Lema 4.6. *Postoji jedinstveni izomorfizam $\varpi : \mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}(Y)$ (tj. $\mathbb{Q}(X) \equiv \mathbb{Q}(Y)$).*

Dokaz. Iz Teorema 3.13 slijedi da je $\varpi = \phi_Y^{-1} \circ \phi_X$ (v. (3.30)). □

Lema 4.7 (v. [15], s. 34)**.** *Neka je $S_1, S_2 \subset \mathbb{Q}(X)$ i neka je*

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \{p \in \mathbb{Q}(X) : p = s_1 + s_2, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}, \\ S_1 \cdot S_2 &= \{p = s_1 \cdot s_2, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ako su S_1 i S_2 odozgo omeđeni, skupovi (4.2_1) i (4.2_2) su također odozgo omeđeni i vrijedi

$$\sup(S_1 + S_2) = \sup S_1 + \sup S_2, \ \sup(S_1 \cdot S_2) = \sup S_1 \cdot \sup S_2 \tag{4.3}$$

Dokaz Teorema 4.5. Za $s \in \mathbb{R}(X)$ neka je

$$A(s) = \{p \in \mathbb{Q}(X) : p < s\}. \tag{4.4}$$

Prema Lemi 4.6 skup $\varpi(A(s))$ (v. dokaz Teorema 4.4) ograničen je u $\mathbb{R}(X)$. Neka je

$$\omega(s) = \sup \varpi(A(s)); \tag{4.5}$$

očigledno je $\omega|_{\mathbb{Q}(X)} = \varpi$. Lako zaključujemo da je $\omega : \mathbb{R}(X) \to \mathbb{R}(X)$ bijekcija. Pokazat ćemo da ω čuva zbroj. Neka je $s_1, s_2 \in \mathbb{R}(X)$,

$$p \in A(s_1 + s_2), \tag{4.6}$$

tj. $p \in \mathbb{Q}(X),\ p < s_1 + s_2$, i neka je npr.

$$s_1 < p < s_2. \tag{4.7}$$

Tada je $p - s_1 < p$, pa postoji $q_2 \in \mathbb{Q}(X)$ takvo da je $p - s_1 < q_2 < p$. Neka je $q_1 = p - q_2$; tada je $p = q_1 + q_2,\ q_1 < s_1, q_2 < s_2$, tj. vrijedi

$$p \in A(s_1) + A(s_2). \tag{4.8}$$

Obratno, neka vrijedi (4.8), tj. $p = q_1 + q_2,\ q_1, q_2 \in \mathbb{Q}(X), q_1 < s_1, q_2 < s_2$. Tada je $q_1 + q_2 < s_1 + s_2,\ p < s_1 + s_2$, tj. vrijedi (4.6). Prema tome je

$$A(s_1 + s_2) = A(s_1) + A(s_2). \tag{4.9}$$

Isti rezultat dobijamo i uz ostale pretpostavke tipa (4.7). Iz (4.9) i Leme 4.6 slijedi

$$\varpi(A(s_1 + s_2)) = \varpi(A(s_1) + A(s_2)) = \varpi(A(s_1)) + \varpi(A(s_2)), \tag{4.10}$$

a iz toga i Leme 4.7

$$\omega(A(s_1) + A(s_2)) = \omega(A(s_1)) + \omega(A(s_2)), \tag{4.11}$$

pa imamo

$$\omega(s_1 + s_2) = \omega(s_1) + \omega(s_2). \tag{4.12}$$

Analogno dokazujemo da ω čuva produkt:

$$\omega(s_1 \cdot s_2) = \omega(s_1) \cdot \omega(s_2) \tag{4.13}$$

Iz (4.12) slijedi da ω čuva uređaj:

$$s_1 < s_2 \implies \omega(s_1) < \omega(s_2). \tag{4.14}$$

Jedinstvenost slijedi iz činjenice da se svaki izomorfizam $\mathbb{R}(X) \longrightarrow \mathbb{R}(Y)$ na $\mathbb{Q}(X)$ podudara s ϖ. $\square$

Korolar 4.8. *Potpuni funkcijski sistemi X i Y su izomorfni (postoji bijekcija $g : X \to Y$ koja čuva zbroj i uređaj).*

Dokaz. Neka su $\psi_X : X \to \mathbb{R}(X)$ i $\psi_Y : Y \to \mathbb{R}(Y)$ izomorfizmi (v. Teorem 4.1). Lako pokazujemo da je preslikavanje $g = \psi_Y^{-1} \circ \omega \circ \psi_X : X \to Y$ izomorfizam. $\square$

Teorem 4.9. *Ako su funkcijski sistemi X i Y potpuni, za $a : b \in \mathbb{R}(X), c : d \in \mathbb{R}(Y)$ jednakost*

$$\omega(a : b) = c : d \tag{4.15}$$

ekvivalentna je uvjetu (2.1)*: za svako $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi $na \iff mb \iff nc \iff md$.*

Dokaz. Neka vrijedi (4.15). Neka za $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi $na = mb$. Tada je

$$\begin{aligned}
\phi_X(a : b) &= \frac{m}{n},\\
\omega(a : b) &= \varpi(a : b) = (\phi_Y^{-1} \circ \phi_X)(a : b) = \phi_Y^{-1}\left(\frac{m}{n}\right) = c : d,\\
\phi_Y(c : d) &= \frac{m}{n},
\end{aligned}$$

tj. $nc = md$. Neka je $na > mb$. Tada postoji $f \in X$ takvo da je $na = mb + f$; postoji $g \in X$ takvo da je $f = mg$ (Teorem 3.2), pa imamo $na = m(b + g)$, tj. $\phi_X((b + g) : a) = \dfrac{n}{m}$. Iz toga zaključujemo:

$$\begin{aligned}
&\omega((b + g) : a) = \phi_Y^{-1}\left(\frac{n}{m}\right) = j : h \in \mathbb{Q}(Y),\\
&\omega(b : a) + \omega(g : a) = j : h,\\
&d : c + \omega(g : a) = j : h,\\
&j : h > d : c;
\end{aligned}$$

budući je $mj = nh$, nužno je $nc > md$ (v. (2.9)). Na isti način dokazujemo da $na < mb \implies nc < md$, pa vrijedi (2.1). Lako se pokazuje obrat, tj. da iz (2.1) slijedi (4.15). □

Teorem 4.9 opravdava Euklidovu (Eudoksovu) definiciju proporcije ([12], Def. V.5). Prema Teoremu 4.5 striktno uređeno polupolje omjera generirano potpunim funkcijskim sistemom je jedinstveno. U suvremenoj teoriji to polupolje označujemo s $\mathbb{R}^+$, a njegove elemente nazivamo *pozitivnim realnim brojevima.* Izomorfizam ω je identitet na $\mathbb{R}^+$, pa jednakost (4.15) pišemo u obliku $a : b = c : d$.

Korolar 4.10 (Hölder–Cartanov teorem, v. [19])**.** *Potpuni funkcijski sistem izomorfan je sistemu* $(\mathbb{R}^+, +, <)$.

Za identifikaciju $\mathbb{R}(X) \equiv \mathbb{R}(Y)$ istovremena funkcionalnost i potpunost sistema X i Y nije nužna; npr. vrijedi $\mathbb{R}(\mathbb{Q}^+) \equiv \mathbb{Q}^+ \equiv \mathbb{R}(\mathbb{N})$, iako $\mathbb{N}$ nije funkcijski, a $\mathbb{Q}^+$ nije potpun. Međutim, $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}^+$ u *Elementima* se ne spominju kao sistemi veličina. Njihova svojstva (*stara teorija proporcija*) istražuju se u *Knjizi VII* ([12]) neovisno o općoj teoriji, iako se mnoge činjenice doslovno ponavljaju. Nije isključeno da je pod *veličinama* Euklid (a možda već i Eudokso) podrazumijevao samo elemente potpunog funkcijskog sistema (v. [1, 18]; za drukčije mišljenje v. [12], Vol. 2, s. 113). Ostaje nam osnovno pitanje o *egzistenciji potpunog funkcijskog sistema.* O tome govorimo u sljedećoj točki.

5 Geometrijski sistemi

Osnovni primjer *veličine* u *Elementima* je *dužina*, tj. interval između dvije različite točke na pravcu. Jednakost (kongruencija), zbrajanje i trihotomnost dužina definirani su pomoću *ravnala* (bez paralelnih bridova, tzv. *straightedge*) i *tjednokratnog šestara* (tzv. *collapsed compass*, v. [3]) u smislu *Postulata I.1-I.3* i Propozicija I.1-I.3 iz [12]. Skup svih dužina je arhimedski sistem koji ćemo označavati sa Σ; taj sistem je zasnovan u *Knjigama I-IV* ([12]). Osnovna je (implicitna) pretpostavka da je *sistem* Σ *potpun* (v. [12], Vol. 1, s. 234–240; [18]).

U *Knjizi VI* ([12]) teorija proporcija primjenjuje se na geometriju (u okviru euklidske aksiomatike) i formulira *teorija sličnosti*. Osnovna je Prop. VI.2, tzv. *Talesov poučak* ([12], Vol. 2, 194–195):

Ako je pravac povučen paralelno jednoj od stranica trokuta, on siječe [druge dvije] *stranice proporcionalno* [$BD : DA = CE : EA$]; *i, ako su stranice trokuta presječene proporcionalno, pravac koji spaja sjecišta paralelan je preostaloj stranici trokuta.*

Iz gornjeg lako zaključujemo da vrijedi $DE : BC = DA : BA$. Neka točka F leži na pravcu DE (Sl. p. 194, produljeno DE) i neka je

$$DF : BC = DA : BA; \tag{5.1}$$

tada je

$$DF : BC = DE : BC, \tag{5.2}$$

iz čega slijedi $DF = DE$, tj. $F = E$. Prema tome *točka F leži na pravcu AC ako i samo ako vrijedi* (5.1) (možemo reći da je to je *euklidska karakterizacija pravca*).

Sistem Σ je *funkcijski* ([12], Prop. VI.12). Za svaki par dužina *postoji srednja proporcionala* ([12], Prop. VI.13). Prema tome, sistem $\mathbb{R}(\Sigma)$ je primjer striktno uređenog potpunog polupolja, *što je euklidski dokaz egzistencije polupolja* $\mathbb{R}^+$.

Ako je sistem X funkcijski i potpun, onda je prema Teoremu 4.5 $\mathbb{R}(X) \equiv \mathbb{R}(\Sigma)$, a prema Korolaru 4.3 sistemi X i Σ su izomorfni.

Kružni lukovi su također veličine, koje se mogu identificirati s dužinama (v. [12]).

U *Elementima* se specijalni skupovi geometrijskih *likova* tretiraju kao sistemi veličina. Netrivijalno je pitanje koji su skupovi likova *sistemi veličina* u smislu Definicije 2.1; to pitanje Euklid eksplicitno ne postavlja. Za njega je osnovni *kriterij identičnosti likova*, koji u *Elementima* ima evoluciju; u početku identičnost (jednakost) znači *kongruenciju* (koja je opisana u *Knjizi II* ([12]), ali kasnije znači *jednakost sadržaja* (*površina*, v. [12], Vol. 1, s. 327–331).

6 Aristotelova fizika

Aristotelova *prirodna filozofija* sadržana je u njegovim djelima *Fizika* i *O nebu*, te u apokrifnom traktatu *Mehanika*. Na njegovu fiziku utjecala je ranija filozofija o prostoru i vremenu (5. st. pr. n. e.). U *Elejskoj školi* (Parmenid, Meliso, Zenon, Empedoklo, jednako misli i Anaksagora) drže da je fizikalno *ništavilo* pojam bez smisla, pa negiraju postojanje *praznog prostora*, jer ga identificiraju s ništavilom. Svijet je za njih jedno, puno, beskrajno i nepromjenljivo; u takvom svijetu (zbog punoće) nema mjesta gibanju, ono je moguće samo u praznom. Identificiranje zraka kao supstancije i ideja o *eteru* (Empedoklo, Anaksagora) doprinijeli su negiranju *praznog*. I za *atomiste* (Leukip i Demokrit) gibanje je moguće samo u praznom prostoru, ali kako je gibanje empirijska činjenica, takav entitet postoji. On je vječan i neograničen, a pojmovi gore i dolje nemaju smisla ; u njemu se vječno gibaju nedjeljivi *atomi*, a njihovim sudarima formiraju se makroskopska tijela. Atomisti odbacuju teleološko pitanje o finalnom uzroku (*zašto*), postavljaju mehanističko pitanje (*kako*) i daju odgovor: gibanjem atoma upravljaju prirodni zakoni. "Iskustvo je pokazalo da, za razliku od teleološkog, mehanističko pitanje vodi do znanstvene spoznaje. Poslije atomista, filozofe je, sve do Renesanse, više zanimalo teleološko pitanje, čime je znanost dovedena u slijepu ulicu" ([17]). Atomističko učenje obnovit će Epikur (4. st. pr. n. e.) i Lukrecije (1. st. pr. n. e.), ali njihov utjecaj bit će neznatan sve do novog doba.

Pitanja koja je Aristotel postavio važnija su od njegovih odgovora. On prihvaća stav *Elejske škole* o jedinstvenosti, punoći i beskrajnosti svijeta, ali pobija nemogućnost gibanja u punom. Osporavajući *atomiste*, on je ostao zarobljen idejom o punoći kao imanentnom svojstvu svijeta, koje smatra i nužnim za gibanje. Njegov argument u vezi s tim je značajan: prazan prostor kao entitet bio bi homogen (u njemu ne bi bilo *različitosti*), pa tijelo koje bi bilo pokrenuto ne bi se nikad zaustavilo (*jer zašto ovdje, a ne ondje?*); ono bi se gibalo vječno (ili *dok ga nešto snažnije ne zaustavi*), što je za Aristotela empirijski kontradiktorno. On negira *princip inercije* jer ne može apstrahirati ovozemaljsko iskustvo. Međutim, Aristotel prvi svjesno govori o *apsolutnom vremenu*: *"sada" je svugdje jedno-te-isto*.

