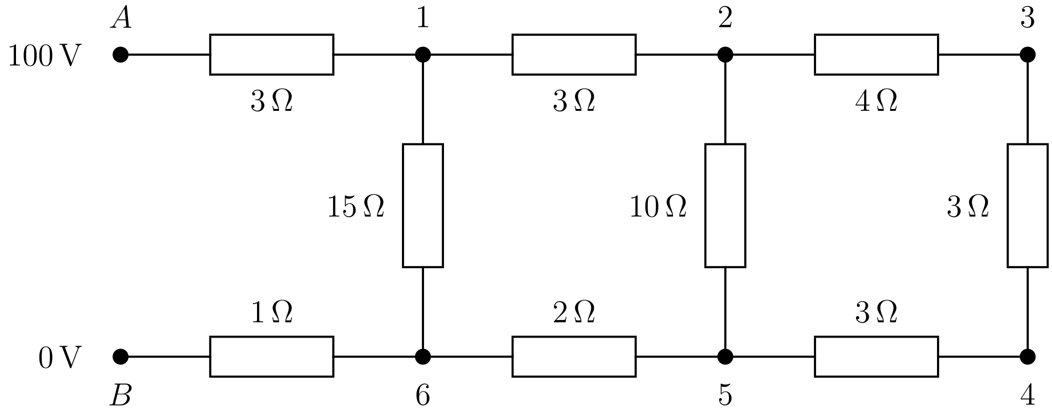
# Numerička matematika — vježbe

Zvonimir Bujanović Ivana Šain Glibić

Verzija 1.0.03, 20. srpnja 2020.

# 2 Linearni sustavi

**Primjer 2.1** (Kako nastaju sustavi). *Pretpostavimo da imamo električnu mrežu kao na slici.*




*Želimo izračunati potencijale $V_i$ u točkama $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.*

*Rješenje.* Ohmov zakon kaže da je jakost struje proporcionalna naponu, a obrnuto proporcionalna otporu, tj. ako uzmemo u obzir da je napon jednak razlici potencijala, možemo zapisati:

$$I_{PQ} = \frac{V_P - V_Q}{R_{PQ}},$$

gdje su $V_P$ i $V_Q$ potencijali u točkama $P$ i $Q$, a $R_{PQ}$ je otpor grane između $P$ i $Q$.

Nadalje, iz Kirchoffovog zakona znamo da je suma struja u svakom čvoru jednaka 0. Zapišimo stoga jednadžbe za svaki čvor:

$$\textbf{čvor 1:} \quad I_{A1} + I_{21} + I_{61} = \frac{100 - V_1}{3} + \frac{V_2 - V_1}{3} + \frac{V_6 - V_1}{15} = 0$$

$$\textbf{čvor 2:} \quad I_{12} + I_{32} + I_{52} = \frac{V_1 - V_2}{3} + \frac{V_3 - V_2}{4} + \frac{V_5 - V_2}{10} = 0$$

$$\textbf{čvor 3:} \quad I_{23} + I_{43} = \frac{V_2 - V_3}{4} + \frac{V_4 - V_3}{3} = 0$$

$$\textbf{čvor 4:} \quad I_{34} + I_{54} = \frac{V_3 - V_4}{3} + \frac{V_5 - V_4}{3} = 0$$

$$\textbf{čvor 5:} \quad I_{25} + I_{45} + I_{65} = \frac{V_2 - V_5}{10} + \frac{V_4 - V_5}{3} + \frac{V_6 - V_5}{2} = 0$$

$$\textbf{čvor 6:} \quad I_{B6} + I_{16} + I_{56} = \frac{0 - V_6}{1} + \frac{V_1 - V_6}{15} + \frac{V_5 - V_6}{2} = 0.$$

To vodi na ekvivalentan sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
11V_1 - 5V_1 - V_6 &= 500 \\
-20V_1 + 41V_2 - 15V_3 - 6V_5 &= 0 \\
-3V_2 + 7V_3 - 4V_4 &= 0 \\
-V_3 + 2V_4 - V_5 &= 0 \\
-3V_2 - 10V_4 + 28V_5 - 15V_6 &= 0 \\
-2V_1 - 15V_5 + 47V_6 &= 0.
\end{aligned}$$

Taj sustav možemo matrično zapisati na sljedeći način:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 11 & -5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -20 & 41 & -15 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -10 & 28 & -15 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -15 & 47 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix}}_{=:x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=:b}.$$

□

**Problem:** Riješiti sustav $Ax = b$.
Za kvadratne i regularne matrice $A$ znamo da postoji jedinstveno rješenje sustava $Ax = b$ ($x = A^{-1}b$).
Sustave rješavamo Gaussovim eliminacijama i LU faktorizacijom.

## 2.1 Gaussove eliminacije i LU faktorizacija

**Primjer 2.2.** *Riješite sustav:*

$$5x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \quad (1)$$
$$10x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 39 \quad (2)$$
$$-15x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -32 \quad (3)$$

*Rješenje.* Zapišimo prvo sustav matrično:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 7 \\ -15 & 5 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 39 \\ -32 \end{bmatrix}.$$

Želimo poništiti $x_1$ u (2). To ćemo postići ako (1) množimo s $\frac{-10}{5}$ i dodamo (2), točnije

$$(2) \mapsto (1) \cdot (-2) + (2).$$

Time (2) postaje:

$$0x_1 + (-2+4)x_2 + (-2 \cdot 4 + 7)x_3 = -2 \cdot 19 + 39$$
$$2x_2 - x_3 = 1.$$

Htjeli bismo simulirati provedenu transformaciju množeći matricu $A$ slijeva nekom matricom (zvat ćemo je $L^{(2,1)}$). Dobivenu matricu označimo s $A^{(1)}$
Prvi i treći red u $A^{(1)}$ ostaju isti $\implies$ prvi i treći redak u $L^{(2,1)}$ su $(1,0,0)$ i $(0,0,1)$.
Prvi red od $A$ se množi s $-2$ i dodaje drugom retku $\implies$ drugi red u $L^{(2,1)}$ je $(-2,1,0)$.
Dakle, naša matrica $L^{(2,1)}$ je

$$L^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je $(2,1)$ mjesto koje poništavamo u matrici $A$, zbog toga oznaka $L^{(2,1)}$. Sada možemo zapisati i matricu $A^{(1)}$

$$A^{(1)} = L^{(2,1)}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 7 \\ -15 & 5 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -15 & 5 & -9 \end{bmatrix}.$$

**Uočimo:** desna strana se također mijenja:

$$b^{(1)} = L^{(2,1)}b = \begin{bmatrix} 19 \\ 1 \\ -32 \end{bmatrix}.$$

Do sada smo napravili

$$Ax = b \mapsto \underbrace{L^{(2,1)}A}_{=:A^{(1)}}x = \underbrace{L^{(2,1)}b}_{=:b^{(1)}}.$$

Time smo dobili ekvivalentne sustave!

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 4x_3 &= 19 && (1) \\ 2x_2 - x_3 &= 1 && (2) \\ -15x_1 + 5x_2 - 9x_3 &= -32 && (3) \end{aligned}$$

Sada želimo poništiti $x_1$ u (3):

$$(3) \mapsto (1) \cdot \tfrac{15}{5} + (3)$$

$$\begin{aligned} 0x_1 + (1 \cdot 3 + 5)x_2 + (4 \cdot 3 - 9)x_3 &= 3 \cdot 19 - 32 \\ 8x_2 + 3x_3 &= 25. \end{aligned}$$

Time dobivamo matricu $A^{(2)}$:

$$A^{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^{(3,1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -15 & 5 & -9 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

i vektor desne strane $b^{(2)}$:

$$b^{(2)} = L^{(3,1)}b^{(1)} = \begin{bmatrix} 19 \\ 1 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Novi ekvivalentni sustav je $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 4x_3 &= 19 && (1) \\ 2x_2 - x_3 &= 1 && (2) \\ 8x_2 + 3x_3 &= 25. && (3) \end{aligned}$$

Sada želimo poništiti $x_2$ u (3). To radimo na sljdeći način:

$$(3) \mapsto (2) \cdot \tfrac{-8}{2} + (3)$$

Treća jednadžba sada postaje

$$\begin{aligned} 0x_2 + (-1 \cdot (-4) + 3)x_3 &= -4 \cdot 1 + 25 \\ 7x_3 &= 21 \end{aligned}$$

$$A^{(3)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{L^{(3,2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}}_{A^{(2)}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$b^{(3)} = L^{(3,2)} b^{(2)} = \begin{bmatrix} 19 \\ 1 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Konačno, dobili smo sustav koji je ekvivalentan polaznom, no **lakše se rješava**

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 4x_3 &= 19 &(1)\\ 2x_2 - x_3 &= 1 &(2)\\ 7x_3 &= 21. &(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{iz (3)} \quad \Longrightarrow x_3 = \frac{21}{7} = 3 \\ &\text{iz (2)} \quad \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{2}(1 + x_3) = 2 \\ &\text{iz (1)} \quad \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{5}(19 - x_2 - 4x_3) = 1 \end{aligned}$$

Rezimirajmo što smo radili. Matricu $A$ smo slijeva množili donjetrokutastim matricama $L^{(2,1)}, L^{(3,1)}, L^{(3,2)}$ i dobili smo matricu $A^{(3)}$ koja je gornje trokutasta. Uočimo

$$A = \underbrace{\left(L^{(2,1)}\right)^{-1} \left(L^{(3,1)}\right)^{-1} \left(L^{(3,2)}\right)^{-1}}_{L} \underbrace{A^{(3)}}_{U}$$

$$\begin{aligned} \left(L^{(2,1)}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left(L^{(3,1)}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left(L^{(3,2)}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pa slijedi da je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{i } A = LU.$$

Ovakvu faktorizaciju matrice $A$ zovemo LU (LR) faktorizacija. □

**Primijetite** inverz matrice $L^{(i,j)}$ dobijemo promjenom predznaka u strogo donjem trokutu. Produkt $L$ dobijemo tako da stavimo jedinice na dijagonalu, a na mjesto $(i, j)$ stavimo element matrice $\left(L^{(i,j)}\right)^{-1}$. Pokušajte dokazati te tvrdnje!
U primjeru smo iz sustava $Ax = b$ dobili ekvivalentni sustav $A^{(3)}x = b^{(3)}$. Rješavanje sustava LU faktorizacijom bi izgledalo ovako:

1. zapiši $A$ u obliku $A = LU$, gdje su $L$ donjetrokutasta i $U$ gornjetrokutasta. Sada sustav glasi

$$L\underbrace{Ux}_{y} = b.$$

2. riješi <u>donjetrokutasti</u> sustav $Ly = b$
3. riješi <u>gornjetrokutasti</u> sustav $Ux = y$

***Rješavanje donjetrokutastih sustava*** $Lx = b$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

*Matrica L je regularna (tj. sustav ima jedinstveno rješenje) ako i samo ako su* $l_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{b_1}{l_{11}} \\ x_2 &= \tfrac{1}{l_{22}}\left(b_2 - l_{21}x_1\right) \\ x_3 &= \tfrac{1}{l_{33}}\left(b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2\right) \\ x_4 &= \tfrac{1}{l_{44}}\left(b_4 - l_{41}x_1 - l_{42}x_2 - l_{43}x_3\right) \end{aligned}\right\} \textit{supstitucija unaprijed}$$

**Algoritam 1** Rješavanje donjetrokutastog sustava $Lx = b$

**for** $i = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  $x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i} l_{ij}x_j\right)$
**end for**