Osnovna Aristotelova tema je gibanje teških tijela, što će biti trajni predmet prirodne filozofije. On gibanja dijeli na *naravna* i *prisilna*. Naravno gibanje je pravolinijsko slobodno padanje prema *naravnom mjestu*, u kome će tijelo mirovati do nove prisilne perturbacije, nakon koje će opet slobodno padati. Slobodno padanje je ubrzano: *brzina mu raste kao pređeni* put (ovo će biti i Galileova prolazna zabluda). Aristotel negira fundamentalni *princip ekvivalencije* (jednakost trome i teške mase): tvrdi da teža tijela padaju brže. Samo je kružno gibanje jednoliko i vječno (ovaj *kozmologijski princip inercije* bit će također i Galileova zabluda). Gibanje projektila je *prisilno*: ono je posljedica *kontaktnog djelovanja* od strane *pokretala*. Ovdje dolazi do Aristotelove velike zablude: kad tijelo izgubi kontakt s pokretalom, gibanje se nastavlja kao prisilno zbog toga što je pokrenut i zrak, s kojim tijelo biva dalje nošeno (potiskivano) do naravnog mjesta. On govori o otporu sredstva u kome se tijelo giba: kroz netjelesnije (rjeđe) sredstvo tijelo se giba brže; konsekventno, u praznome, kao najnetjelesnijem, njegova brzina bi bila beskonačna, što je apsurdno. Prema tome punoća je nužni uvjet gibanja.

U Aristotelovo doba već su postojali oprečni stavovi o tome da li se Zemlja giba. Protiv gibanja Aristotel ističe ovaj argument: kad bi se Zemlja gibala, tijelo bi pri slobodnom padu zaostalo (skrenulo bi na zapad), što se ne dešava. Za Galilea će obaranje ovog argumenta biti značajno.

Aristototelovo shvaćanje da bi prazan prostor bio *homogen* i da bi u njemu vrijedio (kontradiktorni) *princip inercije*, te da je *vrijeme svugdje isto*, upućuju nas na zaključak da je on, i pored mnogih zabluda, anticipirao neke od geometrijskih i fizikalnih stanovišta Newtonove fizike. Aristotelova fizika dominirat će u znanosti do 17. st.

Iako je (slijedeći Platona) smatrao da se matematika ne može primijeniti na materijalni svijet, u *Fizici* je Aristotel svoju *kinematiku* i *dinamiku* formulirao u terminima veličina i proporcija.

U opširnoj raspravi o *promjenama* nalazimo ovaj tekst ([2], 237b, 25-30), koji pokazuje da pod *gibanjem* ili *premještanjem* Aristotel podrazumijeva vrlo regularnu promjenu:

... Budući pak sve 'ono koje se kreće' u vremenu se kreće, i u većem vremenu [prelazi] veću veličinu, nemoguće je da se nešto u neograničenu vremenu kreće ograničenim [gibanjem], što niti se uvijek istim ili pak dijelom toga kreće, nego je u svemu vremenu sve [gibanje]. A ako se štogod kreće istom brzinom [jednoliko] jasno je da se ograničena [veličina] prelazi u ograničenom vremenu (jer uzme li se dio kojim će se mjeriti cjelina, cjelina [gibanja] je prijeđena u onoliko jednakih vremena koliko je i dijelova, tako te–budući su ti dijelovi ograničeni i svaki pojedini kao 'koliko' i svi zajedno brojem, i vrijeme bi bilo ograničeno; jer ono će biti toliko koliko je vrijeme dijela pomnoženo s brojem dijelova)...

Tokom srednjeg vijeka Aristotelova *definicija* jednolikosti primit će ovaj oblik: *gibanje je jednoliko ako u jednakim proteklim vremenima tijelo prevaljuje jednake putove.*

Jedan od Aristotelovih naziva za mjeru (intenzitet) djelovanja *pokretala* na *pokrenuto* je *dinamik*($\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$)(u latinskim prijevodima *vis*, *virtus*, *fortitudo* itd, u ruskom *sila*). Za tu veličinu on postavlja ovaj zakon ([2], 249b, 25-30; 250a, 5-10):

... ako je A pokretalo, B pokrenuto, Γ *dužina kojom se kretalo, i vrijeme pak u kojem [se kretalo]* Δ*, onda u istome vremenu ista sila [dinamik], koja je gdje je A, kretat će polovicu B preko dvostruke dužine* Γ*, i prijeći će* Γ *u polovici* Δ*. Tako će se naime imati razmjer. I ako ista sila pokrene isti teret u nekom vremenu preko neke dužine, te polovicu prevali u polovici vremena, onda će pola sile pokrenuti pola tereta preko iste dužine u istome vremenu.*

Zakon tvrdi da je *dinamik* proporcionalan veličini (težini) i pređenom putu, a obratno proporcionalan proteklom vremenu. Prema tome, vanjsko djelovanje Aristotel identificira s *količinom gibanja*, a ne s njegovom promjenom.

Aristotelu pripada *pravilo paralelograma* ili slaganja gibanja: ako je tijelo (pokretalima) podvrgnuto dvama pravolinijskim gibanjima, tako da su putevi prevaljeni u istom vremenu u konstantnom *omjeru*, onda se tijelo giba po dijagonali paralelograma čije su stranice u istom omjeru; Aristotel napominje da je konstantnost spomenutog omjera i nužan uvjet za zaključak. S današnjeg stanovišta to je *kinematička linearnost* (vektorsko zbrajanje *pomaka*); prvi dio pretpostavke (*ako je tijelo podvrgnuto...*) pokazuje da se implicitno podrazumijeva i *dinamička linearnost*: djelovanje pokretala može se *rastaviti* na dvije nekolinearne komponente.

U *helenističko doba* (3.-2. st. pr. n. e.) došlo je do razdvajanja znanosti i filozofije. Dok se statika i astronomija pojavljuju kao matematičke discipline i dostižu visok stupanj razvoja, fenomen gibanja ostaje u području općenitih filozofskih spekulacija o promjenama. Veliki znanstvenici tog doba (Euklid, Apolonije, Aristarh i dr., pa čak i Arhimed) nisu ostavili nikakve spise o fenomenu prisilnog gibanja. Izuzetak bi mogao biti Hiparh (osnivač geocentričkog sustava, 2. st. pr. n. e.); njemu se pripisuje (v. [5, 14]) prvo osporavanje Aristotelove fizike i alternativna teorija: za gibanje projektila nije odgovorno potiskivanje zrakom, već neko svojstvo (*lakoća*), koje se u trenutku separacije od pokretala prenese na projektil; budući da se to svojstvo ne obnavlja, tijelo svladava težina i ono pada dolje. Ova teorija pojavit će se ponovo u 6. st.

Iako je pravi začetnik matematičke fizike, Arhimed o gibanju govori samo u geometrijskom kontekstu. Usvajajući Aristotelovu definiciju jednolikog gibanja, on formulira ovu propoziciju ([13], p. 155):

Arhimedova propozicija. Ako se točka giba jednoliko duž neke linije, i ako se na toj liniji uzmu dvije dužine [pređeni putovi], *one će biti proporcionalne odgovarajućim proteklim vremenima.*

Dokaz propozicije Arhimed drži standardnim, pa navodi samo kratku uputu: *Dvije različite dužine uzete su na pravcu, i dvije dužine (odgovarajući protekli vremenski periodi) na drugom pravcu; da su dužine na prvom pravcu proporcionalne dužinama na drugom pravcu dokazuje se uzimajući jednake višekratnike svakog puta i odgovarajućeg vremenskog perioda na način kao u Euklidovoj Knjizi V* ([12]).

Tu uputu moći će proslijediti tek Galileo. *Arhimedova propozicija* bila je prvi i prije Galilea posljednji egzaktno formulirani teorem o gibanju.

U *imperijalnoj epohi* (1. st. pr. n. e.–5. st.) nastao je Ptolomeijev *Almagest* (2. st.), u kojem je obnovljen i jasno formuliran Hiparhov geocentrični sustav. Ptolomej je obnovio Aristotelov argument protiv gibanja Zemlje. Ako se izuzme *Almagest*, može se reći da imperijalna epoha nije dala originalnih znanstvenih rezultata u prirodnoj filozofiji, iako u tom dugom periodu djeluju i *Akademija* u Ateni i *Škola* u Aleksandriji. Iz ovog vremena su geometri Heron (2. st.) i Papus (4. st.): oni su proučavali padanje po kosini, ali bez jasnih zaključaka. Kraj imperijalne epohe označava i početak tzv. *Mračnog doba* (koje će trajati do 11. st., kao isključivo europski fenomen), kad se na udaru našla svjetovna znanost. Aleksandrijska *Škola* zatvorena je 415. g., a atenska *Akademija* 529. g. Ipak, već u 6. st. u crkvenim krugovima (koji postaju jedini intelektualni centri) javlja se interes za antičku filozofiju i znanost. Ivan Aleksandrijski (poznatiji po nadimku *Philopono*) osporava Aristotelovu fiziku gotovo s Galileovog stanovišta. Prije svega odbacuje punoću i nošenje kao uvjete gibanja. Prvi najavljuje *princip ekvivalencije*: odbija tvrdnju da brzina slobodnog padanja tijela ovisi o njegovoj težini i upućuje na promatranje. Naslućuje *princip inercije* kao *težnju tijela da zadrži svoj poredak*. Slično Hiparhu, misli da se izbacivanjem na projektil prenese neko svojstvo, kasnije nazvano *impetus* ili *vis impressa*, koje je odgovorno za gibanje; za razliku od Hiparha, drži da se impetus iscrpljuje tokom gibanja.

Tokom *Mračnog doba* antička znanost je u Europi gotovo zaboravljena, ali je sačuvana u arapskim prijevodima (8. i 9. st.) najznačajnijih grčkih filozofskih i matematičkih djela. Prevođenje arapskih tekstova na latinski počelo je u 12. st. Teorija proporcija preživjela je samo u smislu *Knjige VII* ([12]).

7 Oksfordska i pariška škola

U 14. st. ostvaren je u prirodnoj filozofiji napredak u dva smjera: prvi se odnosi na jasnu kritiku Aristotelove fizike, a drugi na kinematiku *jednoliko ubrzanog gibanja* (koja se, međutim, ne dovodi u vezu sa slobodnim padom). Zasluge za taj napredak pripadaju oksfordskim i pariškim franjevačkim skolasticima.

U oksfordskoj školi (*Merton College*) djeluju Th. Bradwaedine, R. Swineshead , W. Heytesbury i J. Dumbleton i dr. Kao prvenstveno logičari, oni se bave formalnom kinematikom izvan fizikalnog konteksta. Za *jednoliko gibanje* imaju definiciju koja je (kao što ćemo vidjeti, t. 9) ekvivalentna Aristotelovoj:

Gibanje je jednoliko ako se u jednakim vremenima prevaljuju jednaki putovi.

W. Heytesbury (1313–1372) govori o proizvoljno *ubrzanom gibanju* i o stupnju ubrzanosti:

Za gibajuće tijelo koje polazi iz mirovanja moguće je zamisliti stupanj brzine koji raste beskonačno. Na isti način moguće je zamisliti stupanj ubrzanosti ili usporenosti s kojom se gibanje tijela može ubrzavati ili usporavati beskonačno brzo ili sporo. Ovaj drugi stupanj određen je brzinom na isti način kao brzina neprekidno pređenim putom. Po analogiji s jednolikim gibanjem. Heytesbury definira *jednoliko ubrzano gibanje kao ono kome se brzina jednoliko mijenja, tj. u jednakim vremenskim intervalima ima jednake priraste.*

Iz daljnjeg Heytesburyjevog teksta možemo zaključiti da fraza *tijelo polazi iz mirovanja* znači da je početna brzina jednaka nuli.

Heytesburyjeva osnovna pretpostavka je da se *svako gibanje u svakom vremenskom intervalu može zamijeniti "ekvivalentnim" jednolikim gibanjem, koje u tom intervalu prevaljuje isti put.* Za *jednoliko ubrzano gibanje* on formulira tzv. *Mertonsko pravilo*, u kojem opisuje odgovarajuće ekvivalentno jednoliko gibanje ([4, 6]):

Ako se tijelo giba jednoliko ubrzano, u danom vremenskom intervalu *ono prevaljuje isti put kao da se gibalo jednoliko sa srednjom brzinom u tom intervalu.*

Oksfordski skolastici predlagali su neka artificijelna gibanja i *promjene* kao primjere jednolike ubrzanosti, ali osnovni primjer - *slobodni pad* - nisu mogli prepoznati.

U pariškoj školi odbacuju gibanje kao nošenje ili potiskivanje. J. Buridan obnavlja Hiparhovu i Philoponovu ideju o *impetusu* i tvrdi, ne sasvim jasno, da je ta veličina proporcionalna brzini i veličini (težini) tijela. Naslućuje *princip inercije* tvrdnjom da se *impetus održava neograničeno ako ga ne smanji otpor sredstva ili ga ne promjeni neko drugo djelovanje.* Buridan implicitno govori o *izotropnosti prostora* (priča o *Buridanovom magarcu*). A. Saksonski osporava Aristotelov stav da je brzina padanja proporcionalna pređenom putu i tvrdi da je *proporcionalna proteklom vremenu*, ali i ovu tvrdnju odbacuje jer drži da bi ona opravdavala i beskonačno veliku brzinu. N. Orezme (1320–1382) je preteča Kopernika, s neobjavljenim djelom *Traktat o Nebu i Svijetu.* Svjestan je relativnosti gibanja Zemlje i Neba. Negira Aristotelov (Ptolomeijev) argument: tvrdi da se *ispušteni kamen giba na istok zajedno sa zrakom kroz koji prolazi i zajedno sa svim donjim dijelom Svijeta.* Pobija i ostale geocentrične argumente.

Orezmeova *teorija kvaliteta* nastala je (vjerojatno) kao apstraktno poopćenje oksfordske kinematike (v. [6], p. 66). Orezme polazi od pretpostavke da se svaka *mjerljiva veličina* može predstaviti dužinom. On uvodi pravokutni koordinatni sustav: na apscisu nanosi se *subjekt*, a na ordinatu *intenzitet kvaliteta*; lik ispod grafa kvaliteta je *totalni kvalitet.* Kvalitet se klasificira prema njegovom grafu. Horizontalni *pravac* opisuje *jednoliki*, a kosi *jednoliko deformirani kvalitet.* Totalni kvalitet jednolikog odn. jednoliko deformiranog kvaliteta je pravokutnik odn. trokut ispod grafa. Orezme je svjestan karakterističnog svojstva *jednoliko deformiranog* kvaliteta: to je *linearna funkcija* subjekta. (Naravno, tu činjenicu on je mogao razumijevati samo u smislu stare teorije proporcija). Orezme formulira *zakon* prema kojem je *jednoliko deformirani kvalitet ekvivalentan jednolikom kvalitetu s intenzitetom jednakim intenzitetu deformiranog kvaliteta u srednjoj točki subjekta:*

oba imaju jednake totalne kvalitete. Njegovo obrazloženje slično je dokazu Propozicije I.41 u [12].

Orezme je svjestan kinematičke interpretacije svoje teorije, pa kvalitet nekad naziva *brzinom*, ali posebno ne ističe (iako bez sumnje podrazumijeva) da je totalni kvalitet *prevaljeni put* (v. [4], Ch. 6, [6], p. 62). (Činjenica da je prevaljeni put jednak liku ispod grafa brzine poznata je i Orezmeovom suvremeniku, talijanskom franjevcu G. di Casaliju (v. [4], Ch. 6)). Ako to uzmemo u obzir, Orezmeov zakon identičan je *Mertonskom pravilu.* Kao ni oksfordski skolastičari, Orezme eksplicitno ne formulira kvadratični zakon, niti jednoliko deformirani kvalitet dovodi u vezu sa slobodnim padom.

Ideje oksfordske i pariške škole utjecale su na talijanske i španjolske skolastike 15. i 16. st. U venecijanskom izdanju Heytesburyjeve knjige 1494. pojavljuje se Oresmeova geometrijska interpretacija, vjerojatno dodana od editora. Španjolac Dominic de Soto (1494–1560) ponavlja Heytesburijevu definiciju jednoliko ubrzanog gibanja, ali tvrdi (bez obrazloženja i bez pretenzija na originalnost) mnogo više: *slobodni pad i gibanje projektila primjeri su jednoliko ubrzanog gibanja* ([4], s. 555). Time je kinematika jednoliko ubrzanog gibanja postala *dinamička* teorija. Bila je to sinteza svih prethodnih spoznaja o jednolikoj ubrzanosti i slobodnom padu (v. [6]).

8 Galileova fenomenološka fizika

U 16. st. izvan skolastičkih krugova u Italiji djeluju N. Tartaglia (1500–1557) i njegovi učenici O. Ricci (1540–1603) i J. B. Benedetti (1530–1590), G. del Monte (1545–1607), Ch. Clavius (1538-1612), Giordano Bruno (1548–1600), Leonardo da Vinci i dr. (Leonardo u prirodnoj filozofiji nije djelovao javno, pa nije utjecao na suvremenike; iz njegovih spisa, koji su objavljeni mnogo kasnije, vidljivo je da se približio Galileovim shvaćanjima, a vjerojatno je i eksperimentirao). Ovom vremenu pripada i flamanski inženjer, fizičar i matematičar S. Stevin (1548–1620).

Benedetti se često apostrofira kao neposredni Galileov prethodnik. Prije svega on gotovo točno formulira *princip ekvivalencije*: tvrdi (i za to nudi spekulativni dokaz) da tijela od istog materijala padaju istom brzinom, neovisno o težini. S. Stevin ovu tvrdnju je potvrdio 1586. pouzdanim pokusima. Benedeti najavljuje *princip inercije* tvrdnjom da se *impetus* održava na pravcu. Razmatrajući gibanje točka, zaključuje da će se tijelo, koje je vezano na periferiji točka, ako se oslobodi te veze, gibati dalje po pravcu. Približava se *pojmu sile* tvrdnjom da konstantno djelovanje uzrokuje ubrzavanje jer se kontinuirano dodaje impetus. Pomoću dodavanja impetusa pokušava objasniti slobodni pad. Razmišlja o kosom hicu i padu po kosini, ali bez jasnih zaključaka. Benedetti je na Galilea doista utjecao, ali prije svega oštrom (i ne uvijek korektnom) kritikom peripatetika.

Giordano potpuno odbacuje Aristotelovu fiziku. Slično Orezmeu, ali jasnije, pobija Ptolomeijev argument: predlaže pokus u kome se dva jednaka kamena istovremeno ispuštaju s iste visine nad istim mjestom, ali jedan iz broda a drugi na obali (u trenutku poravnanja); Giordano tvrdi da će kamen ispušten iz broda pasti ispred onoga ispuštenog na obali. Rezultat (zamišljenog) pokusa objašnjava činjenicom da se kamen ispušten s broda *giba i horizontalno* zajedno s brodom, od kojeg je dobio *virtus impressa*.

Galileo Galilei (1564–1642), po svom znanstvenom i javnom djelovanju centralna je figura *Znanstvene Revolucije.* Bio je uporan borac za znanstvenu istinu i slobodu znanstvenog mišljenja. Rođen je u Pisi, gdje je kratko studirao medicinu. Već 1583. počeo se baviti matematikom i prirodnom filozofijom. O. Ricci uvodi Galilea u Euklidove *Elemente* i Arhimedova djela. Galileo u matematici brzo napreduje i 1589. dobija mjesto profesora na Sveučilištu u Pisi, gdje će djelovati do 1592. Predaje *Elemente* (prvih pet knjiga), početnu Ptolomeijevu astronomiju i (za studente medicine) astrologiju. Razmišlja o slobodnom padu, ali je pod utjecajem zvanične aristotelovske fizike. Proučava Arhimeda i Benedettija. Shvaća da je pariška teorija o impetusu ili *vis impressa* pogrešna i dolazi do Hiparhovog stava. U ovom periodu on je ipak u "zdravorazumskoj" fazi. Misli da se tijelo u slobodnom padu ubrzava samo na početku, a da se zatim giba jednoliko i da mu je brzina proporcionalna težini. U to vrijeme otkrio je izokronost matematičkog njihala (ipak, misleći da je ono tautokrono). Galileov učenik i prvi biograf V. Viviani govori o njegovim mjerenjima slobodnog pada kuglica ispuštenih s *Kosog tornja* i o mjerenju perioda njihanja velikog lustera u pizanskoj *Katedrali.* Kako u Galileovim bilješkama nema tragova o tim aktivnostima , opće je mišljenje da tih pokusa nije bilo (v. J. L. Heilbron, Galileo, Oxford Univ. Press, 2010).

1592. Galileo prelazi na Sveučilište u Padovi, gdje ostaje do 1610. (kada je prešao u Firenzu kao medičijevski dvorski matematičar i astronom). U tom periodu on se oslobađa aristotelovskih osnovnih zabluda i teleoloških pitanja, te počinje misliti znanstveno. Organiziranim pokusima pristupa novom istraživanju pada materijalne točke po kosini. Svoje rane spoznaje izložio je u neobjavljenom rukopisu *Mecanica* (1593., posthumno publicirano 1649.; v. [9], p. 172, Note 28).

Proučava Kopernika (kojega prvi put spominje 1604.) i stječe uvjerenje da zemaljskim i nebeskim tijelima upravljaju isti prirodni zakoni. 1609. konstruirao je teleskop i došao do svojih čuvenih astronomskih otkrića. Svoja fizikalna i astronomska otkrića koristio je u beskompromisnoj obrani Kopernikovog učenja. Zbog toga je 1633. optužen za herezu i osuđen na doživotnu internaciju.

U padovanskom periodu Galileo je došao do spoznaja koje su za fiziku do danas ostale fundamentalne. To su *zakoni slobodnog pada*, *principi inercije, ekvivalencije i relativnosti*, te dva gnoseološka stava: *mehanistički princip* i *princip jednostavnosti*. U ovom periodu on je pomoću principa inercije, zakona slobodnog pada i zakona slaganja gibanja zaključio da se *projektil giba po paraboličnoj putanji*; bila je to prva netrivijalna primjena nove mehanike.

Početkom 17. st. još nisu postojale periodičke znanstvene publikacije, pa su se znanstvena postignuća obznanjivala u razgovorima, privatnoj korespondenciji i naravno u knjigama. Tako se za Galileova istraživanja znalo mnogo prije pojave njegovih djela. Svoje najvažnije fizikalne spoznaje Galileo je objavio u polemičkom pismu *Il saggiatore* (1623.), u kome je odgovorio tajniku Sv. Officia Ingoliju na njegove antikopernikanske argumente, a zatim u djelu *Dialogo sopra i due massime sistemi del mondo tolemaico e copernicano* (1632) (u daljnjem *Dialogo*), koje je najviše utjecalo na njegove sljedbenike. Kao manifest Kopernikovog učenja, to djelo je bilo neposredni povod za Galileovu osudu i stavljeno je na *Indeks*. U fundamentalnom djelu *Discorsi e demonstrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica i movimenti locali*(1638.) (u daljnjem *Discorsi*).

Galileo je rezimirao i detaljno objasnio svoje fiziku (ne citirajući, naravno, *Dialogo*). U istom djelu pomoću Arhimedovog *zakona poluge* zasnovao je *znanost o čvrstoći materijala*, što je označilo početak *mehanike kontinuuma*. S formalnog stanovišta *Discorsi* je najvažnije po tome što je u njemu teorija slobodnog pada, pada po kosini i gibanja projektila formulirana pomoću *teorije proporcija*. To je označilo početak suvremene *matematičke fizike* i ostvarenje Galileove mladenačke spoznaje (koju duguje Arhimedu) da je *knjiga prirode napisana jezikom matematike*.

Galileova otkrića rezultat su upornog usavršavanja eksperimentalne tehnike, pedantnog mjerenja i računanja (v. [5]). Za precizno mjerenje proteklog vremena konstruirao je vodenu i pješčanu uru. U svojim tekstovima on se izražava u terminima teorije proporcija, ali prije *Discorsi* ne koristi efektivno opću teoriju. To je razumljivo, jer su njegovi zaključci rezultati računanja s mjerenim (racionalnim) veličinama. Međutim, on u svojim formulacijama ne pretpostavlja sumjerljivost veličina o kojima govori.

Za Galilea pravocrtno gibanje prema centru Zemlje je imanentno svojstvo (*tendencija*) svakog tijela. U skladu sa svojim uvjerenjem Galileo odbija pitanje o uzroku pada: zadatak prirodne filozofije je prema Galileu samo da ustanovi kvantitativne zakone tog gibanja, tj. ovisnost brzine i prevaljenog puta o proteklom vremenu. Ovaj *mehanistički princip* formulira U *Discorsi* ovako:

Sada nije pravo vrijeme za istraživanje uzroka ubrzavanja naravnog gibanja, vezano za različita mišljenja filozofa, od kojih ga neki objašnjavaju privlačenjem prema centru, neki odbijanjem između malih dijelova tijela, dok ga neki pripisuju nekom naprezanju u mediju okruženja, koji potiskuje padajuće tijelo od jednog položaja do drugog. Sada, sve ove fantazije, i ostale također, trebalo bi da budu ispitane; ali to stvarno nije vrijedno pažnje...

Mjerenjem pada po kosini malog nagiba Galileo dolazi do otkrića koje ga je oduševilo: *putovi pređeni u sukcesivnim i jednakim vremenskim intervalima odnose kao neparni brojevi.* Iz toga on zaključuje (pomoću formule za zbroj sukcesivnih neparnih brojeva) da se *putovi prevaljeni od početka padanja odnose kao kvadrati proteklih vremena.* Iako dokaz pretpostavlja sumjerljivost vremenskih intervala, taj *kvadratični zakon za slobodni pad* Galileo formulira za proizvoljna protekla vremena. On želi zakon matematički opravdati polazeći od neke jednostavnije pretpostavke. Tome je neposredno prethodilo (v. [5]) njegovo eksperimentalno otkriće da je period matematičkog njihala proporcionalan kvadratnom korijenu duljine njihala. Da bi otklonio trenje o podlogu Galileo umjesto po kosini promatra pad po luku dovoljno dugog njihala. U to vrijeme on ne zna da je slobodni pad (i pad po kosini) jednoliko ubrzano gibanje, pa ponavlja aristotelovsku zabludu: pretpostavlja da je postignuta brzina pada proporcionalna prevaljenom putu. Tu pretpostavku naziva "novootkrivenim naravnim i očiglednim načelom", iz kojeg *kvadratični zakon* izvodi nekorektnom manipulacijom s omjerima. Zakon (s krivim dokazom) prvi put obznanjuje 1604. u čuvenom pismu fra Paolu Sarpiju (izvrsno upućenom u matematiku i prirodnu filozofiju).