***Rješavanje gornjetrokutastih sustava*** $Ux = b$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

*Matrica U je regularna (tj. sustav ima jedinstveno rješenje) ako i samo ako su* $u_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= \tfrac{b_4}{u_{44}} \\ x_3 &= \tfrac{1}{u_{33}}\left(b_3 - u_{34}x_4\right) \\ x_2 &= \tfrac{1}{u_{22}}\left(b_2 - u_{23}x_3 - u_{24}x_4\right) \\ x_1 &= \tfrac{1}{u_{11}}\left(b_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - u_{14}x_4\right) \end{aligned}\right\} \textit{supstitucija unatrag}$$

**Algoritam 2** Rješavanje gornjetrokutastog sustava $Ux = b$

**for** $i = n, n-1, \ldots, 1$ **do**
  $x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)$
**end for**

**Zadatak 2.1.** *LU faktorizacijom riješite sustav*

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \\ 4x_1 - x_2 &= -7 \\ -6x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= -3 \end{aligned}$$

*Rješenje.* Prvo ćemo izračunati LU faktorizaciju $A = LU$. Matrica $A$ je

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Odmah ćemo poništavati cijeli prvi stupac

$$A^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 8 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{L^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}}_{A^{(1)}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$$U = A^{(2)} = L^{(2)}L^{(1)}A \implies A = \underbrace{\left(L^{(1)}\right)^{-1}\left(L^{(2)}\right)^{-1}}_{L} U$$

$$\left.\begin{aligned} \left(L^{(1)}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left(L^{(2)}\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Primijetimo da u ovom slučaju ne moramo mijenati desnu stranu sustava $b$.

$$\overbrace{L\underbrace{Ux}_{y}}^{A} = b = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Prvo rješavamo sustav $Ly = b$ supstitucijama unaprijed:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -2 \\ y_2 &= \frac{1}{1}(-7 - 2 \cdot (-2)) = -3 \\ y_3 &= \frac{1}{1}(-3 - (-3) \cdot (-2) - 1 \cdot (-3)) = -6 \end{aligned}$$

Da dobijemo konačno rješenje, još trebamo riješiti gornjetrokutasti sustav $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= -2 \\
x_2 &= \frac{1}{1}(-3 - 2 \cdot (-2)) = 1 \\
x_1 &= \frac{1}{2}(-2 - (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot (-2)) = \frac{-3}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

## 2.2 LU s pivotiranjem

Primijetimo da smo u prijašnjim primjerima elemente matrica $L^{(i,j)}$ dobivali dijeljenjem s dijagonalnim elementima trenutne matrice sustava.
**Pitanje:** Što ako u nekom trenutku dijagonalni element postane jednak 0?

**Primjer 2.3.** *Neka je matrica sustava $Ax = b$ dana sa*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Lako vidimo da je* $\det A = -1$*, što povlači da je matrica regularna, što dalje povlači da postoji jedinstveno rješenje sustava.*
*No, $A$ nema $LU$ faktorizaciju!*
*Pretpostavimo suprotno, tj. da $LU$ faktorizacija postoji. Tada bi trebalo vrijediti*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

*što bi dalje povlačilo da je*

$$1 \cdot u_{11} = 0 \tag{1}$$
$$1 \cdot u_{12} = 1 \tag{2}$$
$$l_{21} \cdot u_{11} = 1 \tag{3}$$
$$l_{21}u_{12} + u_{22} = 1. \tag{4}$$

*Iz (1) slijedi da je $u_{11} = 0$. Ako to uvrstimo u (3) dobivamo kontradikciju ($0 = 1$).*
*S druge strane, matrica $A$ reprezentira sustav*

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= b_1 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

*iz kojeg lako čitamo rješenje $x_1 = b_2 - b_1$ i $x_2 = b_1$.*
*Zamijenom jednadžbi dobivamo ekvivalentni sustav:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= b_2 \\ x_2 &= b_1 \end{aligned}$$

*sa matricom*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}.$$

| |
|---|
| *Zamjena poretka jednadžbi $\iff$ zamjena redaka u $A$ $\iff$ množenje $A$ slijeva permutacijskom matricom* |

$$\tilde{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}.$$

*Dakle, $PA = LU$.*
*Ovo će funkcionirati i općenito.*

**Primjer 2.4.** *Pretpostavimo da smo u trećem koraku Gaussovih eliminacija matrice $A$ reda 5 dobili:*

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ & & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ & & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

*Ako je $a_{33} = 0$, možemo mijenjati 3. redak bilo sa 4., bilo sa 5. retkom.*

Zbog numeričke stabilnosti (tzv. *ograničavanje pivotnog rasta*) gotovo uvijek (bez obzira da li je $a_{33} = 0$ ili $a_{33} \neq 0$) zamjenjujemo retke tako da na dijagonalu dođe najveći mogući element (po apsolutnoj vrijednosti). Ovaj postupak zovemo Gaussove eliminacije ( LU faktorizacija) sa parcijalnim pivotiranjem.

**Primjer 2.5.** *Nađite LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem za matricu*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{13}{8} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

*Rješenje.* Najeveći element u 1. stupcu je već na dijagonali, dakle ne trebamo raditi zamjenu.

$$P^{(1)} = I, \quad P^{(1)}A = A$$

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies A^{(1)} = L^{(1)}P^{(1)}A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{47}{24} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Najveći element (na i ispod dijagonale) u 2. stupcu je na poziciji $(3, 2)$, prema tome moramo zamijeniti 2. i 3. redak

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies P^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{47}{24} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies A^{(2)} = L^{(2)}P^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{35}{24} & 1 \end{bmatrix}$$

Najveći element u 3. stupcu je $\frac{35}{24}$, stoga moramo zamijeniti 3. i 4. redak.

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \implies P^{(3)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{35}{24} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$L^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{35} & 1 \end{bmatrix} \implies U = A^{(3)} = L^{(3)}P^{(3)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{35}{24} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{83}{70} \end{bmatrix}$$

$U = L^{(3)}P^{(3)}L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}P^{(1)}A$. Mi želimo $PA = LU$, prema tome moramo nekako zamijeniti poredak $L$-ova i $P$-ova.

$$P^{(2)}L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{L}^{(1)}} P^{(2)}$$

Sada je $U = L^{(3)}P^{(3)}L^{(2)}\tilde{L}^{(1)}P^{(2)}A$. Sada želimo zamijeniti poredak $P^{(3)}$ i $L^{(2)}$.

$$P^{(3)}L^{(2)} = (P^{(3)} \text{ zamijeni 3. i 4. redak }) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{L}^{(2)}} P^{(3)}$$

Sada je $U = L^{(3)}\tilde{L}^{(2)}P^{(3)}\tilde{L}^{(1)}P^{(2)}A$. Preostaje još zamijeniti $P^{(3)}\tilde{L}^{(1)}$.

$$P^{(3)}\tilde{L}^{(1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\tilde{L}}^{(1)}} P^{(3)}$$

$$U = L^{(3)}\tilde{L}^{(2)}\tilde{\tilde{L}}^{(1)} \underbrace{P^{(3)}P^{(2)}}_{P} A,\ P = P^{(3)}P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PA = \underbrace{\left(\tilde{\tilde{L}}^{(1)}\right)^{-1} \left(\tilde{L}^{(2)}\right)^{-1} \left(L^{(3)}\right)^{-1}}_{L} U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{24}{35} & 1 \end{bmatrix}$$

□

**Teorem 2.1.** *Za svaku $n \times n$ matricu $A$ postoji permutacija $P$ takva da Gaussove eliminacije daju $LU$ faktorizaciju od $PA$, tj. $PA = LU$, gdje je $L$ donjetokutasta sa jedinicma na dijagonali i $U$ gornjetrokutasta.*

Upotrebom parcijalnog pivotiranja, svi elementi od $L$ će biti po modulu manji od 1.

## 2.3 Kompaktni zapis LU faktorizacije

Primijetimo da smo u i-tom koraku algoritma osigurali

$$A^{(i)} = \left[\begin{array}{ccc|cc} * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ \hline & & & * & * \\ & & & * & * \end{array}\right]$$

$$L^{(i)}L^{(i-1)}\dots L^{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ \hline & & * & 1 & \\ & & * & & 1 \end{array}\right] \cdots \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ * & 1 & & & \\ * & & 1 & & \\ * & & & 1 & \\ * & & & & 1 \end{array}\right]$$

U memoriji možemo $A^{(i)}$ i sve $L^{(i)}, L^{(i-1)}, \dots, L^{(1)}$ čuvati unutar jedne $n \times n$ matrice:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & a_{13}^{(i)} & \dots & a_{1i}^{(i)} & a_{1i+1}^{(i)} & \dots & a_{1n}^{(i)} \\ l_{21}^{(1)} & a_{22}^{(i)} & a_{23}^{(i)} & \dots & a_{2i}^{(i)} & a_{2i}^{(i+1)} & \dots & a_{2n}^{(i)} \\ l_{31}^{(1)} & l_{32}^{(2)} & a_{33}^{(i)} & \dots & a_{3i}^{(i)} & a_{3i}^{(i+1)} & \dots & a_{3n}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_{ii}^{(i)} & \vdots & & \vdots \\ l_{i+1\ 1}^{(1)} & l_{i+1\ 2}^{(2)} & l_{i+1\ 3}^{(3)} & \dots & l_{i+1\ i}^{(i)} & a_{i+1\ i+1}^{(i)} & \dots & a_{i+1\ n}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1}^{(1)} & l_{n2}^{(2)} & l_{n3}^{(3)} & \dots & l_{n\ i}^{(i)} & a_{ni}^{(i)} & \dots & a_{nn}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Znamo da su na dijagonali od $L^{(j)}$ jedinice, pa ih ne moramo pamtiti.
Primijetimo još sljedeće:

- $P = P^{(n-1)} \dots P^{(2)}P^{(1)}$
- $U = A^{(n-1)} = L^{(n-1)}P^{(n-1)}L^{(n-2)}P^{(n-2)} \dots L^{(3)}P^{(3)}L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}P^{(1)}A \implies$
  $\tilde{L}^{(1)}$ dobivamo iz $L^{(1)}$ zamjenom redaka na koje djeluje $P^{(2)}$
  $\tilde{\tilde{L}}^{(1)}$ dobivamo iz $\tilde{L}^{(1)}$ zamjenom redaka na koje djeluje $P^{(3)}$, itd.

**Zadatak 2.2.** *Nađite LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem za matricu*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

*koristeći kompaktni zapis.*

*Rješenje.* Najveći element po apsolutnoj vrijednosti u prvom stupcu je 5, prema tome mijenjamo prvi i treći redak. Matrica permutacije je

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i

$$\breve{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elemente prvog stupca ispod dijagonale poništavamo tako da prvi redak množimo s $-\frac{2}{5}$ i dodajemo drugom retku, zatim prvi redak množimo s $-\frac{1}{5}$ i dodajemo trećem retku, te konačno prvi redak množimo s $-\frac{1}{5}$ i dodajemo četvrtom retku. Prema tome, matrica $\hat{A}^{(1)}$ ima oblik

$$\hat{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 6 \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{19}{5} & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 3 \end{array}\right]$$

Najveći element po modulu u drugom stupcu je $\frac{19}{5}$, prema tome moramo zamijeniti 2. i 4. redak. Permutacijska matrica je

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$\breve{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -\frac{1}{5} & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{19}{5} & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 6 \end{array}\right]$$

Da poništimo elemente u 2. stupcu ispod dijagonale, moramo množiti 2. redak s $-\frac{4}{19}$ i dodati 3. retku, te množiti drugi redak s $-\frac{3}{19}$ i dodati 4. retku. Dobivamo matricu

$$\hat{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{19} & \frac{69}{19} & \frac{7}{19} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{19} & \frac{9}{19} & \frac{105}{19} \end{bmatrix}$$

Najveći element u trećem stupcu je već na dijagonali, prema tome $P^{(3)} = I$ i $\breve{A}^{(3)} = \hat{A}^{(2)}$. Da poništimo elemente u trećem stupcu ispod dijagonale, moramo pomnožiti 3. redak s $-\frac{9}{69}$ i dodati 4. retku. Time smo dobili i konačnu $\hat{A}^{(3)}$ matricu

$$\hat{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{19} & \frac{69}{19} & \frac{7}{19} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{19} & -\frac{9}{69} & \frac{7182}{1311} \end{bmatrix}$$

Sada lako čitamo

$$P = P^{(3)}P^{(2)}P^{(1)} = I \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{5} & 1 & & \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{19} & 1 & \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{19} & \frac{9}{69} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ & & \frac{69}{19} & \frac{7}{19} \\ & & & \frac{7182}{1311} \end{bmatrix}$$

□

Pogledajmo još kako izgleda rješavanje sustava kada radimo LU faktorizaciju s pivoritanjem:

$$Ax = b \; \big/ \cdot P$$

$$PAx = Pb$$

$$L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$$

Dakle, prvo rješavamo sustav $Ly = Pb$, a zatim $Ux = y$.