1609. počinje treći period Galileove znanstvene evolucije. On shvaća da je "očigledno načelo" pogrešno. Budući da padanje nije jednoliko gibanje, Galileo se odlučuje (po svom *principu jednostavnosti*) za pretpostavku da je *slobodno padanje jednoliko ubrzano gibanje*, tj. da je *postignuta brzina proporcionalna proteklom vremenu*. Iako brzinu ne može definirati, on zna da je njen graf kosi pravac). Novu teoriju, s opširnom fizikalnom argumentacijom, objavio je u *Dialogo*. On ponavlja Orezmeovu geometrijsku interpretaciju, ali pokušava *dokazati* da je prevaljeni put određen likom ispod grafa brzine. S današnjeg stanovišta njegov dokaz nije korektan. Galileo primjenjuje u njegovo vrijeme raširenu *metodu nedjeljivih*, pomoću koje se u nekim jednostavnim slučajevima (*Cavalierijev princip*) mogla ustanoviti jednakost geometrijskih likova kao *veličina* (površina). Metoda se zasniva na interpretaciji lika kao *agregata* dužina (*nedjeljivih*). Iako podsjeća na integralnu sumu, taj postupak nije dobro definiran. Galileo interpretira *prevaljeni put kao agregat stupnjeva brzine* i konstatira da je to trokut kome su katete proteklo vrijeme i postignuta brzina. Iz toga je mogao neposredno zaključiti (npr. prema Propoziciji VI.19 iz [12]) da vrijedi *kvadratični zakon*, ali umjesto toga on kao posljedicu ističe samo činjenicu identičnu *Mertonskom pravilu*:

"... i zato ako je tijelo padalo ubrzano sa stupnjevima brzine koji odgovaraju trokutu, ... vrlo je prihvatljivo i vjerojatno da će, padajući jednolikim brzinama koje odgovaraju pravokutniku, prevaliti u tom jednolikom gibanju dva puta veći put nego u ubrzanom gibanju".

Galileo je znao da iz *Mertonskog pravila* slijedi *kvadratični zakon* (za sumjerljiva protekla vremena), ali to na ovom mjestu ne spominje. Formalni dokaz (za proizvoljna protekla vremena) izložit će u *Discorsi*.

Iako njegovo rezoniranje podsjeća na ono iz oksfordske i pariške škole, Galileo izričito napominje da prije njega nitko nije došao do istih zaključaka. Osim Aristotela, on nikad ne citira svoje prethodnike. Ovakav Galileov stav nekad se komentira kao ignorancija i sklonost plagiranju. Ali, valja uzeti u obzir da (za razliku od svojih prethodnika) Galileo u cijelom svom opusu govori isključivo u fizikalnom kontekstu; kao što smo vidjeli, *kvadratični zakon za slobodni pad* otkrio je prije nego je znao da je to gibanje jednoliko ubrzano. Taj zakon prije njega nije nitko eksplicitno formulirao. U tom smislu Galileova izjava o prioritetu je razumljiva.

Galileo zna da je i pad po kosini jednoliko ubrzano gibanje te ističe ovu važnu činjenicu:

Konačni nakupljeni impetus ovisi samo o visini (a ne o nagibu) kosine; *s postignutim konačnim impetusom tijelo se može podići do iste visine s koje je padalo.*

Kao argument navodi da je u slučaju jednakih visina konačni položaj tijela jednako udaljen od centra Zemlje, pa je isti i *nakupljeni impetus.* S današnjeg stanovišta obje činjenice izražavaju *zakon održanja energije*; u *Discorsi* Galileo će ih izvesti iz *kvadratičnog zakona.*

Budući da se po kosini s manjim nagibom materijalna točka slabije ubrzava, Galileo zaključuje da se ona *po horizontalnoj ploči giba jednoliko* (ploča poništava *naravnu tendenciju*); to je Galieov oblik *principa inercije.* Detljnije objašnjenje daje u *Discorsi* (p. 172):

Impetus je maksimalan na AB [vertikala], *smanjuje se sa smanjenjem inklinacije i iščezava na AC* [horizontala], *gdje je tijelo indiferentno prema gibanju i mirovanju, i nema u sebi tendenciju niti da se giba u bilo kom smjeru, niti da pruža otpor gibanju. Zato je nemoguće da bi se teško tijelo naravno gibalo prema gore, udaljavajući se od zajedničkog centra prema kome teže sva teška tijela; i nemoguće je da se tijelo spontano pokrene osim da se počne približavati zajedničkom centru. Prema tome, na horizontali, koja ovdje znači površinu koja je ekvidistantna od zajedničkog centra, i zato potpuno lišena nagiba, impetus ili moment tijela bit će nula.*

Opterećen aristotelovskim *kozmologijskim principom inercije*, Galileo tvrdi da bi se točka (ako je nešto ne bi zaustavilo) gibala po velikoj kružnici oko središta Zemlje. Galileo nema pojam mase neovisan o težini i zato nema pravi pojam slobodnog tijela. Iako je *princip inercije* njegovo najpopularnije otkriće, Galileo ga nije shvaćao u punoj općenitosti. Naravno, njegova kriva interpretacija nema značenja u ovozemaljskom gibanju, ali ga je na kozmologijskoj skali dovodila do pogrešnih zaključaka.

U pokusima s kosinom Galileo je ustanovio da *različita materi-*

jalna tijela (ako se zanemari otpor zraka) padaju istom brzinom. Ovaj *princip ekvivalencije* sa stanovišta Newtonove fizike izražava *jednakost (ekvivalenciju) trome i teške mase.* Tu fundamentalnu spoznaju Galileo je djelomično naslijedio od Benedettija. U *Discorsi* ovaj princip on opširno objašnjava. Upozorava na delikatnost pokusa: da bi se s velikom sigurnošću potvrdio zaključak trebalo bi da se istovremeno u *vakuumu* ispuštaju materijalne točke (male kuglice) od različitog materijala i dovoljno različite težine (npr. od olova i pluta). U realnom eksperimentu doći će do razlike u brzini. Galileo vjerojatno nije znao za Stevinova mjerenja. Nakon mnogih pokusa zaključio je da ispušteno tijelo prevali (u današnjim jedinicama) 91,44 m u 5 sekundi; taj rezultat odgovara ubrzanju 7,32 $msek^{-2}$ (točna vrijednost za Padovu je 9,81 $msek^{-2}$).

Galileo obara *Ptolomejev argument* protiv gibanja Zemlje. On opisuje pokuse na brodu, koji prema njegovim bilješkama nisu bili samo zamišljeni. Galileo ponavlja Giordanovu (Orezmeovu) tvrdnju da pad tijela na brodu koji se giba ne pokazuje zaostajanje za mjestom iznad kojeg je ispušteno. Međutim, on ovaj zaključak generalizira do svoje (s današnjeg stanovišta) najznačajnije spoznaje: *na temelju mehaničkih pojava u potpalublju velike lađe ne može se utvrditi da li ona miruje ili se jednoliko giba.* Za razliku od svojih drugih spoznaja (koje prepoznajemo u njegovim rješenjima konkretnih problema), ovu je Galileo opisao u punoj općenitosti. Njegov tekst (u *Il saggiatore*) je sljedeći:

U velikoj prostoriji pod palubom neke velike lađe zatvorite se s jednim prijateljem i ondje pustite muhe, leptire i slične leteće životinjice. Postavite tamo i jednu veliku posudu s vodom i ribicama u njoj. Pripravite i jednu visoku posudu iz koje kroz tijesno grlo voda kapa u drugu posudu ispod nje. Dok lađa miruje, pažljivo promatrajte kako one leteće životinjice jednako brzo lete na sve strane prostorije. Vidjet ćete kako ribe indiferentno plove prema bilo kojoj strani posude. Kapi koje cure sve će padati u donju posudu... Pazite, kad su sve ove stvari u redu, pokrenite lađu bilo kojom brzinom. Ako je kretanje jednolično, bez ljuljanja na jednu ili drugu stranu, vi nećete zapaziti ni najmanju promjenu kod navedenih stvari, niti ćete se sami moći uvjeriti da li je *lađa u gibanju ili miruje... Ako me pitate za razlog svih tih učinaka, odgovorit ću vam: Jer opće gibanje lađe, koje se prenosi i na zrak i na sve one stvari koje su u njoj, a ne protivi se njihovoj prirodi, ostaje nepomućeno i na njima...*

To je *princip relativnosti*: *zakoni fizike invarijantni su prema Galileovim transformacijama.* Do te spoznaje (kao i do *principa inercije*) Galileo je mogao doći zato što je referencijski sustav Zemlje, pa onda i broda (koji miruje ili jednoliko translatira) *gotovo inercijalan.* (*Princip inercije* slijedi neposredno iz *principa relativnosti*, čega Galileo nije bio svjestan). Primjenjujući *princip relativnosti* na *horizontalni hitac*, Galileo dolazi do netrivijalnog zaključka da *vrijeme leta ne ovisi o početnoj brzini*: hitac na kopnu identičan je slobodnom padanju na brodu, a vrijeme pada na brodu ne ovisi o brzini broda.

Obarajući *Ptolomeijev argument* Galieo u *Dialogo* (p. 249, Sl.) plauzibilnim rezoniranjem dolazi do suptilnog zapažanja: *zbog dnevne rotacije Zemlje, tijelo koje slobodno pada ne samo da neće skrenuti na zapad, nego će čak skrenuti na istok.* Njegov argument možemo ovako opisati (Sl.): Neka je tijelo ispušteno u točki A, iznad točke B na površini Zemlje. Do trenutka pada, u *apsolutnom sustavu* (zbog dnevne rotacije Zemlje) tijelo pređe jednoliko neki luk (približno segment) AC i jednoliko ubrzano segment $CD = AB$. Prema pravilu *paralelograma* u trenutku pada tijelo ima pomak AD. U sustavu Zemlje pomak je CE. Očigledno je $BD > BE$, pa je ED *otklon na istok.* Lako se pokazuje da je ED dobra aproksimacija egzaktnog *Coriollisovog otklona.* Galileo je znao da se zbog malosti ovaj efekt ne može pokusima dokazati i iskoristiti kao dokaz dnevne rotacije. A upravo taj efekt bio bi jedini valjani dokaz. (Čak i za Galileove suvremenike koji apriorno nisu odbacivali heliocentrični sustav, dnevna rotacija Zemlje bila je teško prihvatljiva). Galileo nije došao na ideju *Foucaultovog njihala*, koja se temelji na istom efektu, a omogućuje neposrednu opservaciju dnevne rotacije. Nažalost, on je bio uvjeren da ima bolji dokaz, a taj je bio pogrešan (*plima i oseka*, v. niže). Pitanje o otklonu na istok ponovo će postaviti Newton.

Iako je svim svojim znanstvenim angažmanom nastojao osloboditi prirodnu filozofiju peripatetičkih zabluda, Galileo se sam nije uspio potpuno odreći aristotelovskih shvaćanja. Uvjerenje da je svako gibanje na velikoj skali kružno, navelo ga je na krivu interpretaciju principa inercije. Držao je da se i u slobodnom padu s velike visine tijelo giba ne po pravcu, nego po polukružnici kojoj je početak u mjestu ispuštanja, a kraj u centru Zemlje.

Jedan od peripatetičkih argumenata protiv dnevne rotacije Zemlje bila je stabilnost tijela na njenoj površini. Iako je bilo dovoljno dokazati da je stabilnost sačuvana zbog malosti (kutne) brzine Zemlje, Galileo je pokušao dokazati da je ona sačuvana i kod velike brzine. On tvrdi da je *uzrok izbacivanja* (centrifugalna sila) proporcionalna kutnoj brzini, ali slijedeći zabludu o kozmologijskoj kružnoj inerciji, misli da će se nakon udaljavanja od Zemlje tijelo ipak vratiti na njenu površinu. On nije bio potpuno svjestan činjenice da je (približna) inercijalnost referencijskog sustava Zemlje nužna za opstojnost svega na njenoj površini, kao i za valjanost njegove fizike.

Obaranje peripatetičkih argumenata nije pružalo ovozemaljski dokaz za dnevno gibanje Zemlje. Galileo je tragao za takvim dokazom i bio je uvjeren da ga je našao u fenomenu *plime i oseke*. Iako je iskustvo pomoraca ukazivalo na vezu tog fenomena s gibanjem Mjeseca, Galileo je takvo tumačenje smatrao praznovjerjem. Danas nam izgleda nevjerojatnim da je autor principa relativnosti mislio da slaba vrtnja Zemlje može uzrokovati gibanje oceana, a istovremeno bio uvjeren da ni jaka vrtnja ne može trajno odbaciti tijelo s njene površine.

Najznačajniji Galileov suvremenik je njemački astronom i matematičar Johannes Kepler (1571–1631). Njegovi čuveni *zakoni planetarnog gibanja* djelovat će na rađanje moderne znanosti ne manje od Galileovih spoznaja. Kao kopernikanac s oduševljenjem je podržavao Galileova astronomska otkrića, ali je kritizirao njegovu teoriju plime i oseke. Iako je visoko cijenio Keplera, inzistirajući na kozmologijskom kružnom gibanju Galileo je ignorirao njegovu nebesku mehaniku (za drugo tumačenje v. [10]). Kepler je prvi došao na ideju *univerzalne gravitacije.* U *Astronomia nova* (1609) on piše sljedeće: *"Gravitacija je međusobna naklonost između srodnih tijela, koja ih nastoji sjediniti i spojiti zajedno. Magnetska sposobnost je iste vrste. Ako su na nekom* *mjestu u svijetu dva kamena stavljena jedan blizu drugoga i izvan sfere djelovanja svih drugih tijela koja bi ih mogla privlačiti, oni će, kao dva magneta, težiti sjedinjenju u nekom srednjem položaju".* Bez obzira na njegov metafizički kontekst (ako je fraza "međusobna naklonost srodnih tijela" uopće takva; ona se ne razlikuje od "tendencije" teškog tijela da dostigne centar Zemlje), taj tekst govori o interakciji dugog dometa između *svake dvije mase*; Kepler čak predlaže za privlačenje zakon $\frac{1}{r}$.