**Algoritam 3** LU kompaktni zapis bez pivotiranja

```
for k = 1, 2, ..., n − 1 do
  for j = k + 1, ..., n do
    A_jk = A_jk / A_kk {zapiši elemente od L^(i) u k-ti stupac (odmah se mijenja predznak)}
  end for
  for j = k + 1, ..., n do
    for i = k + 1, ..., n do
      A_ij = A_ij − A_ik · A_kj {ažuriraj elemente koji pripadaju matrici A^(k)}
    end for
  end for
end for
```

## 2.4 LU faktorizacija s potpunim pivotiranjem

U $i$- tom koraku element s najvećom apsolutnom vrijednošću tražimo u odgovarajućoj $(n-i+1)\times(n-i+1)$ matrici te ga dovodimo na poziciju $(i,i)$ zamjenama redaka (množenjem slijeva permutacijskom matricom) i stupaca (množenjem zdesna permutacijskom matricom). Time dobijemo $PAQ = LU$, gdje su $P$ i $Q$ permutacijske matrice.
Rješavanje sustava tada ide na sljedeći način:

- $Ax = b \,\big/ \cdot P$
- $PAx = Pb$
- $(PA\underbrace{Q)(Q^T}_{I}x) = Pb$
- $L\underbrace{UQ^Tx}_{y} = Pb$

1. $Ly = Pb$
2. $U\underbrace{Q^Tx}_{z} = y$
   - $Uz = y$
   - $Q \cdot \big/ \; Q^Tx = z$
   - $x = Qz$

**Zadatak 2.3.** *Riješite sustav*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1\\ 2x_2 + 2x_3 &= 4\\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

*LU faktorizacijom s potpunim pivotiranjem.*

*Rješenje.* Matrica sustava je

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kod LU faktorizacije s potpunim pivotiranjem tražimo najveći element po modulu u cijeloj matrici. To je element $a_{23} = 4$. Stoga prvo trebamo zamijeniti 1. i 3. redak. Matrica permutacije je

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Time dobivamo matricu $\breve{A}^{(1)}$:

$$\breve{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada još trebamo zamijeniti 1. i 2. redak. Matrica permutacije je

$$Q^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dobili smo matricu $\breve{\breve{A}}^{(1)}$

$$\breve{\breve{A}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada poništavamo elemente u prvom stupcu ispod dijagonale. Da poništimo element $\breve{\breve{a}}_{21}^{(1)}$, prvi redak množimo s $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ i dodajemo drugom retku. Da poništimo element $\breve{\breve{a}}_{31}^{(1)}$ množimo prvi redak s $\frac{1}{2}$ i dodajemo trećem retku. Dakle matrica $L^{(1)}$ ima oblik

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica $A^{(1)} = L^{(1)}P^{(1)}AQ^{(1)}$ je jednaka

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada bi poništavali elemente drugog stupca ispod dijagonale, no vidimo da nemamo što poništavati, prema tome gotovi smo. Dakle

$$L = \left(L^{(1)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = P^{(1)}, \quad Q = Q^{(1)}$$

i $PAQ = LU$.

Riješimo sustav. Prvo rješavamo sustav $Ly = Pb$, tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \\ y_2 &= 4 - \frac{1}{2}y_1 = 3 \\ y_3 &= 1 + \frac{1}{2}y_1 = 2. \end{aligned}$$

Zatim rješavamo sustav $Uz = y$, tj.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 1 \\ z_2 &= 3 - z_3 = 2 \\ z_1 &= \frac{1}{4}(2 + 2z_2 - 2z_3) = 1 \end{aligned}$$

Konačno, rješenje je $x = Qz$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

## 2.5 Faktorizacija Choleskog

**Definicija 2.1.** *Simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je POZITIVNO-DEFINITNA ako za sve $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vrijedi $x^T Ax > 0$.*

**Propozicija 2.1.** *Sljedeće četiri tvrdnje su ekvivalentne ( za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$):*

*1) A je pozitivno definitna*

*2) sve svojstvene vrijednosti od A su pozitivne*

*3) sve vodeće minore od A su pozitivne*

*4) postoji gornjetrokutasta matrica R sa pozitivnim elementima na dijagonali takva da je $A = R^T R$ (FAKTORIZACIJA CHOLESKOG).*

Dakle, za simetrične pozitivno definitne matrice je $A = LU = R^T R$.

**Zadatak 2.4.** *Neka je A simetrična matrica koja ima LU faktorizaciju. Pokažite da se A može prikazati u obliku $A = LDL^T$, gdje je L donjetrokutasta s 1 na dijagonali,a D dijagonalna.*

*Rješenje.* A je simetrična $\implies$ $A = A^T$. Neka je $A = LU$ LU faktorizacija matrice $A$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A = A^T = LU \;\Big/^T &\implies A = U^T L^T = LU \\ &\implies \underbrace{L^{(-1)}U^T}_{donjetrokutasta} = \underbrace{UL^{-T}}_{gornjetrokutasta} \\ &\implies L^{(-1)}U^T = UL^{-T} = D = diag \\ &\implies U = DL^T \\ &\implies A = LDL^T \end{aligned}$$

□

**Algoritam 4** Faktorizacija Choleskog

**for** $i = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  $r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}$
  **for** $j = i+1, \ldots, n$ **do**
    $r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right)$
  **end for**
**end for**

Ako se prilikom računanja $r_{ii}$ vadi korijen iz negativnog broja, onda $A$ nije pozitivno definitna.

**Zadatak 2.5.** *Dokažite da je matrica*

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

*pozitivno definitna.*

*Rješenje.* $T$ je pozitivno definitna $\iff$ ima faktorizaciju Choleskog. Prikažimo $T = R^T R$. Idemo prema Algoritmu (4).

$i = 1$:

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2}$$

$$j = 2\colon\ r_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -1 - \overbrace{\sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}}^{=0} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$j = 3\colon\ r_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0 - \overbrace{\sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}}^{=0} \right) = 0$$

$$j = 4\colon\ r_{14} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0 - \overbrace{\sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}}^{=0} \right) = 0$$

$$j = 5\colon\ r_{15} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0 - \overbrace{\sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj}}^{=0} \right) = 0$$

Dakle 1. redak od $R$ je $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0)$.

$i = 2$:

$$\begin{aligned} r_{22} &= \sqrt{a_{22} - \text{suma kvadrata el. u R u stupcu iznad } r_{22}} \\ &= \sqrt{2 - \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$j = 3$: $r_{23} = \frac{1}{r_{22}} (a_{23} - r_{12}r_{13}) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$j = 4$: $r_{24} = \frac{1}{r_{22}} (a_{24} - r_{12}r_{14}) = 0$

$j = 5$: $r_{25} = \frac{1}{r_{22}} (a_{25} - r_{12}r_{15}) = 0$

Dakle 2. redak od $R$ je $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, 0)$.

$i = 3$:

$$\begin{aligned} r_{33} &= \sqrt{a_{33} - \text{suma kvadrata el. u R u stupcu iznad } r_{33}} \\ &= \sqrt{2 - \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$j = 4$: $r_{34} = \frac{1}{r_{33}} (a_{34} - r_{13}r_{14} - r_{23}r_{24}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$j = 5$: $r_{35} = \frac{1}{r_{33}} (a_{35} - r_{13}r_{15} - r_{23}r_{25}) = 0$

Dakle 3. redak od $R$ je $(0, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

$i = 4$: $r_{44} = \sqrt{2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$j = 5$: $r_{45} = \frac{1}{r_{44}} (a_{44} - r_{14}r_{15} - r_{24}r_{25} - r_{34}r_{35}) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Dakle 4. redak od $R$ je $(0, 0, 0, \sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

$i = 5$: $r_{55} = \sqrt{2 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$ Dakle 5. redak od $R$ je $(0, 0, 0, 0, \sqrt{\frac{6}{5}})$.

$A = R^T R$, gdje je

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{6}{5}} \end{bmatrix}$$

Pokazali smo da $A$ ima faktorizaciju Choleskog, prema tome ona je pozitivno definitna. $\square$

# 3 Interpolacija polinomom

Polinomi su pogodni upravo zato što imamo efikasan način za računanje vrijednosti u točki. Hornerov algoritam koristimo za računanje vrijednosti polinoma u točki. Neka je zadan polinom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Možemo ga zapisati i kao

$$p(x) = (((a_n x + a_{n-1})\, x + a_{n-2})\, x + \ldots + a_1)\, x + a_0. \tag{5}$$

Iz tog zapisa izvodimo algoritam: Za računanje vrijednosti polinoma u točki koristeći Hor-

**Algoritam 5** Hornerov algoritam

$s = a_n$
**for** $i = n-1 : -1 : 0$ **do**
  $s = s \cdot x_0 + a_i$
**end for**

nerovu shemu potrebno je **n zbrajanja i n množenja**.
**Problem interplacije polinomom**: Neka su zadane točke $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ i $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$. Treba naći polinom $p \in \mathcal{P}_n$ takav da je $p(x_i) = y_i$ za sve $i = 0, 1, \ldots, n$. Takav polinom zovemo INTERPOLACIJSKI POLINOM.
Ukoliko su $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ interpolacijski polinom postoji i jedinstven je. Ovisno koju bazu za prostor polinoma izaberemo dobijemo:

- Prikaz u standardnoj bazi
- Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma
- Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

## 3.1 Prikaz interpolacijskog polinoma u standardnoj bazi

Skup $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ je baza za realan vektorski prostor $\mathcal{P}_n = \left\{p : p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_i \in \mathbb{R}\right\}$. Problem nalaženja interpolacijskog polinoma $p$ se svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

To je sustav $(n+1) \times (n+1)$ koji ima jedinstveno rješenje. Sustav ima jedinstveno rješenje ako je matrica sustava regularna, tj. ako je determinanta te matrice različita od nule. Determinanta ovakvog sustava je Vandermondeova determinanta.

**Zadatak 3.1.** *Nađite interpolacijski polinom stupnja manjeg ili jednakog 2 koji prolazi točkama* $(-1, 3), (1, 5), (2, 0)$.

*Rješenje.* Tražimo polinom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} p(-1) = 3 &\iff a_0 - a_1 + a_2 = 3 \\ p(1) = 5 &\iff a_0 + a_1 + a_2 = 5 \\ p(2) = 0 &\iff a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobijemo $a_0 = 6, a_1 = 1, a_2 = -2$. Dakle, interpolacijski polinom je

$$p(x) = 6 + x - 2x^2.$$

□

Za određivanje interpolacijskog polinoma moramo riješiti sustav. Može li jednostavnije? Probajmo promijeniti bazu za $\mathcal{P}_n$.