Galileov učenik B. Toricelli (1608–1647) značajno je unaprijedio Galileovu fiziku. Oslobodio se Galileovih grešaka. Shvatio je pojam *mase* i općenitost *principa inercije.* Galileov učenik bio je i matematičar B. Cavallieri (1598–1647), autor principa koji nosi njegovo ime i po kojemu ima mjesto među pretečama integralnog računa.

Galileova istraživanja imala su golem odjek. Među njegovim suvremenicima je i R. Descartes (1596–1650). U svojim pismima, a posebno u *Principia philosophie* (1644), Descartes spekulativno izlaže značajne fizikalne spoznaje (do kojih je došao možda prije nego je čitao Galilea). Imao je generalnu formulaciju *principa inercije*: *Naravno stanje tijela je ili mirovanje ili, ako je inicijalno pokrenuto nekim vanjskim djelovanjem, jednoliko gibanje po pravcu.* Prepoznao je važnost *količine gibanja* (koju korektno definira) i formulirao *zakon održanja*:

U svoj stvorenoj materiji postoji određena količina gibanja koja se nikad ne povećava niti smanjuje.

Galileovu fiziku podržavali su između ostalih P. Gassendi (1592–1655), M. Mersenne (1588–1648) (koji je preveo *Mecanicu* i *Dialogo* na francuski) i P. Fermat (1601–1665) (koji je ipak kritizirao Galileovo rezoniranje s agregatima). Naravno, među Galileovim suvremenicima bilo je i onih (npr. H. Fabri (1608-1688)) koji su ga osporavali , naročito njegov *kvadratični zakon.*

U daljnjem tekstu opisujemo Galileovu *Matematičku fiziku.*

9 Jednoliko gibanje

Već je rečeno da se u *Discorsi* Galileo eksplicitno ne poziva na *Dialogo*, pa prije matematičke formulacije svoju fiziku opširno objašnjava, opisujući stvarne i zamišljene pokuse; to se posebno odnosi na *princip ekvivalencije* i *princip inercije*. Poglavlje o jednolikom gibanju je formalno. U njemu se čak ne spominje gibanje po horizontalnoj ploči kao jedino naravno jednoliko gibanje.

Početćemo sa suvremenim opisom Galileove teorije.

Neka je P polupravac s početkom u točki O_P. Ako je $x \in P, x \neq O_P$, parom (O_P, x) određena je dužina, koju označavamo s $x - O_P$; tada je $\Sigma_P = \{x - O_P : x \in P, x \neq O_P\} \equiv \Sigma$. Preslikavanje $x \longrightarrow x - O_P$ je bijekcija skupova P i Σ. Uređaj sistema Σ prirodno se prenosi na poluos P: $x_1 < x_2$ ako je $x_1 - O_P < x_2 - O_P$. Preslikavanjem $x \longrightarrow x - O_P$ na P je definirana *afina* struktura: ako je $O_P < x_1 < x_2$, paru (x_1, x_2) pridružena je dužina $x_2 - x_1 = (x_2 - O_P) - (1_2 - O_P) \in \Sigma$; za $x_1 < x_2 < x_3$ vrijedi $(x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) = x_3 - x_1$. Ako je $x_2 - x_1 = \sigma \in \Sigma_P$, pišemo $x_2 = x_1 + \sigma$.

U Aristotelovom tekstu (t. 6, s. 34) pored pređenog puta (dužine) kao *veličina* pojavljuje se proteklo vrijeme, tj. *vremenski interval* određen s dva različita vremenska *trenutka*. Jednakost, zbrajanje i trihotomnost vremenskih intervala definirani su pomoću *ure*. (Ovdje nećemo govoriti o fundamentalnoj teškoći u tom postupku). Skup svih vremenskih intervala je sistem koji ćemo označavati s Δ. Potpunost i funkcionalnost sistema Δ naše su osnovne predstave o vremenu; $\mathbb{R}(\Delta)$ je striktno uređeno potpuno polupolje, pa je $\mathbb{R}(\Delta) \equiv \mathbb{R}(\Sigma)$; sistemi Δ i Σ su izomorfni.

Neka je T neograničeni vremenski interval s "početkom" u trenutku O_T. Ako je $t \in T, t \neq O_T$, parom (O_T, t) određeno je proteklo vrijeme, koje označavamo s $t - O_T$; očigledno je $\Delta_T = \{t - O_T : t \in T, x \neq O_T\} = \Delta$. Preslikavanje $t \longrightarrow t - O_T$ je bijekcija skupa T i sistema Δ. Uređaj sistema Δ prirodno se prenosi na skup T: $t_1 < t_2$ ako je $t_1 - O_T < t_2 - O_T$. Skup T ima afinu strukturu: ako je $O_T < t_1 < t_2$, paru (t_1, t_2) pridruženo je proteklo vrijeme

$$t_2 - t_1 = (t_2 - O_T) - (t_1 - O_T) \in \Delta; \tag{9.1}$$

za $t_1 < t_2 < t_3$ vrijedi

$$(t_3 - t_2) + (t_2 - t_1) = t_3 - t_1. \tag{9.2}$$

Ako je $t_2 - t_1 = \tau \in \Delta$, pišemo $t_2 = t_1 + \tau$. Aristotelovu tekst o gibanju i jednolikosti (t. 6) možemo ovako formalizirati:

Definicija 9.1 (Aristotel)**.** *Gibanje je preslikavanje $x : T \to P$,*

$$x(O_T) = O_P, x(t) = O_P + g(t - O_T), t \neq O_T, \tag{9.3}$$

gdje je $g : \Delta \to \Sigma$ bijektivna i strogo rastuća funkcija:

$$\tau_1, \tau_2 \in \Delta, \tau_1 < \tau_2 \implies g(\tau_1) < g(\tau_2). \tag{9.4}$$

Funkcija g je *prirast puta*; točka $x(t) \in P$ je *položaj u trenutku* $t \in T$; ako je $t_1 < t_2$, onda je $x(t_1) < x(t_2)$ *prevaljeni put* u proteklom vremenu $t_1 - t_2$. Primijetimo da je po *Teoremu o monotonoj funkciji* preslikavanje g *neprekidno.* Nekad ćemo (ako ne prijeti zabuna) gibanjem nazivati funkciju g.

Definicija 9.2 (Aristotel)**.** *Gibanje* (9.3) *je jednoliko ako je preslikavanje g $\mathbb{N}$-homogeno:*

$$\tau \in \Delta, n \in \mathbb{N} \implies g(n\tau) = g(\tau). \tag{9.5}$$

Teorem 9.3 (Arhimed)**.** *Za gibanje* (9.3) *sljedeći uvjeti su ekvivalentni:*

a) Gibanje je jednoliko, tj. vrijedi (9.4) *i* (9.5).

b) Funkcija je linearna, tj. za svako $\tau_1, \tau_2 \in \Delta$ vrijedi

$$g(\tau_1) : g(\tau_2) = \tau_1 : \tau_2 \tag{9.6}$$

(prevaljeni put je proporcionalan proteklom vremenu).

c) Funkcija g je aditivna, tj. za svako $\tau_1, \tau_2 \in \Delta$ vrijedi

$$g(\tau_1 + \tau_2) = g(\tau_1) + g(\tau_2). \tag{9.7}$$

Dokaz. Iz *a)* slijedi

$$\begin{aligned} &\tau_1, \tau_2 \in \Delta, m, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \\ &m\tau_1 >=< n\tau_2 \iff g(m\tau_1) >=< g(n\tau_2) \iff mg(\tau_1) >=< ng(\tau_2); \end{aligned} \tag{9.8}$$

iz toga prema Teoremu 4.9 slijedi b). Iz b) prema Teoremu 3.8 imamo

$$(g(\tau_1) + g(\tau_2)) : g(\tau_2) = (\tau_1 + \tau_2) : \tau_2 = g(\tau_1 + \tau_2) : g(\tau_2); \tag{9.9}$$

iz toga prema $(2.4)_2$ slijedi c). Iz c) slijed (9.4) i (9.5), tj. a). □

Sljedeća karakterizacija jednolikog gibanja pripada oksfordskoj školi.

Teorem 9.4. *Gibanje* (9.3) *je jednoliko ako i samo ako za svako $t \in T, \tau \in \Delta$ vrijedi*

$$x(t + \tau) - x(t) = g(\tau). \tag{9.10}$$

Dokaz. Za $t \in T, t \neq O_T, \tau \in \Delta$ iz (9.3) dobijamo

$$x(t + \tau) - x(t) = (O_P + g((t + \tau) - O_T)) - (O_P + g(t - O_T)). \tag{9.11}$$

Ako je gibanje jednoliko, prema Teoremu 9.3 g je aditivno, pa je

$$g((t + \tau) - O_T) = g((t - O_T) + \tau) = g(t - O_T) + g(\tau). \tag{9.12}$$

desna strana u (9.11) jednaka je

$$((O_P + g(t - O_T)) + g(\tau)) - ((O_P + g(t - O_T)) = g(\tau). \tag{9.13}$$

Obratno, ako vrijedi (9.10), imamo

$$\begin{aligned} x(t + \tau + \tau') &= x(t + \tau) + g(\tau') = x(t) + g(\tau) + g(\tau'), \\ x(t + \tau + \tau') &= x(t) + g(\tau + \tau'), \end{aligned} \tag{9.14}$$

iz toga

$$g(\tau + \tau') = g(\tau) + g(\tau'), \tag{9.15}$$

pa prema Teoremu 9.3 gibanje je jednoliko. □

Prema tom teoremu prevaljeni put u intervalu $(\tau, t+\tau)$ ne ovisi o trenutku t, tj. *u jednakim vremenskim intervalima prevaljuju se jednaki putovi.* U *Merton Collegeu* su tu karakterizaciju jednolikosti vjerojatno *a priori* smatrali identičnom Aristotelovoj definiciji. Galileo također nije držao da bi ekvivalenciju tih dviju definicija trebalo obrazložiti. (Kao što ćemo vidjeti, on svoje izlaganje počinje s mertonskom definicijom, a u nastavku se, kao i Arhimed, drži Aristotelove definicije).

Prema *euklidskoj karakterizaciji pravca* (v. t.5) graf *jednolikog* gibanja (9.3) je kosi polupravac u $T \times P$ (kao što smo vidjeli, toga je bio svjestan Orezme).

Teorem 9.5. *Za svako $(\tau_0, c) \in \Delta \times \Sigma$ postoji jedinstveno jednoliko gibanje* (9.3) *takvo da je $g(\tau_0) = c$.*

Dokaz. Za $\tau \in \Delta$ neka je $g(\tau) = \gamma(\tau_0, \tau, c)$; to je bijekcija $\Delta \longrightarrow \Sigma$. Imamo

$$\tau : \tau_0 = g(\tau) : c,\ \tau' : \tau_0 = g(\tau') : c, \tag{9.16}$$

$$g(\tau) : g(\tau') = (g(\tau) : c) \cdot (c : g(\tau')) = (\tau : \tau_0) \cdot (\tau_0 : \tau') = \tau : \tau', \tag{9.17}$$

$$g(a_0) = \gamma(a_0, a_0, c); \tag{9.18}$$

prema Teoremu 9.3 gibanje (9.3) je jednoliko. Ako jednoliko gibanje $g_1 : \Delta \to \Sigma$ zadovoljava uvjet $g_1(\tau_0) = c$, za svako $\tau \in \Delta$ imamo $g_1(\tau) : c = \tau : \tau_0 = g(\tau) : c$, iz toga $g_1(\tau) = g(\tau)$, tj. $g_1 = g$. □

Teorem 9.6. *Neka su gibanja $g_1, g_2 : \Delta \to \Sigma$ jednolika. Tada postoje $c_1, c_2 \in \Sigma$ takvi da za svako $\tau \in \Delta$ vrijedi*

$$g_1(\tau) : g_2(\tau) = c_1 : c_2. \tag{9.19}$$

Dokaz. Neka je $\tau_0 \in X$ fiksirano, $c_1 = g_1(\tau_0), c_2 = g_2(\tau_0)$. Imamo

$$\begin{aligned} g_1(\tau) : g_2(\tau) &= (g_1(\tau) : c_1) \cdot (c_1 : c_2) \cdot (c_2 : g_2(\tau)) \\ &= (\tau : \tau_0) \cdot (c_1 : c_2) \cdot (\tau_0 : \tau); \end{aligned} \tag{9.20}$$

iz toga slijedi (9.19). □

Ako vrijedi (9.19), $c_1, c_2 \in \mathbb{R}(\Sigma)$ je *omjer brzina* jednolikih gibanja g_1 i g_2. Primijetimo da veličine c_1 i c_2 nisu jedinstvene; *uvjetno ih nazivamo brzinama.*

Teorem 9.7. *Ako su gibanja g_1 i g_2 jednolika i ako vrijedi* (9.19), *za svako $\tau_1, \tau_2 \in \Delta$ vrijedi*

$$g_1(\tau_1) : g_2(\tau_2) = (c_1 : c_2) \cdot (\tau_1 : \tau_2) \tag{9.21}$$

(prevaljeni put proporcionalan je brzini i proteklom vremenu),

$$\tau_1 : \tau_2 = (g_1(\tau_1) : g_2(\tau_2)) \cdot (c_2 : c_1) \tag{9.22}$$

(proteklo vrijeme je proporcionalno prevaljenom putu i obratno proporcionalno brzini),

$$c_1 : c_2 = (g_1(\tau_1) : g_2(\tau_2)) \cdot (\tau_2 : \tau_1) \tag{9.23}$$

(brzina je proporcionalna prevaljenom putu i obratno proporcionalna proteklom vremenu).

Dokaz. Imamo

$$g_1(\tau_1) : g_2(\tau_2) = (g_1(\tau_1) : g_2(\tau_1)) \cdot (g_2(\tau_1) : g_2(\tau_2)) = (c_1 : c_2) \cdot (\tau_1 : \tau_2), \tag{9.24}$$

tj. vrijedi (9.21). Analogno dokazujemo (9.22) i (9.23). □

Jednakosti (9.22) i (9.23) su prema Teoremu 3.9 ekvivalentne s (9.21), ali u *Elementima* taj teorem nije formuliran, pa ga ni Galileo ne koristi.

U daljnjem opisujemo Galileov tekst ([9], s. 148–153]):

Definicija. Pod jednolikim gibanjem ja podrazumijevam ono kod kojeg su putovi što ga tijelo prevaljuje u bilo kojim jednakim vremenima međusobno jednaki.

Tu definiciju Galileo naziva *starom*, ali ne citira izvor. U komentaru on posebno ističe značenje kvantifikatora *u bilo kojim.* Galileo ne definira *gibanje*, pa fraza *pod jednolikim gibanjem ja podrazumijevam* *ono* nije posve jasna. Naime, nedostaje pretpostavka o bijektivnosti. Međutim, *Aksiomima 1 i 2* on zahtijeva bijektivnost i strogi rast, a $\mathbb{N}$-homogenost prešutno podrazumijeva u dokazu Propozicije 9.8 (v. niže). Budući da se eksplicitno ne poziva na afinu strukturu skupa P odn. T, Galileo pod gibanjem (9.3) podrazumijeva prirast puta g.

Aksiom 1. *Tokom istog jednolikog gibanja, put prevaljen u duljem proteklom vremenu je veći od onog prevaljenog u kraćem proteklom vremenu.*

Aksiom 2. *Proteklo vrijeme u kojem je prevaljen veći put u istom jednolikom gibanju veće je od proteklog vremena u kojem je prevaljen manji put.*

Mijenjajući donekle Galileov redoslijed izlaganja prelazimo na Propoziciju 9.8, koja je identična originalnoj *Arhimedovoj propoziciji* (t. 6). Galileov dokaz slijedi Arhimedovu uputu.

Čitatelj će primijetiti ovaj formalni nedostatak u Galileovom tekstu: dokazujući jednakost omjera, umjesto ekvivalencija (2.3) on redovito dokazuje samo direktne implikacije, čak i u slučajevima kad obratne nisu evidentne.

Propozicija 9.8. *Ako tijelo gibajući se jednoliko s istom brzinom prevaljuje dva puta, protekla vremena odnosit će se kao prevaljeni putovi.*

U pretpostavci se spominje *brzina* koja nije definirana. U ovom trenutku frazu *s istom brzinom* možemo shvaćati kao *s istim prirastom puta*. Propozicija 9.8 tvrdi da iz strogog rasta i $\mathbb{N}$-homogenosti prirasta puta slijedi njegova linearnost; uvjet (c) iz Teorema 9.3 Galileo ne spominje.

Dokaz Propozicije 9.8 (Sl. p. 149). Neka su prevaljeni putovi AB i BC, a odgovarajuća vremena DE i EF; tvrdim da se AB odnosi prema BC kao DE prema EF. Dužinu AB prenosimo proizvoljan broj puta na lijevo do G, a DE isti broj puta na lijevo do I. BC prenosimo proizvoljan broj puta na desno do H, a EF isti broj puta na desno do K. Tada je IE odn. EK vrijeme potrebno da se prevali GB odn. BH

[$\mathbb{N}$-homogenost]. Ako je GB jednako, veće ili manje od BH, onda je IE jednako, veće ili manje od EK. Imamo četiri veličine AB, BC, DE i EF. GB i IE su isti višekratnici od AB i DE, BH i EK su isti višekratnici od BC i EF. Iz toga slijedi da se AB odnosi prema BC kao DE prema EF; što je trebalo dokazati. $\square$

U daljnjem Galileo govori o *brzini* kao karakterizaciji konkretnog gibanja. U svojim bilješkama o mjerenjima (v. [5]) on za duljinu odn. vrijeme koristi originalne *jedinice punto* odn. *tempo* i brzinu gibanja opisuje frazom *prevaljeno toliko punti u toliko tempi.* (Aristotel govori o brzini kao veličini *složenoj* od puta i vremena). Zbog ograničenja teorije proporcija tu frazu Galileo ne može formalizirati kao omjer. Iako je svjestan relativnosti pojma brzine, on izbjegava pozivanje na konkretnu *jedinicu* vremena. Zato brzinu definira aksiomatski kao veličinu, ali ipak u daljnjem spominje samo *omjer brzina.*

Aksiom 3. *Put prevaljen s većom brzinom veći je od puta prevaljenog s manjom brzinom, u istom proteklom vremenu.*

Aksiom 4. *Brzina s kojom je prevaljen veći put veća je od brzine s kojom je prevaljen manji put, u istom proteklom vremenu.*

Neka je U skup svih jednolikih gibanja (strogo rastućih $\mathbb{N}$-*homogenih* bijekcija $g : \Delta \to \Sigma$). U gornjim aksiomima pretpostavlja se da postoji bijekcija $c : U \Longrightarrow \Sigma$ ($c(g)$ je brzina gibanja g, $g(c)$ je gibanje s brzinom c) koja zadovoljava uvjete

$$c_1, c_2 \in \Sigma,\ c_1 > c_2,\ \tau \in \Delta \Longrightarrow g(c_1, \tau) > g(c_2, \tau), \tag{9.25}$$

$$g_1, g_2 \in U,\ \tau \in \Delta,\ g_1(\tau) > g_2(\tau) \Longrightarrow c(g_1) > c(g_2). \tag{9.26}$$

Primijetimo da je uvjet (9.26) posljedica uvjeta eqref(9.23).

U dokazu Propozicije 9.9 Galileo prešutno pretpostavlja i ovaj uvjet $\mathbb{N}$-*homogenosti*:

$$n \in \mathbb{N},\ \tau \in \Delta,\ c \in \Sigma \Longrightarrow g(nc, \tau) = ng(c, \tau). \tag{9.27}$$

Galileo ne dokazuje egzistenciju funkcije $c(g)$.

Propozicija 9.9. *Ako tijelo prevaljuje dva puta u jednakim proteklim vremenima, ti putovi se odnose kao brzine. I ako se prevaljeni putovi odnose kao brzine, protekla vremena su jednaka.*

Dokaz (Sl. p. 150, gornja). Neka su putovi AB i BC prevaljeni u jednakim vremenima, AB s brzinom DE i BC s brzinom EF; tvrdim da se AB odnosi prema BC kao DE prema EF. Opet, kao gore , uzimajući jednake višekratnike prevaljenih putova i odgovarajućih brzina - tj. GB i IE kao jednake višekratnike od AB i DE, i isto tako HB i KE kao jednake višekratnike od BC i EF - zaključujemo na isti način kao gore [ovdje se bez sumnje misli na uvjet (9.25) da su višekratnici GB i IE ili oba manja, ili jednaka, ili veća od jednakih višekratnika BH i EK. Time je propozicija dokazana. □

Propozicija 9.10. *Ako se prevaljuje isti put s različitim brzinama, protekla vremena i brzine su inverzno proporcionalni.*

Dokaz. Neka su dane različite brzine, A veća i B manja, i neka dva gibanja prevaljuju isti put CD s tim brzinama; tvrdim da se vrijeme u kojem brzina A prevaljuje CD odnosi prema vremenu u kojem brzina B prevaljuje isti put, kao brzina B prema brzini A. Neka se CD odnosi prema CE kao A prema B; tada prema prethodnom, vrijeme u kojem brzina A prevaljuje CD je isto kao vrijeme u kojem B prevaljuje CE; ali vrijeme u kojem brzina B prevaljuje CE odnosi se prema vremenu u kojem ista brzina prevaljuje CD, kao CE prema CD. Zato se vrijeme u kojem brzina A prevaljuje CD odnosi prema vremenu u kojem brzina B prevaljuje isti CD, kao CE prema CD, ili kao brzina B prema brzini A; što tvrdi propozicija. □

Propozicije 9.11–9.13 su identične Teoremu 9.7.

Propozicija 9.11. *Ako se dva tijela gibaju jednoliko ali s različitim brzinama, putovi koje oni prevaljuju u različitim proteklim vremenima imaju omjer složen [u originalu composta] od omjera brzina i omjera proteklih vremena.*

Dokaz. Neka se dva tijela, E i F, gibaju jednoliko, i neka je omjer brzine tijela E prema brzini tijela F kao A prema B, dok je omjer vremena u kojem se gibalo E, prema vremenu u kojem se gibalo F, kao C prema D. Tvrdim da put prevaljen tijelom E brzinom A u vremenu C ima, prema putu prevaljenom tijelom F brzinom B u vremenu D, omjer složen od omjera brzine A prema brzini B i omjera vremena C prema vremenu D.

Neka je G put prevaljen tijelom E brzinom A u vremenu C, i neka je G prema I kao brzina A prema brzini B, i neka je I prema L kao vrijeme C prema vremenu D. Slijedi da je I put koji F prevaljuje u istom vremenu u kojem E prevaljuje G, jer se putovi G i I odnose kao brzine A i B. Budući da je I prema L kao vrijeme C prema vremenu D, a I put prevaljen tijelom F u vremenu C, to je L put koji prevaljuje F u vremenu D brzinom B. Iz toga slijedi da je omjer G prema L složen od omjera G prema I i I prema L; tj., od omjera brzine A prema brzini B i vremena C prema vremenu D; zato vrijedi propozicija. □

Propozicija 9.12. *Ako se dva tijela gibaju jednoliko ali s različitim brzinama, i ako su prevaljeni različiti putovi, onda je omjer proteklih vremena složen od omjera prevaljenih putova i obratnog omjera brzina.*

Dokaz. Neka se gibaju tijela A i B, i neka je brzina od A prema brzini od B kao V prema T; i neka su prevaljeni putovi kao S prema R; tvrdim da je omjer vremena u kome se gibalo A, prema vremenu u kojem se gibalo B, složen od omjera brzine T prema brzini V i omjera puta S prema putu R.

Neka je C vrijeme gibanja tijela A, i kao što je brzina T prema brzini V, neka je isto tako vrijeme C prema vremenu E. Budući da je C vrijeme u kojemu A, s brzinom V, prevaljuje put S, i da je vrijeme C prema vremenu E kao brzina T tijela B prema brzini V, to je E vrijeme u kojemu tijelo B prelazi isti put S. Neka je sada vrijeme E prema vremenu G kao put S prema putu R. Jasno je da je G vrijeme u kojem B prevaljuje put R. I jer je omjer C prema G složen od omjera C prema E i E prema G, omjer C prema E je isti kao inverzni omjer brzina tijela A i B, tj. kao omjer T prema V. Ali omjer E prema G je isti kao omjer putova S i R; zato vrijedi propozicija. □

Propozicija 9.13. *Ako se dva tijela gibaju jednoliko, omjer njihovih brzina složen je od omjera prevaljenih putova i obratnog omjera proteklih vremena.*

Dokaz. Neka se dva tijela, A i B, gibaju jednoliko , i neka su putovi koje oni prevaljuju u omjeru V prema T, dok se vremena odnose kao S prema R; tvrdim da brzina tijela A ima prema brzini tijela B omjer složen od omjera puta V prema putu T i vremena R prema vremenu S.

Neka je brzina C ona s kojom tijelo A prevaljuje put V u vremenu S, i neka brzina C ima prema drugoj, E, omjer kao put V prema putu T. Tada je E brzina s kojom tijelo B prevaljuje put T u istom vremenu, S. Ali ako je brzina E prema drugoj, G, kao vrijeme R prema vremenu S, onda je brzina G ona s kojom tijelo B prevaljuje put T u vremenu R. Tako imamo brzinu C, s kojom tijelo A prevaljuje put V u vremenu S, i brzinu G, s kojom tijelo B prevaljuje put T u vremenu R; i omjer C prema G složen je od omjera C prema E i E prema G. Ali omjer C prema E je po pretpostavci isti kao omjer puta V prema putu T, dok je E prema G isti kao omjer R prema S; zato vrijedi propozicija. $\square$

10 Jednoliko ubrzano gibanje

I ovdje počinjemo sa suvremenim opisom Galileove teorije.

Definicija 10.1. *Kažemo da gibanje* (10.1) JEDNOLIKO UBRZANO *ako postoji linearna funkcija* $\varsigma : \Delta \to \Sigma$ *takva da vrijedi*

$$\begin{aligned} t, t' \in T \Longrightarrow & g(t - O_T) : g(t' - O_T) \\ & = (\varsigma(t - O_T) : \varsigma(t' - O_T)) \cdot ((t - O_T) : (t' - O_T)). \end{aligned} \tag{10.1}$$

Prema Propoziciji 9.11 na desnoj strani je omjer prevaljenih putova (do trenutka $t - O_T$ odn. $t' - O_T$) jednolikih gibanja s omjerom brzina $\varsigma(t-O_T) : \varsigma(t'-O_T)$. Ta definicija je interpretacija *Mertonskog pravila.*

Preslikavanje

$$t \to v(t) = O_P + \varsigma(t - O_T),\ t \in T,\ t \neq O_T,\ v(O_T) = O_P \tag{10.2}$$

nazivamo *brzinom* jednoliko ubrzanog gibanja (9.3). (Primijetimo da Definicija 10.1 pretpostavlja *gibanje od početka*, tj. s početnom brzinom nula).