## 3.2 Lagraneov interpolacijski polinom

Neka su zadane točke $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Definiramo polinome $\ell_i \in \mathcal{P}_n$ za $i = 0, 1, \ldots, n$

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(x_i)}$$

pri čemu su

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$
$$\omega_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x - x_j) = \frac{\omega(x)}{x - x_i}$$

Za polinome $\ell_i$ vrijedi: $\ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Dakle traženi interpolacijski polinom $p$ možemo dobiti kao

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x), \quad i, j = 0, 1, \ldots, n}. \tag{6}$$

Provjerite da je ovo zaista interpolacijski polinom!

**Zadatak 3.2** (DZ)**.** *Dokažite da polinomi $\ell_i$ čine bazu prostora $\mathcal{P}_n$.*

*Rješenje.* Dovoljno je pokazati da su linearno nezavisni. Neka je

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k l_k = 0.$$

Uvrstimo u jednakost redom čvorove interpolacije $x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Tada

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k l_k(x_i) = 0 \implies \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \delta_{ik} = 0 \implies \alpha_i = 0.$$

Dakle, svi $\alpha_i$ su nula, pa slijedi da polinomi čine bazu. □

**Zadatak 3.3.** *Nađite interpolacijski polinom stupnja* 2 *koji prolazi točkama* $(-1, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 0)$.

*Rješenje.* Zapišimo kako izgledaju polinom Lagrangeove baze:

$$\ell_0 = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{6}$$
$$\ell_1 = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$
$$\ell_2 = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{x^2 - 1}{3}$$

.

Interpolacijski polinom je

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x) \\ &= 3\frac{x^2-3x+2}{6} + 5\frac{x^2-x-2}{-2} + 0\frac{x^2-1}{3} && \text{zapis u Lagrangeovoj bazi} \\ &= -2x^2 + x + 6 && \text{zapis u standardnoj bazi} \end{aligned}$$

□

**Zadatak 3.4.** *Odredite broj operacija potreban za računanje vrijednosti Lagrangeovog interpolacijskog polinoma u točki $x$.*

*Rješenje.* Lagrangeov interpolacijski polinom je oblika

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{y_i}{\omega_i(x_i)}}_{A_i} \omega_i(x)$$

Primijetimo da vrijednost koeficijenata $A_i$ ne ovisi o točki $x$ i

$$\omega_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j).$$

Za računanje $\omega_i(x_i)$ nam treba

- $n$ oduzimanja i
- $n-1$ množenja.

Za računanje jednog $A_i$, nakon što smo izračunali $\omega_i(x_i)$ nam treba

- 1 dijeljenje.

Za računanje svih $A_i$ (ima ih $n+1$) nam prema tome treba

- $(n+1)n$ aditivnih operacija i
- $(n+1)n$ multiplikativnih operacija.

Pretpostavimo da smo ove elemente izračunali na početku i zapamtili (računanje u različitim točkama više puta).
Za računanje $\omega_i(x)$ nam treba:

- $n$ aditivnih operacija
- $n-1$ multiplikativnih operacija.

Za računanje sume $p(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i\omega_i(x_i)$ nam treba

- $n+1$ multiplikativna operacija i
- $n$ aditivnih operacija.

Kada sve zbrojimo, dobijemo da nam je ukupno potrebno (imamo $n+1$ puta $\omega_i(x)$:

- $(n+1)n + n = (n+2)n$ aditivnih operacija i

- $(n+1)(n-1)+n+1=(n+1)n$ multiplikativnih operacija.

$\square$

Zaključujemo da nam je računanje LIP-a po formuli (5) neekonomično, jer je broj operacija proporcionalan kvadratu broja čvorova, čak i ako izuzmemo računanje dijelova koji nije ovisan o točki $x$ već samo o čvorovima $x_i$.
Problem: kada računamo $\omega_i(x)$neka množenja ponavljamo $n+1$ puta. Zato ćemo $\omega_i(x)$ zapisati kao

$$\omega_i(x)=\frac{\omega(x)}{x-x_i},$$

pa se računanje $p_n(x)$ svodi na računanje prema formuli

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(x_i)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega_i(x_i)} \\ &= \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\omega_i(x_i)} \frac{1}{x-x_i} \\ &= \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{A_i}{x-x_i}. \end{aligned}$$

Mana: moramo provjeravati je li $x$ jedan od čvorova, jer u protivnom dijelimo s nulom. Za računanje ove formule, uz pretpostavku da su $A_i$ izračunati prije nam treba

- $3n+2$ A operacija
- $2n+2$ M operacija.

(Dokažite sami!). Vidimo da je ovaj broj znatno manji od onoga za prijašnju formulu.
Ako je i ovo veliki broj operacija, npr. ako moramo izvrjednjavati polinom u puno točaka, tada se on zapiše u standardnoj bazi i računa Hornerovim algoritmom.
Koristi se za dokaze.

## 3.3 Newtonov interpolacijski polinom

Lagrangeov oblik nije pogodan za povećanje stupnja polinoma jer interpolacijski polinom moramo računati od početka. Kod Newtonovog oblika to je jednostavno.
Neka su zadane točke $(x_i, y_i)$, $i=0,1,\ldots,n$. **Newtonov interpolacijski polinom** za zadane čvorove dan je sa

$$p(x)=f[x_0]+\sum_{i=1}^{n} f[x_0,\ldots,x_i](x-x_0)\ldots(x-x_{i-1}).$$

Brojeve $f[x_0,\ldots,x_i]$ zovemo **podijeljene razlike**.
Primijetimo da je baza zadana sa

$$\left\{1,(x-x_0),(x-x_0)(x-x_1),\ldots,\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)\right\}.$$

Dokažite da je ovo baza u $\mathcal{P}_n$.

**Definicija 3.1.** ***Podijeljena razlika nultog reda*** *u čvoru* $x_i$ *dana je sa*

$$f[x_i] = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

***Podijeljena razlika k-tog reda*** *(*$k \geq 1$*) dobiva se iz podijeljenih razlika* $(k-1)$*-og reda formulom*

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

*za* $k = 1, \ldots, n$ *i* $i = 0, \ldots, n-k$.

Tablica podijeljenih razlika izgleda

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f[x_0] = y_0$ | | | |
| | | $f[x_0, x_1]$ | | |
| $x_1$ | $f[x_1] = y_1$ | | $f[x_0, x_1, x_2]$ | |
| | | $f[x_1, x_2]$ | | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ |
| $x_2$ | $f[x_2] = y_2$ | | $f[x_1, x_2, x_3]$ | |
| | | $f[x_2, x_3]$ | | |
| $x_3$ | $f[x_3] = y_3$ | | | |

**Zadatak 3.5.** *Nađite Newtonov interpolacijski polinom stupnja* $\leq 2$ *koji prolazi točkama* $(-1, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 0)$.

*Rješenje.* Formirajmo tablicu podijeljenih razlika

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $3$ | | |
| | | $\frac{5-3}{1-(-1)} = 1$ | |
| $1$ | $5$ | | $\frac{-5-1}{2-(-1)} = -2$ |
| | | $\frac{0-5}{2-1} = -5$ | |
| $2$ | $0$ | | |

Slijedi

$$p(x) = 3 + 1(x - (-1)) + (-2)(x - (-1))(x - 1)$$

ili

$$p(x) = 0 * 1 - 5(x - 2) - 2(x - 2)(x - 1).$$

$\square$

**Algoritam 6** Hornerov algoritam (NIP)

$s = f[x_0, \ldots, x_n]$
**for** $i = n-1, \ldots, 0$ **do**
  $s = s \cdot (x - x_1) + f[x_0, \ldots, x_i]$
**end for**

Za računanje vrijednosti Newtonovog interpolacijskog polinoma u točki $x$ koristimo algoritam analogan Hornerovom algoritmu. Ovaj algoritam zahtjeva

- n M operacija
- 2n A operacija

Podijeljene razlike ne ovse o $x$ pa se one izračunaju prije. Broj operacija potreban za njihovo računanje je

- $n(n+1)$ A operacija
- $\frac{n(n+1)}{2}$ M operacija

Usporedite sa Lagrangeovim polinomom.

## 3.4 Pogreške interpolacije

Neka je $f \in C^{n+1}([a,b])$, funkciju $f$ interpoliramo u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$ polinomom $p \in \mathcal{P}_n$, za kojeg vrijedi

$$p(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

**Prava greška interpolacije** u točki $x \in [x_0, x_n]$ dana je sa

$$|f(x) - p(x)|.$$

Za pravu grešku interpolacije vrijedi

$$|f(x) - p(x)| = \frac{|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi), \quad \xi \in \langle x_0, x_n \rangle.$$

Ocjena prave greške interpolacije je

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|}{(n+1)!} M_{n+1} f$$

gdje je $M_{n+1} f = \max_{y \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(y)|$.
Pogrešku interpolacije na čitavom intervalu $[x_0, x_n]$ zovemo još i **uniformna pogreška**. Računamo je kao

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p(x)| = \max_{x \in [x_0, x_n]} \frac{|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi_x).$$

Ocjena unifromne pogreške je

$$\max_{x \in [x_0, x_n]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{|\omega(x_0, \ldots, x_n)|}{(n+1)!} M_{n+1} f$$

gdje je $\omega(x_0, \ldots, x_n) = \max_{x \in [x_0, x_n]} |(x - x_0) \ldots (x - x_n)|$.

**Zadatak 3.6.** *Nađite interpolacijski polinom stupnja* 2 *za funkciju* $f(x) = \ln(1+x)$ *sa čvorovima interpolacije* 0, 1 *i* 3.

*a) Nađite* $p(2)$*, pravu pogrešku interpolacije u točki* 2 *i ocjenu pogreške interpolacije u točki* 2*,*

*b) nađite uniformnu ocjenu pogreške interpolacije i pravu uniformnu pogrešku.*

*Rješenje.* a)

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | |
| | | $\ln 2$ | |
| 1 | $\ln 2$ | | $\frac{-\ln 2}{6}$ |
| | | $\frac{\ln 4 - \ln 2}{3-1} = \frac{\ln 2}{2}$ | |
| 3 | $\ln 4$ | | |

$$p(x) = 0 + \ln 2(x-0) - \frac{\ln 2}{6}(x-0)(x-1)$$

Prava pogreška u točki 2 je

$$|f(2) - p(2)| = |\ln 3 - \frac{5}{3}\ln 2| = 0.056633.$$

Da bismo odredili ocjenu prave pogreške u točki 2 treba nam $f^{(3)}$ i maksimum njene aposlutne vrijednosti na $[0,3]$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Kako je $f'''$ strogo padajuća slijedi da je

$$M_3 f = f'''(0) = 2.$$

Slijedi da je ocjena

$$|f(2) - p(2)| \le \frac{|(2-0)(2-1)(2-3)|}{3!} 2 = \frac{2}{3} = 0.666667$$

Vidimo da je ocjena prave pogreške pesimistična ( deset puta veća od prave ).

b) Za ocjenu uniformne pogreške treba nam

$$\omega(0,1,3) = \max_{x\in[0,3]} |x(x-1)(x-3)| = \max_{x\in[0,3]} |x^3 - 4x^2 + 3x|.$$

Tražimo globalni maksimum

$$(x^3 - 4x^2 + 3x)' = 3x^2 - 8x + 3$$

Stacionarne točke su $x_1 = 0.451516$ i $x_2 = 2.21525$. Kako je $|\omega(x_1)| = 0.63113$, a $|\omega(x_2)| = 2.11261$, slijedi da je $\omega(0,1,3) = 2.11261$. Konačno

$$\max_{x\in[0,3]}|f(x)-p(x)| \leq \frac{|\omega(0,1,3)|}{3!}M_3 f = \frac{2.11261}{6}2 = 0.704204.$$

Da bismo našli uniformnu pogrešku treba nam

$$\max_{x\in[0,3]}|f(x)-p(x)| = \max_{x\in[0,3]}|\ln(1+x) - \ln 2 * x + \frac{\ln 2}{6}x(x-1)|$$

Kao i prije, tražimo ekstreme funkcije

$$(f(x)-p(x))' = \frac{2\ln 2 * x^2 - 5\ln 2 * x + 6 - 7\ln 2}{6(1+x)}.$$

Stacionarne točke su $x_1 = 0.39302$ i $x_2 = 2.10698$. Kako je $|f(x_1) - p(x_1)| = 0.0314944$ i $|f(x_1) - p(x_1)| = 0.0573484$ zaključujemo da je uniformna pogreška jednaka 0.0573484.