Teorem 10.2. *Za jednoliko ubrzano gibanje* (9.3) *vrijedi* KVADRATIČNI ZAKON

$$t, t' \in T,\ t, t' \neq O_T \Longrightarrow g(t - O_T) : g(t' - O_T) = (t - O_T)^2 : (t' - O_T)^2 \tag{10.3}$$

($(t - O_T)^2$ odn. $(t' - O_T)^2$ označava kvadratični lik (kvadrat) sa stranicom $t - O_T$ odn. $t' - O_T$).

Dokaz. Imamo

$$\varsigma(t - O_T) : \varsigma(t' - O_T) = (t - O_T) : (t' - O_T). \tag{10.4}$$

Iz (10.1) i (10.4) dobijamo

$$g(t - O_T) : g(t' - O_T) = ((t - O_T) : (t' - O_T))^2. \tag{10.5}$$

Prema Propoziciji VI.20 u [12] desna strana u (10.5) jednaka je omjeru kvadrata sa stranicama $t - O_T$ i $t' - O_T$:

$$((t - O_T) : (t' - O_T))^2 = (t - O_T)^2 : (t' - O_T)^2. \tag{10.6}$$

Iz (10.5) i (10.6) slijedi (10.3). □

(Ako su ς_1 i ς_2 prirasti brzina dvaju jednoliko ubrzanih gibanja, po analogiji s Propozicijom 9.9 zaključujemo da postoji *omjer njihovih ubrzanja* $\mu_1 : \mu_2 \in \mathbb{R}(\Sigma)$ takav da za svako $\tau \in \Delta$ vrijedi

$$\varsigma_1(\tau) : \varsigma_2(\tau) = \mu_1 : \mu_2. \tag{10.7}$$

Galileo (kao ni njegovi prethodnici) nije eksplicitno definirao pojam ubrzanja.)

Prema Prop. VI. 23 u [12] desna strana u (10.1) jednaka je omjeru paralelograma (ili trokuta) sa stranicama $t - O_T$ i $\varsigma(t - O_T)$ (ili $\frac{1}{2}\,\varsigma(t - O_T)$) odn. $t' - O_T$ i $\varsigma(t' - O_T)$ (ili $\frac{1}{2}\,\varsigma(t' - O_T)$). To je Orezmeov oblik *Mertonskog pravila*. Iz toga i Prop. VI.19 i 20 iz [12] zaključujemo da vrijedi *kvadratični zakon*.

Vidimo da *brzina* gibanja ima u *Mertonskom pravilu* ulogu "skrivene veličine", za razliku od "mjerljivih veličina" kao što su proteklo vrijeme i prevaljeni put.

Povijesno je važna sljedeća posljedica *kvadratičnog zakona*:

$$n \in \mathbb{N} \Longrightarrow g(n\tau) = n^2 g(\tau). \tag{10.8}$$

Iako nije imao *kvadratični zakon*, Heytesbury bez obrazloženja tvrdi da je $g(2\tau) = 4g(\tau)$. Iz (10.8) dobijamo

$$g((n+1)\tau) - g(n\tau) = ((n+1)^2 - n^2)\tau^2 g(\tau) = (2n+1)g(\tau) \tag{10.9}$$

(*ako je gibanje jednoliko ubrzano, prirasti puta u jednakim sukcesivnim vremenskim intervalima odnose se kao neparni brojevi*). Kao što smo vidjeli, Galileo je zakon (10.9) za slobodni pad otkrio *mjerenjem* prije nego je znao da je to gibanje jednoliko ubrzano; iz toga je (pomoću formule za zbroj prvih n neparnih brojeva) dobio (10.8) i poopćenjem *kvadratični zakon* za proizvoljna protekla vremena.

Korolar 10.3. *Ako je gibanje* (9.3) *jednoliko ubrzano, vrijedi*

$$t_1, t_2 \in T \Longrightarrow (t_1 - O_T) : (t_2 - O_T) = g(t_1 - O_T) : a, \tag{10.10}$$

gdje je $a \in \Sigma$ *srednja geometrijska proporcionala veličina* $g(t_1 - O_T)$ *i* $g(t_2 - O_T)$ *(Prop. VI.13 ([12])):*

$$g(t_1 - O_T) : a = a : g(t_2 - O_T). \tag{10.11}$$

Dokaz. Prema (10.5) imamo

$$g(t - O_T) : g(t' - O_T) = ((t - O_T) : (t' - O_T))^2. \tag{10.12}$$

Uzimajući u obzir (10.11) dobijamo

$$\begin{aligned} g(t_1 - O_T) : g(t_2 - O_T) &= (g(t_1 - O_T) : a) \cdot (a : g(t_2 - O_T)) \\ &= (g(t_1 - O_T) : a)^2. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Iz (10.12) i (10.13) slijedi (10.10). □

U daljnjem opisujemo Galileov tekst ([9], s. 153–171).

Ovo je u *Discorsi* osnovno poglavlje; u njemu Galileo izlaže svoju *dinamiku.* Za razliku od prethodnog, ovo poglavlje pisano je u fizikalnom kontekstu i znatno manje je formalno: matematički dokazi nisu uvijek odvojeni od empirijskih. Galileo govori o slobodnom padu, koje naziva *naravno ubrzanim*, a zatim, oslanjajući se na eksperimente i *princip jednostavnosti* detaljno obrazlaže pretpostavku da je to gibanje *jednoliko ubrzano* u smislu sljedeće definicije.

Definicija 10.4. *Reći ćemo da je gibanje jednoliko ubrzano ako, napuštajući mirovanje, u jednakim vremenima dodaje sebi jednake momente [priraste] brzine.*

Vidimo da Galileo kao definiciju uzima svojstvo koje je ekvivalentno linearnosti prirasta brzine, ali brzinu u toj definiciji shvaća intuitivno. Međutim, slijedi Propozicija 10.5 koja je gotovo ekvivalentna uvjetu (10.1).

Propozicija 10.5. *Vrijeme u kojem je neki put prevaljen tijelom u jednoliko ubrzanom gibanju iz mirovanja jednako je vremenu u kojem bi isti put bio prevaljen od istog tijela u jednolikom gibanju, stupanj brzine kojega je polovina [srednja vrijednost] maksimalnog i konačnog stupnja brzine prethodnog, jednoliko ubrzanog gibanja.*

Galileo ovdje govori o jednakostima umjesto o omjerima veličina. Ako se *jednako* zamijeni s *proporcionalno*, Propozicija 10.5 postaje identična uvjetu (10.1). U Galileovom dokazu prepoznat ćemo rezoniranje iz *Dialogo* (t. 8).

Dokaz Propozicije 10.5. Neka linija AB predstavlja vrijeme u kojem je put CD prevaljen tijelom u jednoliko ubrzanom gibanju iz mirovanja u C. Neka EB, povučeno bilo kako prema AB, predstavlja maksimalni i konačni stupanj brzine koja raste u trenucima vremena AB. Sve linije koje dostižu AE iz pojedinačnih točaka linije AB i povučene paralelno s BE predstavljat će rastuće stupnjeve brzine poslije trenutka A. Dalje, polovim BE u F, i povlačim FG i AG paralelno s BA i BF; konstruirani paralelogram $AGFB$ jednak je trokutu AEB, a njegova stranica GF polovi AE u I.

Sada, ako su paralele u trokutu AEB produljene do IG, bit će agregat svih paralela sadržanih u četverokutu jednak agregatu onih sadržanih u trokutu AEB, jer su one u trokutu IEF nadoknađene onima sadržanim u trokutu GIA, dok su one koje su u trapezu $AIFB$ zajedničke. Budući da svaki trenutak i svi trenuci vremena AB korespondiraju svakoj točki i svim točkama linije AB, paralele iz kojih, povučene i sadržane u trokutu AEB, predstavljaju rastuće stupnjeve rastuće brzine, dok paralele sadržane u paralelogramu predstavljaju na isti način upravo toliko stupnjeva brzine koja ne raste nego je jednolika, zaključujemo da je u ubrzanom gibanju konzumirano upravo toliko momenata brzine, koji odgovaraju rastućim paralelama u trokutu AEB, koliko i onih u jednolikom gibanju, koji odgovaraju paralelama u paralelogramu GB. Jer deficit momenata u prvoj polovini ubrzanog gibanja (nedostaju momenti predstavljeni paralelama u trokutu AGI) nadoknađen je momentima predstavljenim paralelama u trokutu IEF.

Zato je evidentno da će jednake putove u istom vremenu prevaliti oba tijela, jedno od kojih se giba jednoliko ubrzano iz mirovanja, i drugo koje se giba jednoliko s momentom koji je jednak polovini momenta maksimalne brzine ubrzanog gibanja; što tvrdi propozicija. □

Kao što smo ranije obrazložili (t. 8), taj dokaz nije korektan, ali iz Propozicije 10.5 Galileo korektno dobija *kvadratični zakon.*

Propozicija 10.6. *Ako se tijelo spušta iz mirovanja u jednoliko ubrzanom gibanju, putovi prevaljeni u bilo kojim vremenima [od početka gibanja] su jedan prema drugome kao duplicate ratio njihovih vremena; tj., kao kvadrati tih vremena.*

Ta propozicija je ekvivalentna Teoremu 10.2.

Dokaz Propozicije 10.6. Neka je tok vremena od nekog prvog trenutka A predstavljen linijom AB, i neka su na toj liniji odabrana bilo koja dva vremena, AD i AE. Neka je HI linija po kojoj se jednoliko ubrzano tijelo spušta iz točke H kao prvog početka gibanja; neka je put HL prevaljen u prvom vremenu AD, i HM put prevaljen u vremenu AE. Tvrdim da je put MH prema putu HL u dupliciranom omjeru vremena EA prema vremenu AD. Ili recimo da putovi MH i HL imaju isti omjer kao kvadrati od EA i AD.

Povucimo liniju AC pod bilo kojim kutom prema AB. Iz točaka D i E povucimo paralele DO i EP, od kojih DO predstavlja maksimalni stupanj brzine postignute u trenutku D vremena AD, i PE maksimalni stupanj brzine postignute u trenutku E vremena AE. Budući je gore pokazano (Propozicija 10.5) da pošto su putovi prevaljeni, oni su jednaki jedan drugome, od kojih je jedan prevaljen tijelom u jednoliko ubrzanom gibanju iz mirovanja, i drugi je prevaljen u istom vremenu tijelom u jednolikom gibanju brzina kojega je polovina maksimalne postignute u ubrzanom gibanju, slijedi da su putovi MH i LH isti kao kad bi bili prevaljeni u vremenima EA i DA u jednolikim gibanjima brzine kojih su polovine od PE i OD. Zato ako se pokaže da su ovi putovi MH i LH u dupliciranom omjeru vremena EA i DA, ono što tvrdimo bit će dokazano. U Propoziciji IV Knjige I (t. 9) dokazano je da putovi prevaljeni tijelima u jednolikom gibanju imaju jedan prema drugom omjer složen iz omjera brzina i omjera vremena. Ovdje, međutim, omjer brzina je isti kao omjer vremena, jer omjer polovine PE prema polovini OD, ili PE prema OD, je onaj od AE prema AD. Dakle omjer prevaljenih putova je duplicirani omjer vremena; što je trebalo dokazati.

Iz ovoga također slijedi da je ovaj isti omjer putova kvadrat omjera maksimalnih stupnjeva brzine; tj., linija PE i OD, jer je PE prema OD kao EA prema DA. □

Sljedeća činjenica ekvivalentna je jednakosti (10.9).

Korolar 10.7. *Iz ovoga je očito da ako je bilo koji broj jednakih vremena uzet sukcesivno od prvog trenutka ili početka gibanja, npr. AD, DE, EF, i EG, u kojima su prevaljeni putovi HL, LM, MN, i NI, tada su ovi putovi jedan prema drugom kao neparni brojevi počev od jedinice, tj. kao 1, 3, 5, 7; ali ovo je pravilo za priraste kvadrata linija koje jednako nadmašuju jedna drugu i zajednički prirast kojih je jednak najmanjoj od istih linija, ili, recimo, [za priraste] kvadrata [prirodnih brojeva] sukcesivno od jedinice. Zato kada stupnjevi brzine rastu u jednakim vremenima kao jednostavni niz prirodnih brojeva, putovi prevaljeni u istim vremenima rastu kao niz neparnih brojeva od jedinice.*

Sljedeća činjenica identična je Korolaru 10.7.

Korolar 10.8. *Zaključujemo, kao drugo, da ako su na početku gibanja uzeta bilo koja dva puta prevaljena u neka dva vremena, ta vremena [prvo prema drugom] bit će kao prvi od uzetih putova prema srednjoj proporcionali tih putova.*

Dokaz. Od početka gibanja, S, uzmi dva puta, ST i SV, od kojih je srednja proporcionala SX; vrijeme pada po SX bit će prema vremenu pada po SV kao ST prema SX; ili, recimo, da je vrijeme pada po SV prema vremenu pada po ST kao VS prema SX. Budući je dokazano [Propozicija 10.6] da su prevaljeni putovi u kvadratu omjera vremena (ili što je isto, kao kvadrati vremena), omjer puta VS prema putu ST je kvadrat omjera VS i SX, ili što je isto, omjer kvadrata od VS i SX.

Slijedi da je omjer vremena gibanja po SV i ST isti kao od putova ili linija, VS i SX. $\square$

11 Pad po kosini

U ovoj i sljedećoj točki Galileove dokaze navodimo u skraćenom i formaliziranom obliku. Zadržavamo Galileovu numeraciju propozicija (o originalu sadržaj točaka 11 i 12 sastavni je dio t. 10).

Poučak 11.1. *Ono što smo dokazali za gibanje duž vertikala može se primijeniti također na kosine: zaista, pretpostavljeno je da stupanj brzine raste u istom omjeru; tj., kao što raste vrijeme, ili recimo kao niz prirodnih brojeva od jedinice.*

U toj napomeni konstatira se da je pad po kosini jednoliko ubrzano gibanje. To gibanje razlikuje se od pada po vertikali svojim *momentom* (*impetusom, energijom, stupnjem brzine*). Ti termini zahtijevaju interpretaciju. Kad se govori o omjerima, moment označava brzinu (*stupanj postignute brzine*). Osnovna činjenica je naredna *lema* [Sl. s. 173].