□

**Zadatak 3.7.** *Odredite $t \in \langle 0,1]$ tako da interpolacijski polinom za funkciju*

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

*s točkama interpolacije $(0, f(0))$, $(t, f(t))$ ima najmanju moguću maksimalnu pogrešku na segmentu $[0,1]$.*

*Rješenje.* Pretpostavimo da smo pronašli takav $t = t^*$

$$t^* = \min_{t\in\langle 0,1]}\max_{x\in[0,1]}|f(x) - p_t(x)|.$$

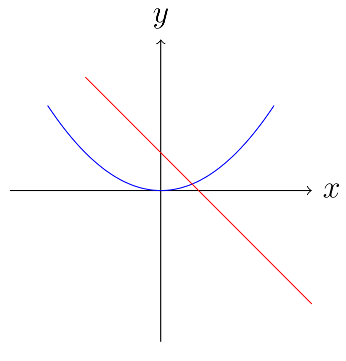
Prvo tražimo maksimalnu pogrešku interpolacije. Newtonov interpolacijski polinom je oblika

$$p_t(x) = 8 + \frac{t^2 - 6t}{t}x$$

pa je $f(x) - p_t(x) = x^2 - tx$. Zadatak ćemo riješiti tako da prvo nađemo maksimalnu pogrešku interpolacije polinomom $p_t$, a onda minimiziramo tu pogrešku.
Ova funkcija ima ekstrem u $\frac{t}{2}$, a da nađemo maksimalnu pogrešku na intervalu $[0,1]$, trebamo usporediti apsolutne vrijednosti pogreške u lokalnim ekstermima i rubovima intervala. Kako je 0 čvor interpolacije, preostaje samo usporediti vrijednosti apsolutne pogreške u ekstremu i točki 1. Dakle

$$\max_{x\in[0,1]}|f(x)-p_t(x)| = \max\{|f(\frac{t}{2}) - p_t(\frac{t}{2})|, |f(1) - p_t(1)|\} = \max\left\{\frac{t^2}{4}, 1-t\right\}.$$

Ako nacrtamo funkcije $\frac{t^2}{4}$ i $1-t$,



lako vidimo da vrijedi

$$\max\left\{\frac{t^2}{4}, 1-t\right\} = \begin{cases} 1-t & \text{za } t \in \langle 0, 2\sqrt{2}-2] \\ \frac{t^2}{4} & \text{za } t \in \langle 2\sqrt{2}-2, 1] \end{cases}$$

Točku $2\sqrt{2}-2$ smo dobili kao rješenje jednadžbe $\frac{t^2}{4} = 1-t$ koje pada u interval $[0,1]$. Kada uvrstimo u početni problem dobijemo

$$t^* = \min_{t\in\langle 0,1]} \max_{x\in[0,1]} |f(x) - p_t(x)| = 2\sqrt{2} - 2.$$

□

**Zadatak 3.8** (DZ). *Zadane su vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ u točkama $\frac{1}{n}$, $n = 1, \ldots, 4$. Nađite vrijednosti svih interpolacijskih polinoma u točki $x = \frac{2}{3}$ i ocijenite pogrešku. Kada su stvarna greška i njena ocjena najmanje?.*

*Rješenje.* Točke interpolacije su $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Kako $\frac{2}{3}$ mora ležati u intervalu određenom najmanjom i najvećom točkom interpolacije, mogući izbori interpolacijskih polinoma su

- $p_1$, koji interpolira $f$ u $\frac{1}{2}, 1$
- $p_2$, koji interpolira $f$ u $\frac{1}{3}, 1$
- $p_3$, koji interpolira $f$ u $\frac{1}{4}, 1$
- $p_4$, koji interpolira $f$ u $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$
- $p_5$, koji interpolira $f$ u $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$
- $p_6$, koji interpolira $f$ u $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1$
- $p_7$, koji interpolira $f$ u $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$.

Dobije se da najmanju ocjenu pogreške ima $p_1$, a najmanje prave pogreške imaju $p_1$i $p_4$. □

## 3.5 Ekvidistantni čvorovi

mreža kod koje su svi susjedni čvorovi jednako udaljeni, npr. za $n+1$ čvor definiramo

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{x_n - x_0}{n} \quad i = 0, \ldots, n.$$

**Zadatak 3.9** (DZ). *Ako su čvorovi interpolacije ekvidistantni, tj. $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, , \ldots, n$, onda vrijedi*

$$\omega(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \max_{x\in[x_0,x_n]} |(x - x_0)\ldots(x - x_n)| < n!h^{n+1}$$

*i*

$$\max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1} M_{n+1} f$$

**Zadatak 3.10.** *Zadana je funkcija*

$$f(x) = \frac{x+1}{(3-x)^2}$$

*na intervalu $[1,2]$. Funkciju interpoliramo polinomom $p$ sa $n+1$ čvorova na ekvidistantnoj mreži.*

*a) Dokažite da niz $(p_n)_n$ uniformno konvergira ka $f$ na $[1,2]$.*

*b) Nađite najmanji $n \in \mathbb{N}$ za koji pogreška ne prelazi $10^{-2}$ na čitavom $[1,2]$.*

*Rješenje.* Rastavimo funkciju na pracijalne razlomke

$$f(x) = \frac{4}{(3-x)^2} - \frac{1}{3-x}$$

Kako je

$$\left(\frac{1}{3-x}\right)' = \frac{1}{(3-x)^2}$$

imamo da je

$$f^{(n+1)}(x) = 4\left(\frac{1}{3-x}\right)^{(n+2)} - \left(\frac{1}{3-x}\right)^{(n+1)}$$

Indukcijom se pokaže da je

$$\left(\frac{1}{3-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(3-x)^{n+1}}$$

pa je

$$f^{(n+1)}(x) = 4\frac{(n+2)!}{(3-x)^{n+3}} - \frac{(n+1)!}{(3-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(3-x)^{n+3}}(5+4n+x)$$

pa je

$$|f^{(n+1)}(x)| = \frac{(n+1)!}{(3-x)^{n+3}}(5+4n+x) \leq (n+1)!(7+4n)$$

(najveće za $x = 2$). Koristeći formulu za ocjenu pogreške za ekvidistantnu mrežu, dobivamo

$$\max_{x\in[x_0,x_n]}|f(x)-p_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1}(n+1)!(7+4n) \underbrace{=}_{h=\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{n^{n+1}}}{n+1}(n+1)n(n-1)!(7+4n) = \frac{(n-1)!(4n+7)}{n^n}$$

Kako je

$$\frac{(n-1)!(4n+7)}{n^n} = \frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{4n+7}{n} \leq \frac{5}{n}$$

jer je $\frac{2}{n} < 1, \ldots, \frac{n-1}{n} < 1$ i $\frac{4n+7}{n} < 5$ (za dovoljno veliki $n$), dobijemo

$$\max_{x\in[x_0,x_n]}|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{5}{n} \to 0$$

kada $n$ teži u $\infty$. Drugi dio zadatka dobijemo ako riješimo nejednadžbu

$$\frac{(n-1)!(4n+7)}{n^n} \leq 10^{-2}$$

i to uvršatavnjem $(n = 1, 2, )$. Nejednadžba je zadovoljena za $n = 9$ kada je izraz na lijevoj strani jednak 0.00447514. □

## 3.6 Čebiševljevi polinomi

Određeni su formulom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Za njih vrijedi rekurzivna formula

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \end{aligned}$$

Vodeći koeficijent od $T_n$ je jednak $2^{n-1}$.
Nultočke Čebiševljevog polinoma $T_n$ su

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

**Teorem 3.1.** *Za svaki polinom* $p \in \{p \in \mathcal{P}_n | p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n-1\}$ *vrijedi*

$$\max_{x \in [-1,1]} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je* $p = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$.

Promatramo bijekciju $l : [a, b] \to [-1, 1]$ zadanu sa

$$l(x) = \frac{2}{b-a}(x-a) - 1$$

Na $[a, b]$ definiramo polinome

$$\tilde{T}_n(x) = (T_n \circ l)(x)$$

Tada je

$$\max_{x \in [a,b]} |\tilde{T}_n(x)| = \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)|$$

Ocjena pogreške interpolacijskog polinoma

$$|f(x) - p(x)| \leq \omega_n(x) \frac{M_{n+1}f}{(n+1)!}$$

povlači

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)| \frac{M_{n+1}f}{(n+1)!}.$$

Kako polinom $\omega_n$ ima koeficijent 1 uz vodeću potenciju, zaključujemo da ako za čvorove interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n$ uzmemo nultočke Čebiševljevog polinoma $\tilde{T}_{n+1}$ da je u tom slučaju $\max_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)|$ minimalna.
Nultočke polinoma $\tilde{T}_n$ na $[a, b]$ su

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2} \left( a + b - (a-b) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

U slučaju da smo odabrali nultočke polinoma $\tilde{T}_{n+1}$ za čvorove interpolacije dobijemo:

$$\max_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)| = 2 \left( \frac{b-a}{4} \right)^{n+1}.$$

**Zadatak 3.11.** *Za funkciju*

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

*na segmentu* $[-1, 1]$ *nađite interpolacijski polinom stupnja* 2 *na ekvidistantnoj i Čebiševljevoj mreži te uniformnu ocjenu greške.*

*Rješenje.* Ekvidistantna mreža sastoji se od čvorova $-1, 0, 1$. Tablica podijeljenih razlika je

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $\frac{1}{26}$ | | |
| | | $\frac{25}{26}$ | |
| $0$ | $1$ | | $\frac{-25}{26}$ |
| | | $\frac{-25}{26}$ | |
| $1$ | $\frac{1}{26}$ | | |

pa je interpolacijski polinom dan sa

$$p_2(x) = \frac{1}{26} + \frac{25}{26}(x+1) - \frac{25}{26}x(x+1) = 1 - \frac{25}{26}x^2.$$

Na Čebiševljevoj mreži čvorovi su dani kao nultočke polinoma $T_3(x) = \cos(3 \arccos x)$, a to su

$$x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{6}, \quad i = 0, 1, 2$$

pa je

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tablica podijeljenih razlika je dana sa

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{4}{79}$ | | |
| | | $-\frac{150}{79\sqrt{3}}$ | |
| $0$ | $1$ | | $-\frac{100}{79}$ |
| | | $\frac{150}{79\sqrt{3}}$ | |
| $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{4}{79}$ | | |

pa je interpolacijski polinom dan sa

$$r_2(x) = \frac{4}{79} - \frac{150}{79\sqrt{3}}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{100}{79}x(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - \frac{100}{79}x^2.$$

Tražimo ocjenu pogreške, pa nam treba maksimum funkcije $|f^{(3)}(x)|$ na $[-1,1]$. Kako je

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{50x}{(1+25x^2)^2}\\
f''(x) &= -\frac{50(1-75x^2)}{(1+25x^2)^3}\\
f'''(x) &= -15000\frac{25x^3-x}{(1+25x^2)^4}\\
f^{(4)} &= \frac{15000}{(1+25x^2)^5}(3125x^4-250x^2+1)
\end{aligned}$$

Stacionarne točke od $f'''$ su

$$x_{1,2} = \pm 0.275, \quad x_{3,4} = \pm 0.06498$$

Da nađemo maksimum, pogledajmo vrijednosti od $f'''$ u stacionarnim točkama i rubovima intervala:

$$\begin{aligned}
|f'''(x_2)| = |f'''(x_1)| &= 56.62\\
|f'''(x_3)| = |f'''(x_4)| &= 583.57\\
|f'''(1)| = |f'''(-1)| &= 0.787
\end{aligned}$$

Za uniformnu ocjenu greške treba naći

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x+1)x(x-1)|.$$

Promatramo polinom $\omega_2(x) = x^3 - x$. On svoje ekstreme postiže u točkama $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ i po apsolutnoj vrijednosti oni iznose $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ pa je uniformna ocjena greške za ekvidistantnu mrežu jednaka

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq 37.436.$$

Za interpolacijski polinom na Čebiševljevoj mreži je

$$\max_{x\in[-1,1]} |(x+\frac{\sqrt{3}}{2})x(x-\frac{\sqrt{3}}{2})| = \frac{1}{4}$$

pa je uniformna ocjena pogreške dana sa

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - r_2(x)| \leq 24.315.$$

Prave maksimalne pogreške su:

- 0.646229 za ekvidistantnu mrežu (postiže se u $x = 0.404921$),
- 0.6005977 za čebiševljevu mrežu (postiže se u $x = 0.371166$).

□

## 3.7 Po dijelovima linearna interpolacija

Neka je dana mreža

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

na $[a, b]$. **LINEARNI SPLINE** na toj mreži, za funkciju $f$ je ona funkcija čija je restrikcija na $[x_{i-1}, x_i]$ linearni polinom:

$$l_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i) + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}), \quad \text{za } x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Pogreška ove interpolacije u nekoj točki $x$ je jednaka pogreški interpolacije linearnim polinomom, pa su nam rezultati otprije poznati.

**Teorem 3.2.** *Neka je zadana funkcija $f$ na $[a, b]$. Neka je zadana mreža $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ i linearni spline $l$ za funkciju $f$ u čvorovima $x_i$, tj.*

$$f(x_i) = l(x_i), \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n$$

*Tada vrijedi*

*(1) ako je $f \in C^2([a, b])$, $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - l(x)| \leq \frac{1}{8}\Delta^2 M_2 f$,*

*(2) ako je $f \in C^1([a, b])$, $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - l(x)| \leq \frac{1}{2}\Delta M_1 f$,*

*(3) ako je $f \in C([a, b])$, $|f(x) - l(x)| \leq \max_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} \{|f(\xi) - f(x_i)|, |f(\xi) - f(x_{i-1})|\}$, za $x \in [x_{i-1}, x_i]$,*

*pri čemu je $\Delta = \max_{i=1,2,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})$.*

**Zadatak 3.12.** *Aproksimiramo funkciju $f(x) = \ln x$ na $[1, 100]$ po dijelovima linearnom interpolacijom. Fiksiramo traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$ koju zahtijevamo na čitavom intervalu. Nađite broj čvorova da se postigne tražena točnost uz*

*a) ekvidistantnu mrežu s korakom $h$ na čitavom $[1, 100]$,*

*b) podijelimo interval na tri dijela : $[1, 2], [2, 7], [7, 100]$ te napravimo ekvidistantnu mrežu na svakom od njih s koracima $h_1$, $h_2$ i $h_3$.*

*Rješenje.*

$$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Vidimo da na intervalu $[a, b]$, funkcija $|f''|$ postiže svoj maksimum u lijevom rubu intervala (strogo padajuća).

a) Koristeći ocjenu pogreške iz teorema dobivamo da je na $[1, 100]$, uz ekvidistantnu mrežu s korakom $h$, pogreška interpolacije

$$\max_{x\in[1,100]} |f(x) - l(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 |f''(1)| = \frac{h^2}{8}.$$

Tražimo $h$ tako da je

$$\frac{h^2}{8} < \varepsilon = 10^{-4}.$$

To znači da mora biti

$$h < 10^{-2}\sqrt{8} = 0.028284.$$

$$h = \frac{b - a}{n} \implies n = \frac{b - a}{h} > \frac{99}{10^{-2}\sqrt{8}} = 3500.17$$

Prema tome broj podsegmenata mora biti $n = 3501$, tj. broj čvorova je 3502.

b) 1. interval [1,2]: $M_2 f = |f''(1)| = 1$, dakle

$$h_1^2 < 8 * 10^{-4} \implies h_1 < 0.02828427.$$

$$h_1 = \frac{2-1}{n_1} \implies n_1 > \frac{1}{h_1} = 35.35$$

Dakle $n_1 = 36$

2. interval [2,7]: $M_2 f = |f''(2)| = \frac{1}{4}$, dakle

$$h_2^2 < 32 * 10^{-4} \implies h_2 < 0.05656824.$$

$$h_2 = \frac{7-2}{n_2} \implies n_2 > \frac{5}{h_2} = 88.38$$

Dakle $n_2 = 89$

3. interval [7,100]: $M_2 f = |f''(7)| = \frac{1}{49}$, dakle

$$h_3^2 < 392 * 10^{-4} \implies h_3 < 0.197989.$$

$$h_3 = \frac{100-7}{n_3} \implies n_3 > \frac{93}{h_3} = 469.72$$

Dakle $n_3 = 470$

Dakle ukupno nam treba $(n_1 + 1) + (n_2 + 1) + (n_3 + 1) - 2 = 596$ čvorova.

□

## 3.8 Višestruki čvorovi

Osim interpoliranja funkcijskih vrijednosti, možemo interpolirati i vrijednosti njenih derivacija. Razlikujemo dva slučaja:

1. zadane su **redom** sve derivacije u nekoj točki
2. u nekoj točki su zadane samo neke derivacije

U prvom slučaju vrijedi teorem koji kaže da takva interpolacija postoji, dok u drugom slučaju ta interpolacija ne mora uvijek postojati.

**Teorem 3.3.** *Neka su zadani čvorovi $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$, kratnosti $n_i \geq 1$, $i = 0, \ldots, m$, te brojevi $y_i^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n_i - 1$, $i = 0, \ldots, m$. Tada postoji točno jedan polinom $p$ stupnja $n = -1 + \sum_{k=0}^{m} n_k$, takav da je*

$$p^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, \ldots, n_i - 1, \ i = 0, \ldots, m.$$

*Nadalje, ako je $x \in [x_0, x_m]$ i $f \in C^n([x_0, x_m])$, tada postoji $\xi \in (x_0, x_m)$ takav da vrijedi*

$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)^{n_0}(x - x_1)^{n_1} \ldots (x - x_m)^{n_m}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Ako ovakav interpolacijski problem rješavamo pomoću Newtonovog interpolacijskog polinoma, uočavamo da ne znamo izračunati $f[x_i, x_i]$, jer dobivamo 0/0. No vrijedi:

$$f[x_i, x_i] = \lim_{h \to 0} f[x_i, x_i + h] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{x_i + h - x_i} = f'(x_i).$$

Vrijedi i općenitiji rezultat:

$$f\,\underbrace{[x_i, \ldots, x_i]}_{k+1} = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}.$$

**Zadatak 3.13.** *Konstruirajte interpolacijski polinom koji zadovoljava sljedeće uvjete:*

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $f'(x_i)$ | $f''(x_i)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | – |
| 2 | 6 | 7 | 8 |

*Rješenje.* Tablica podijeljenih razlika je

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | |
| | | 3 | | | |
| 1 | 2 | | 1 | | |
| | | 4 | | 2 | |
| 2 | 6 | | 3 | | $-1$ |
| | | 7 | | 1 | |
| 2 | 6 | | 4 | | |
| | | 7 | | | |
| 2 | 6 | | | | |

interpolacijski polinom je

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)(x-1) + 2(x-1)(x-1)(x-2) - (x-1)^2(x-2)^2$$

□

**Zadatak 3.14.** *Konstruirajte, ako postoji, interpolacijski polinom za zadane vrijednosti funkcije f*

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $f'(x_i)$ | $f''(x_i)$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 4 | 17 | – |
| 0 | 2 | – | 4 |
| 1 | 8 | 17 | – |

*Rješenje.* Tražimo polinom stupnja 5 (6. uvjeta interpolacije)

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \\ p'(x) &= b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4 \\ p''(x) &= 2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 \end{aligned}$$

Iz uvjeta interpolacije

$$\begin{aligned} p(-1) &= f(-1) = 4 \\ p'(-1) &= f'(-1) = 17 \\ p(0) &= f(0) = 2 \\ p''(0) &= f''(0) = 4 \\ p(1) &= f(1) = 8 \\ p'(1) &= f'(1) = 17 \end{aligned}$$

dobijemo sustav

$$
\begin{aligned}
a - b + c - d + e - f &= 4 \\
b - 2c + 3d - 4e + 5f &= 17 \\
a &= 2 \\
2c &= 4 \\
a + b + c + d + e + f &= 8 \\
b + 2c + 3d + 4e + 5f &= 17
\end{aligned}
$$

Odmah vidimo da je $a = c = 2$. Uzmemo li to u obzir, dobijemo sustav:

$$
\begin{aligned}
-b - d + e - f &= 0 \\
b + 3d - 4e + 5f &= 21 \\
b + d + e + f &= 4 \\
b + 3d + 4e + 5f &= 13
\end{aligned}
$$

Dodavanjem prve jednadžbe ostalima dobivamo

$$
\begin{aligned}
-b - d + e - f &= 0 \\
2d - 3e + 4f &= 21 \\
2e &= 4 \\
2d + 5e + 4f &= 13
\end{aligned}
$$

Iz treće jednadžbe čitamo $e = 2$. Uvrštavanjem dobivamo kontradikciju:

$$
\begin{aligned}
-b - d - f &= 2 \\
2d + 4f &= 27 \\
2d + 4f &= 3
\end{aligned}
$$

Dakle, ne postoji interpolacijski polinom koji zadovoljava zadane uvjete.
(Determinanta ove matrice je 0 (izračunajte!), pa sustav nema rješenja. Drugi način) $\square$

**Zadatak 3.15.** *Konstruirajte interpolacijski polinom za zadane vrijednosti funkcije $f$*

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $f'(x_i)$ | $f''(x_i)$ |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 20 | $-$ | 108 |
| 0 | 0 | $-6$ | $-$ |
| 1 | 4 | $-$ | 0 |

*Rješenje.* Traženi interpolacijski polinom će biti stupnja 5, ako postoji. Neka je on zadan kao u prethodnom zadatku. Iz uvjeta interpolacije

$$
\begin{aligned}
p(-1) &= f(-1) = 20 \\
p''(-1) &= f''(-1) = 108 \\
p(0) &= f(0) = 0 \\
p'(0) &= f'(0) = -6 \\
p(1) &= f(1) = 4 \\
p''(1) &= f''(1) = 0
\end{aligned}
$$

dobijemo sustav

$$
\begin{aligned}
a - b + c - d + e - f &= 20 \\
2c - 6d + 12e - 20f &= 108 \\
a &= 0 \\
b &= -6 \\
a + b + c + d + e + f &= 4 \\
2c + 6d + 12e + 20f &= 0
\end{aligned}
$$