Lema 11.2. *Omjer momenata po vertikali FC i kosini FA jednak je [u svakom trenutku] omjeru dužina FA i FC.*

Ta tvrdnja kao empirijska činjenica navedena je već u ranom rukopisu *Mecanica*. (Ovdje Galileo nudi statički dokaz pomoću *principa virtualnih pomaka*, kojega je bio svjestan). Možemo reći da je to generalna pretpostavka o reakciji veze: vertikalni *impetus* rastavlja se na dvije ortogonalne komponente, od kojih se jedna poništava s reakcijom veze (kosine).

U sljedećem tekstu (tzv. *Dodani teorem*) govori se o padu teškog tijela po kosinama iste visine i dokazuje ranija pretpostavka (t. 8) o jednakosti konačnih brzina.

Teorem 11.3 (Dodatni teorem)**.** *Stupnjevi brzine postignuti tijelom u spuštanju naravnim gibanjem s iste visine, po kosinama nagnutim na bilo koji način, jednaki su po stizanju na horizontalu, ako su uklonjene sve prepreke.*

Dokaz [Sl. p. 174, donja.] U svakom trenutku omjer brzina po vertikali i kosini je $AB : AC = AC : AD$, gdje je AD treća proporcionala za AB i AC (tada je AC srednja proporcionala za AB i AD). Brzine se odnose kao prevaljeni putovi, pa zaključujemo: ako tijelo po vertikali prelazi put AC u vremenu τ, onda u istom vremenu po kosini prelazi put AD. Ako tijelo po kosini prelazi put AB u vremenu τ', onda je omjer brzina po kosini (u vremenu τ i τ') jednak $\tau : \tau'$. Prema Korolaru 10.8 imamo

$$\tau : \tau' = AB : AC; \tag{11.1}$$

desna strana jednaka je omjeru brzina po vertikali i kosini u vremenu τ. Iz toga slijedi da je brzina po kosini u vremenu τ' (tj. u točki B) jednaka brzini po vertikali u vremenu τ (tj. u točki C). □

Propozicija 11.4 (ponavljanje zaključka (11.1))**.** *Vremena padanja po kosini i vertikali odnose se kao duljine kosine i vertikale.*

Pomoću formule *ex aequali* iz toga slijedi naredni razultat.

Korolar 11.5. *Vremena padanja po kosinama s istom visinom odnose se kao njihove duljine.*

Propozicija 11.6. *Vremena padanja po kosinama s istom duljinom odnose se inverzno proporcionalno kvadratnom korijenu njihovih visina [omjer vremena padanja jednak je kvadratnom korijenu inverznog omjera visina).*

Dokaz (s. 177, gornja Sl.) Neka je BI srednja proporcionala za DB i BE:

$$DB : BI = BI : BE \tag{11.2}$$

tada je (v. t. 3, s. 15)

$$DB : BI = \sqrt{DB : BE}. \tag{11.3}$$

Imamo

$$\tau(BA) : \tau(BE) = BA : BE \tag{11.4}$$

(Propozicija 11.4),

$$ \tag{11.5} $$

(Korolar 10.8),

$$\tau(BD) : \tau(BC) = BD : BC = BI : BS. \tag{11.6}$$

Iz (11.4)–(11.6) dobijamo

$$\tau(BA) : \tau(BC) = BA : BS = BC : BS = DB : BI; \tag{11.7}$$

iz (11.3) i (11.7) slijedi

$$\tau(BA) : \tau(BC) = \sqrt{DB : BE}. \tag{11.8}$$

$\square$

Propozicija 11.7. *Omjer vremena padanja po kosinama različitih nagiba, dužina i visina složen je od omjera duljina kosina i inverznog omjera kvadratnih korijena njihovih visina [kvadratnog korijena inverznog omjera njihovih visina].*

Dokaz (s. 177, donja Sl.) Neka je AL srednja proporcionala za AD i AG:

$$AD : AL = AL : AG. \tag{11.9}$$

Tada je AF srednja proporcionala za AC i AE.

$$AC : AF = AF : AE. \tag{11.10}$$

Imamo

$$\tau(AC) : \tau(AE) = AC : AE \tag{11.11}$$

(Korolar 10.8),

$$\tau(AE) : \tau AB = AE : AB \tag{11.12}$$

(Propozicija 11.4, Korolar 11.5).

Iz (11.11), (11.12) i (11.10) slijedi

$$\tau(AC) : \tau(AB) = AF : AE; \tag{11.13}$$

dalje imamo

$$AF : AB = (AF : AC) \cdot (AC : AB) \tag{11.14}$$

i prema (11.9) i (11.10)

$$AF : AC = AE : AF = AG : AL = \sqrt{AG : AD}. \tag{11.15}$$

Iz (11.13)-(11.15) dobijamo

$$\tau(AC) : \tau(AB) = (AC : AB) \cdot \sqrt{AG : AD}. \tag{11.16}$$

$\square$

12 Pad po tetivama

Galileo u daljnjem ilustrira primjenu Propozicije 11.7, rješavajući niz konkretnih (nekad i artificijelnih) problema. Otkrio je zanimljiva svojstva padanja po tetivama kružnice (Propozicije 12.1 - XXXVIII). Navodimo samo prvi problem.

Propozicija 12.1. *Ako se iz najviše ili najniže točke vertikalnog kruga povuku dvije kosine do njegove periferije, vremena padanja po ovim kosinama bit će jednaka.*

Galileo navodi tri dokaza; navodimo treći, koji je najjednostavniji.

Dokaz Propozicije 12.1 (p. 179, donja Sl.) Iz točke D povučena je kosina df. Iz sličnosti pravokutnih trokuta CDF i FDG slijedi

$$CD : DF = DF : DG, \tag{12.1}$$

pa je DF srednja proporcionala dužina CD i DG. Prema Korolaru 10.8 imamo

$$\tau(CD) = \tau(DG) = CD : DF = DF : DG. \tag{12.2}$$

Prema Propoziciji 11.4 imamo

$$\tau(DF) : \tau(DG) = DF : DG. \tag{12.3}$$

Iz (12.2) i (12.3) slijedi

$$\tau(DF) : \tau(DG) = \tau(DC) : \tau(DG), \tag{12.4}$$

a iz toga $\tau(DC) = \tau(DF)$. Analogno dokazujemo $\tau(DC) = \tau(EC)$. $\square$

Korolar 12.2. *Vremena spuštanja po svim tetivama povučenima iz C ili D su jednaka.*

Korolar 12.3. *Ako su vremena spuštanja iz iste točke po vertikali i kosini jednaka, onda one obje [vertikala i kosina] leže u polukrugu kome je vertikala dijametar.*

Korolar 12.4 (p. 180, donja Sl)**.** *Vremena spuštanja po kosinama su jednaka ako se visine jednakih dijelova ovih kosina odnose kao duljine kosina [ako je $BE : DF = CA : DA$, onda je $\tau(AC) = \tau(AD)$].*

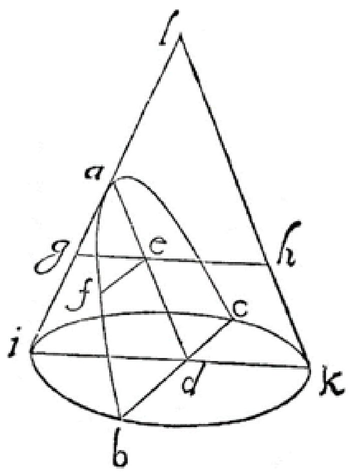
13 Gibanje projektila

Galileov tekst o gibanju projektila predstavlja konačnu formulaciju njegove dinamike. Ovdje on generalizira Aristotelovo pravilo paralelograma (t. 6) na slučaj slaganja jednolikog (horizontalnog) gibanja i slobodnog (vertikalnog) pada i dokazuje da je putanja složenog gibanja parabola. Galileovo izlaganje malo se razlikuje od suvremenog.

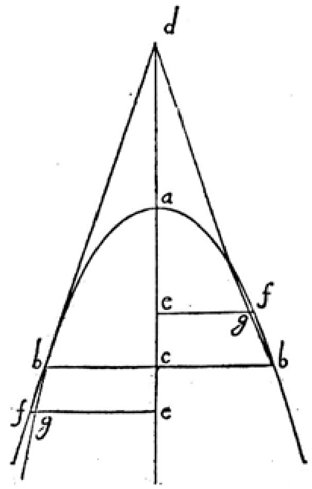
Teorem 13.1. *Kada je gibanje teškog projektila složeno od horizontanog jednolikog i vertikalnog naravnog pada, njegova putanja je semiparabolična linija.*

Prije dokaza ovog teorema Galileo opisuje Apolonijeve *Konike* i dokazuje osnovnu karakterizaciju parabole.

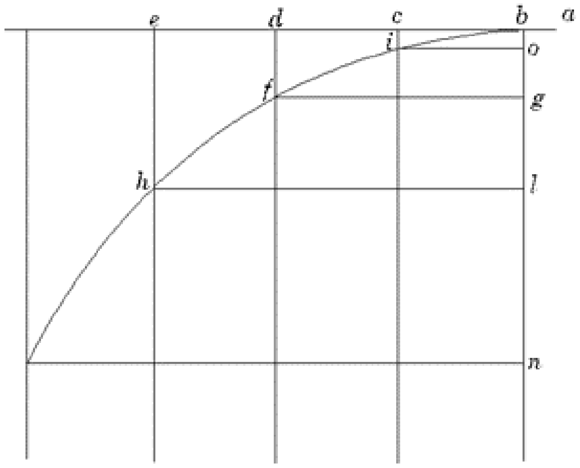
Lema 13.2. *Kvadrat od* BD *odnosi se prema kvadratu od* FE *kao* DA *prema* AE.



Lema 13.3. *Neka je os* CA *parabole produžena do* D. *Odaberimo neku točku* B *(na paraboli) i povucimo liniju* BC *paralelno bazi parabole. Neka je* DA *jednako dijelu* CA *osi. Povucimo dužinu* DB. *Tada linija* DB *ne pada unutar parabole, nego je dodiruje izvana u točki* B.



Teorem 13.4. *Ako je gibanje teškog tijela sastavljeno od jednolikog horizontalnog gibanja i slobodnog pada, njegova putanja je semiparabola.*



Dokaz. Neka je AE jednoliko gibanje po horizontalnoj ploči. Radi jednostavnosti vremensku os identificiramo s osi AE. Neka su AB, BC, CD itd. jednaki vremenski intervali. Pretpostavimo da se u (početnom) trenutku B ukloni ploča BE. Time se uključi tendencija slobodnog pada po BN pa je gibanje tijela sastavljeno od jednolikog gibanja BE i jednoliko ubrzanog gibanja BN. Neka su kroz $C, D, E, \ldots$ povučene vertikale paralelno s BN. Odaberimo neku dužinu CI. Neka je $DF = 2^2 CI$, $EH = 3^2 CI$, itd. U intrvalu BC pomak jednolikog gibanja je BC. Neka je u istom intervalu pomak slobodnog pada

$BO = CI$. Prema pravilu paralelograma u trenutku C položaj tijela u sastavljenom gibanju je točka I. Analogno, u trenutku D položaj tijela je točka E, itd. Lako zaključujemo da se kvadrat od FG odnosi prema kvadratu od IO kao GB prema BO. Prema tome točke I, F, H itd. leže na istoj paraboličkoj liniji. $\square$

U nastavku Galileo razvija opširnu teoriju horizontalnog hica; od posebnog značaja su primjene u artiljeriji. Galileo nije formulirao teoriju kosog hica; to je dovršio Toricelli.

Literatura

[1] J. Aames, The Role of the Eudoxean Theory of Proportions in Galileo's Science of Motion, `www.academia.edu/30475494/`.

[2] Aristotel, Fizika (prijevod T. Ladan), Hrvatska Sveučilišna Naklada, 1992.

[3] J. L. Berggren, Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, Springer, 1986.

[4] M. Clagett, The Science of Mechanics in the Middle Ages, Madison, 1959.

[5] S. Drake, History of Free Fall, Aristotle to Galileo, Toronto, 1989. (Dodatak u [9]).

[6] R. Dugas, A History of Mechanics, Dover Publications, 1988.

[7] Euklid, Elementi I-VI (prijevod M. Hudoletnjak Grgić), KruZak, Zagreb, 1999.

[8] Galileo Galilei, Dialogue on the Great World Systems [Dialogo] (prijevod T. Salusbury), Chicago, 1957.

[9] Galileo, Two New Science [Discorsi] (prijevod S. Drake), Toronto, 1989.

[10] A. R. Hall, From Galileo to Newton, Dover Publications, 1981.

[11] J. Havil, The Irrationals, Princeton University Press, 2012.

[12] T. L. Heath, Euclid: The Elements, Vol. 1–3, Dover Publications, 1956.

[13] T.L. Heath (ed.), The Works of Archimedes, Dover Publications, 2002.

[14] E. Mach, The Science of Mechanics, Open Court Publ. Comp., 1989.

[15] S. Mardešić, Matematička Analiza, Prvi dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[16] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1964.

[17] B. Russell, Povijest zapadne filozofije (prijevod D. Parenta), Zagrebačka naklada/IBIS grafika, Zagreb, 2010.

[18] H. Stein, *Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics*, Synthese **84** (1990), 163–2116.

[19] Z. Šikić, What are magnitudes and how to calculate with them, `https://www.researchgate.net/publication/290818828_what_are_magnitudes_and_how_to_calculate_with_them`.