Rješavanjem sustava dobivamo $a = 0$, $b = -6$, $c = 9$, $d = 1$, $e = 3$, $f = -3$, pa je traženi interpolacijski polinom

$$p(x) = -6x + 9x^2 + x^3 + 3x^4 - 3x^5.$$

□

## 3.9 Po dijelovima kubična interpolacija

Funkciju $f$ aproksimiramo funkcijom $\varphi$ koja je na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ kubični polinom, tj.

$$\varphi\big|_{[x_{i-1},x_i]} = p_i,$$

gdje je svaki polinom $p_i$ stupnja 3 i zapisujemo ga relativno s obzirom na lijevu točku intervala:

$$p_i(x) = c_{0,i} + c_{1,i}(x - x_{i-1}) + c_{2,i}(x - x_{i-1})^2 + c_{3,i}(x - x_{i-1})^3.$$

Za svaki polinom $p_i$ treba odrediti 4 koeficijenta. Uvjeti su sljedeći

$$
\begin{aligned}
p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} \\
p_k(x_k) &= f_k \\
p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1} \\
p_k'(x_k) &= s_k
\end{aligned}
$$

Za sada su $s_{k-1}$ i $s_k$ neki brojevi. Ovisno o tome kako se oni definiraju, dobivamo drugačije metode.
Ako polinome napišemo u Newtonovom obliku, dobijemo

$$p_k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}](x - x_{k-1}) + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k](x - x_{k-1})^2 + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k](x - x_{k-1})^2(x - x$$

Definirajmo $h_k = x_k - x_{k-1}$. Sređivanjem, tako da dobijemo samo potencije od $(x - x_{k-1})$ dobijemo:

$$
\begin{aligned}
p_k(x) = {} & f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}](x - x_{k-1}) + \left(f[x_{k-1}, x_k, x_k] - h_k f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k]\right)(x - x_{k-1})^2 \\
& + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k](x - x_{k-1})^3
\end{aligned}
$$

gdje su

$$
\begin{aligned}
f[x_{k-1}, x_{k-1}] &= s_{k-1} \\
f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} \\
f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}
\end{aligned}
$$

Uspoređivanjem s osnovnim oblik polinoma, dobijemo da su koeficijenti zadani formulama

$$
\begin{aligned}
c_{0,k} &= f_{k-1}\\
c_{1,k} &= s_{k-1}\\
c_{2,k} &= f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k]\\
c_{3,k} &= f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k].
\end{aligned}
$$

Načini biranja $s_k$:

- KUBIČNA HERMITEOVA INTERPOLACIJA: $s_k = f'(x_k)$
- KUBIČNA KVAZIHERMITEOVA INTERPOLACIJA: brojevi $s_k$ su aproksimacije vrijednosti derivacije funkcije $f$.

Jedan načina aproksimacije derivacije je **BESSELOVA APROKSIMACIJA DERIVACIJA**:
povlačimo kvadratni interpolacijski polinom te ga deriviramo. Vrijednosti njegove derivacije u točki $x_k$ će biti $s_k$.
U unutrašnjim čvorovima $x_k$ povlačimo interpolacijski polinom kroz $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$, u čvoru $x_0$ provlačimo kroz $x_0, x_1, x_2$, a u čvoru $x_n$ provlačimo kroz $x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$. Dobijemo

$$
\begin{aligned}
s_0 &= \frac{(2h_1 + h_2) f[x_0, x_1] - h_1 f[x_1, x_2]}{h_1 + h_2}\\
s_n &= \frac{(h_{n-1} + 2h_n) f[x_{n-1}, x_n] - h_n f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{h_{n-1} + h_n}\\
s_k &= \frac{h_{k+1} f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]}{h_k + h_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

**Zadatak 3.16.** *Po dijelovima kubičnom Besselovom kvazihermitskom interpolacijom interpoliramo funkciju $f$ zadanu tablicom:*

| $x_i$ | $-2$ | $-1.5$ | $0.5$ | $1$ | $1.5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 2.5 | 1 | 0 | 1 | 2.5 |

*Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 0.25$.*

*Rješenje.* Kako se točka 0.25 nalazi u intervali $[-1.5, 0.5] = [x_1, x_2]$, trebamo naći $s_1$ i $s_2$. Za $k = 1, 2$, $s_k$-ove računamo po formulama

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{h_2 f[x_0, x_1] + h_1 f[x_1, x_2]}{h_1 + h_2}\\
s_2 &= \frac{h_3 f[x_1, x_2] + h_2 f[x_2, x_3]}{h_2 + h_3}
\end{aligned}
$$

Primijetimo da je $h_1 = x_1 - x_0 = 0.5$, $h_2 = x_2 - x_1 = 2$, $h_3 = x_3 - x_2 = 0.5$. Računamo podijeljene razlike:

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $-2$ | 2.5 | |
| | | $-3$ |
| $-1.5$ | 1 | |
| | | $-0.5$ |
| 0.5 | 0 | |
| | | 2 |
| 1 | 1 | |
| | | 3 |
| 1.5 | 2.5 | |

Uvrštavanjem dobijamo $s_1 = -2.5$ i $s_2 = 1.5$. Napravimo Newtonov oblik IP-a:

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $-1.5$ | 1 | | | |
| | | $-2.5$ | | |
| 1.5 | 1 | | 1 | |
| | | $-0.5$ | | 0 |
| 0.5 | 0 | | 1 | |
| | | 1.5 | | |
| 0.5 | 0 | | | |

pa interpolacijski polinom glasi:

$$p(x) = 1 - 2.5(x + 1.5) + (x + 1.5)^2.$$

$$p(0.25) = -0.3125$$

$\square$

## 3.10 Kubična spline interpolacija

Brojeve $s_0, \dots, s_n$ određujemo iz zahtjeva da $\varphi$ ima neprekidnu drugu derivaciju

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{k-1}) &= f_{k-1} \\
\varphi(x_k) &= f_k \\
p'_k(x_k) &= p'_{k+1}(x_k) \\
p''_k(x_k) &= p''_{k+1}(x_k)
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo sustav jednadžbi u nepoznanicama $s_k$:

$$h_{k+1}s_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})s_k + h_k s_{k+1} = 3(h_{k+1}f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]), \quad k = 1, \dots, n-1$$

Dakle, imamo $n-1$ jednadžbi i $n+1$ nepoznanica. Jedinstvenost rješenja ćemo imati ako su zadani $s_0$ i $s_n$.

**Zadatak 3.17.** *Kubični spline $s$ interpolira funkciju $f(x) = cos x$ na mreži čvorova $x_k = \frac{\pi i}{6}$, $i \in \{-2, -1, 1, 2\}$, $k = 0, 1, 2, 3$ i zadovoljava rubne uvjete*

$$\begin{aligned}
s'\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
s'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f'\left(\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

*Izračunajte vrijednosti splinea, njegove prve i druge derivacije u točki* 0 *i nađite pripadne pogreške.*

*Rješenje.*

$$
\begin{aligned}
s_0 &= f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
s_3 &= f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Preostale $s_1$, $s_2$ dobijemo iz sustava. Moramo izračunati podijeljene razlike

$$
\begin{array}{c|cc}
x_i \setminus k & 0 & 1 \\
\hline
-\frac{\pi}{3} & \frac{1}{2} & \\
 & & \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi} \\
-\frac{\pi}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \\
 & & 0 \\
\frac{\pi}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \\
 & & -\frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi} \\
\frac{\pi}{3} & \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

Uočimo još da je $h_1 = h_3 = \frac{\pi}{6}$ i $h_2 = \frac{\pi}{3}$. Dobijemo sustav

$$
\begin{aligned}
h_2 s_0 + 2(h_1 + h_2)s_1 + h_1 s_2 &= 3(h_2 f[x_0, x_1] + h_1 f[x_1, x_2]) \\
h_3 s_1 + 2(h_2 + h_3)s_2 + h_2 s_3 &= 3(h_3 f[x_1, x_2] + h_2 f[x_2, x_3])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} s_1 + \frac{\pi}{6} s_2 &= 3 \cdot \left( \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\pi} + \frac{\pi}{6} \cdot 0 \right) \\
\frac{\pi}{6} s_1 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} s_2 + \frac{\pi}{3} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= 3 \cdot \left( \frac{\pi}{6} \cdot 0 + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{-3(\sqrt{3}-1)}{\pi} \right)
\end{aligned}
$$

Rješavanjem dobijemo:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 0.4924582717 \\
s_2 &= -0.4924582717
\end{aligned}
$$

Radimo Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_i \setminus k & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
-\frac{\pi}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & & & \\
 & & s_1 & & \\
-\frac{\pi}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & & -0.4702630093 & \\
 & & 0 & & 0 \\
\frac{\pi}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & & -0.4702630093 & \\
 & & s_2 & & \\
\frac{\pi}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & & &
\end{array}
$$

$$
p_3(x) = 0.8660254038 + 0.4924582717 \left( x + \frac{\pi}{6} \right) - 0.4702630093 \left( x + \frac{\pi}{6} \right)^2
$$

Dobivamo tablicu

| $j$ | $f^{(j)}(0)$ | $p_3^{(j)}(0)$ | greška |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0.9949506778 | 0.0050493222 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | $-1$ | $-0.9405260186$ | $-0.0594739814$ |

□

# 4 Metoda najmanjih kvadrata

## 4.1 Diskretna metoda najmanjih kvadrata

Zadane su točke $(x_k, f_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ koje želimo aproksimirati nekom funkcijom $\varphi$ oblika

$$\varphi = \varphi\left(x, a_0, \ldots, a_m\right), \quad m << n$$

koja ovisi o koeficijentima $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$ koje treba izračunati.
Ako je $\varphi$ linearna u $a_0 \ldots, a_m$, tj. oblika

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)$$

minimiziramo funkciju $S$:

$$S = S\left(a_0, a_1, \ldots, a_m\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(f_k - \varphi(x_k)\right)^2,$$

tj. tražimo da 2-norma vektora pogrešaka u čvorovima aproksimacije bude najmanja moguća.
Nužan uvjet egzistencije ekstrema je

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Ovaj sustav zovemo *sustav normalnih jednadžbi.*
Iz prirode problema se vidi da će stacionarna točka biti baš točka minimuma za funkciju $S$.

**Zadatak 4.1.** *Izmjereni su sljedeći podaci:*

| $x_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_k$ | 3.8 | 3.7 | 4.0 | 3.9 | 4.3 |

*Nađite aproksimaciju pravcem metodom najmanjih kvadrata za taj skup podataka.*

*Rješenje.* Tražimo funkciju $\varphi$ oblika

$$\varphi(x) = ax + b.$$

Treba minimizirati funkciju

$$S = \sum_{k=0}^{4} \left(f_k - \varphi(x_k)\right)^2 = \sum_{k=0}^{4} \left(f_k - ax_k - b\right)^2.$$

Tražimo stacionarne točke od $S$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a} &= -2\sum_{k=0}^{4} \left(f_k - ax_k - b\right) x_k = 0 \\
\frac{\partial S}{\partial b} &= -2\sum_{k=0}^{4} \left(f_k - ax_k - b\right) \qquad = 0
\end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo sustav $2 \times 2$:

$$\begin{aligned} a\sum_{k=0}^{4} x_k^2 + b\sum_{k=0}^{4} x_k &= \sum_{k=0}^{4} f_k x_k \\ a\sum_{k=0}^{4} x_k + 5b &= \sum_{k=0}^{4} f_k \end{aligned}$$

Napravimo tablicu koeficijenata za sustav:

| $x_k$ | $f_k$ | $x_k^2$ | $x_k f_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 3.8 | 0 | 0.0 |
| 1 | 3.7 | 1 | 3.7 |
| 2 | 4.0 | 4 | 8.0 |
| 3 | 3.9 | 9 | 11.7 |
| 4 | 4.3 | 16 | 17.2 |
| $\sum$: 10 | 19.7 | 30 | 40.6 |

Sustav sada glasi:

$$\begin{aligned} 30a + 10b &= 40.6 \\ 10a + 5b &= 19.7. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo:

$$a = 0.12, \quad b = 3.7,$$

pa tražena aproksimacijska funkcija $\varphi$ glasi:

$$\varphi(x) = 0.12x + 3.7.$$

□

**Zadatak 4.2.** *Odredite funkciju oblika $\varphi(x) = be^{ax}$ koja aproksimira podatke*

| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f_k$ | 7 | 11 | 17 | 27 |

*metodom najmanjih kvadrata.*

*Rješenje.* Kako funkcija $\varphi$ nije linearna (u koeficijentu $a$), treba je linearizirati. U ovom slučaju imamo:

$$\psi(x) = \ln \varphi(x) = \ln (be^{ax}) = \ln b + ax.$$

Uvedimo oznake:

$$A = a, \quad B = \ln b.$$

Dakle linearizirana funkcija je $\psi(x) = Ax + B$. Definirati ćemo još $h_k = \ln f_k$. Sada imamo novu tablicu podataka:

| $x_k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $h_k$ | $\ln 7 = 1.94591$ | $\ln 11 = 2.397895$ | $\ln 17 = 2.83321$ | $\ln 27 = 3.29584$ |

Minimiziramo funkciju

$$S = S(A,B) = \sum_{k=0}^{3} (h_k - \psi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^{3} (h_k - Ax_k - B)^2 .$$

Uvjeti za minimum daju:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A} &= -2\sum_{k=0}^{3} (h_k - Ax_k - B)\, x_k = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2\sum_{k=0}^{3} (h_k - Ax_k - B) \quad\;\; = 0 \end{aligned}$$

tj., sređivanjem dobivamo sustav

$$\begin{aligned} A\sum_{k=0}^{3} x_k^2 + B\sum_{k=0}^{3} x_k &= \sum_{k=0}^{3} h_k x_k \\ A\sum_{k=0}^{3} x_k + 4B \qquad &= \sum_{k=0}^{3} h_k \end{aligned}$$

Izračunajmo koeficijente sustava:

| $x_k$ | $h_k$ | $x_k^2$ | $x_k h_k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.94591 | 1 | 1.94591 |
| 2 | 2.39795 | 4 | 4.7959 |
| 3 | 2.83321 | 9 | 8.49963 |
| 4 | 3.29584 | 16 | 13.18336 |
| $\sum$ : 10 | 10.47291 | 30 | 28.4248 |

Sustav sada glasi:

$$\begin{aligned} 30A + 10B &= 28.4248 \\ 10A + 4B &= 10.47291 \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo:

$$A = 0.448505, \quad B = 1.496965.$$

Vraćamo zamijenu:

$$a = A = 0.0.448505, \quad b = e^B = 4.46812.$$

Pa funkcija $\varphi$ glasi:

$$\varphi(x) = 4.46812e^{0.448505}.$$

□

**Zadatak 4.3.** *Zadan je skup točaka* $(x_k, f_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. *Taj skup točaka treba aproksimirati funkcijom oblika*

$$\varphi(x) = (a \sin x + b)^2,$$

*metodom najmanjih kvadrata.*

*Rješenje.* Linearizacija je:

$$\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)} = a \sin x + b, \quad h_k = \sqrt{f_k}.$$

Minimiziramo funkciju:

$$S = \sum_{k=0}^{n} (h_k - \psi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^{n} (h_k - a \sin x_k - b)^2.$$

Uvjeti ekstrema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= -2 \sum_{k=0}^{n} (h_k - a \sin x_k - b) \sin x_k = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= -2 \sum_{k=0}^{n} (h_k - a \sin x_k - b) \qquad\quad = 0 \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} a \sum_{k=0}^{n} \sin^2 x_k + b \sum_{k=0}^{n} x_k &= \sum_{k=0}^{n} h_k \sin x_k \\ a \sum_{k=0}^{n} \sin x_k + (n+1)b &= \sum_{k=0}^{n} h_k \end{aligned}$$

□

**Zadatak 4.4.** *Zadan je skup točaka* $(x_k, f_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. *Metodom najmanjih kvadrata nađite pravac kroz točku* $(0, 1)$ *i aproksimirajte zadane podatke.*

*Rješenje.* Aproksimacijska funkcija glasi:

$$\varphi(x) = ax + b.$$

Iz $\varphi(0) = 1$ imamo $b = 1$, pa funkcija je oblika:

$$\varphi(x) = ax + 1.$$

Minimiziramo:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left(f_k - \varphi(x_k)\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(f_k - ax_k - 1\right)^2 .$$

Uvjet minimuma je:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{k=0}^{n} \left(f_k - ax_k - 1\right) x_k = 0.$$

Nakon sređivanja imamo:

$$a \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (f_k - 1) x_k.$$

Dakle:

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{n} (f_k - 1) x_k}{\sum_{k=0}^{n} x_k^2},$$

Pa je tražena funkcija

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} (f_k - 1) x_k}{\sum_{k=0}^{n} x_k^2} x + 1.$$

□

## 4.2 NEPREKIDNA METODA NAJMANJIH KVADRATA

Želimo aproksimirati funkciju na neprekidnom području. Minimiziramo normu greške.

**Definicija 4.1.** *Za funkciju $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***TEŽINSKA*** *na $[a, b]$ ako vrijedi:*

*1) $\omega(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$,*

*2) $\omega(x) = 0$ samo u izoliranim točkama, tj. točkama $x_0$ takvim da postoji $\varepsilon > 0$ za koji je $x_0$ jedina nultočka od $\omega$ na $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle \cap [a, b]$.*

**Definicija 4.2.** ***TEŽINSKA*** *$L_2$-**NORMA** funkcije $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ je*

$$\|u\|_2 = \left( \int_a^b \omega(x)|u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Ako je ta norma konačna za funkcije $u$ i $v$, možemo definirati i* ***SKALARNI PRODUKT*** *funkcija $u$ i $v$:*

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b \omega(x)u(x)v(x)dx.$$

Pretpostavimo da je funkcija $\varphi$ linearna u koeficijentima $a_0, \ldots, a_m$, tj.

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x).$$

Definiramo:

$$S = \|f - \varphi\|_2^2 = \langle f, f\rangle - 2\langle f, \varphi\rangle + \langle \varphi, \varphi\rangle.$$

Iz uvjeta $\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0$ imamo sustav:

$$\sum_{k=0}^{m} \langle \varphi_i, \varphi_k\rangle a_k = \langle \varphi_i, f\rangle, \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Matrica koeficijenata je simetrična i pozitivno definitna, pa imamo jedinstveno rješenje. Kada bi familija $\{\varphi_i | i = 0, 1, \ldots, m\}$ bila ortogonalna, tj. $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = 0$, za $i \neq j$, matrica sustava bi bila dijagonalna pa bi tad rješenje bilo lako izračunati:

$$a_j = \frac{\langle \varphi_j, f\rangle}{\langle \varphi_j, \varphi_j\rangle}, \quad j = 0, 1, \ldots, m.$$

Zbog numeričke stabilnosti, $a_j$ se računaju po formuli:

$$a_j = \frac{1}{\|\varphi_j\|_2^2} \langle f - \sum_{k=0}^{j-1} a_k\varphi_k, \varphi_j\rangle.$$

Ako imamo linearno nezavisan skup funkcija $\hat{\varphi}_j$ koje nisu ortogonalne, možemo ga ortogonalizirati koristeći Gram - Schmidtov postupak ortogonalizacije (ne moramo normirati funkcije):

$$\varphi_0 = \hat{\varphi}_0$$

$$\varphi_j = \hat{\varphi}_j - \sum_{k=0}^{j-1} a_k\varphi_k, \quad a_k = \frac{\langle \hat{\varphi}_j, \varphi_k\rangle}{\|\varphi_k\|_2^2}.$$

**Zadatak 4.5.** *Korištenjem ortogonalizirane baze za bazu polinoma* $\{1, x, x^2\}$ *aproksimirajte funkciju*

$$f(x) = xe^{2x}$$

*na intervalu* $[0, 1]$. *Za težinsku funkciju uzmite* $\omega(x) = 1$.

*Rješenje.* Prvo moramo ortogonalizirati bazu:

$$\hat{\varphi}_0(x) = 1, \quad \hat{\varphi}_1(x) = x, \quad \hat{\varphi}_2(x) = x^2,$$

Gram-Schmitovim postupkom ortogonalizacije.

$$\varphi_0 = \hat{\varphi}_0 = 1,$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \hat{\varphi}_1 - a_0\varphi_0, \\
a_0 &= \frac{\langle \hat{\varphi}_1, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}, \\
\langle \hat{\varphi}_1, \varphi_0 \rangle &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\
\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle &= \int_0^1 1 dx = 1 \\
a_0 &= \frac{\frac{1}{2}}{1} \\
\varphi_1 &= \hat{\varphi}_1 - a_0\varphi_0 = x - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \hat{\varphi}_2 - b_1\varphi_1 - b_0\varphi_0, \\
b_1 &= \frac{\langle \hat{\varphi}_2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}, \\
b_0 &= \frac{\langle \hat{\varphi}_2, \varphi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle}, \\
\langle \hat{\varphi}_2, \varphi_0 \rangle &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\
\langle \hat{\varphi}_2, \varphi_1 \rangle &= \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{12} \\
\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12} \\
b_0 &= \frac{1}{3} \\
b_1 &= 1 \\
\varphi_2 &= x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = x^2 - x + \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\langle \varphi_0, f \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{\int_0^1 xe^{2x} dx}{1} = \frac{e^2 + 1}{4} \\
a_1 &= \frac{\langle \varphi_1, f \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} = \frac{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) xe^{2x} dx}{\frac{1}{12}} = \frac{12(e^2 - 3)}{8} \\
a_2 &= \frac{\langle \varphi_2, f \rangle}{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle} = \frac{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) xe^{2x} dx}{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx} = \frac{\frac{8-e^2}{12}}{\frac{1}{180}} = 15(8 - e^2)
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\varphi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2,$$

tj. u ortogonalnoj bazi je

$$\varphi(x) = 15(8-e^2)(x^2 - x + \frac{1}{6}) + \frac{3(e^2-3)}{2}(x - \frac{1}{2}) + \frac{e^2+1}{4},$$

odnosno u standardnoj bazi

$$\varphi(x) = 15(8-e^2)x^2 + \frac{3(53e^2-9)}{166}x + \frac{535-98e^2}{166}.$$

$\square$

# 5 Numerička integracija

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabila funkcija. Ako znamo njenu primitivnu funkciju, tj. funkciju $F$ takvu da je $F' = f$, možemo izračunati:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

No što ako ne znamo primitivnu funkciju?

## 5.1 Newton-Cotesove formule

Umjesto integracije funkcije $f$, integriramo polinomnu aproksimaciju te funkcije u ekvidistantnim točkama.
Neka je $p_1$ linearni polinom koji interpolira funkciju $f$ u točkama $a$ i $b$. Ako integral od $f$ po $[a,b]$ zamijenimo s integralom od $p_1$ po $[a,b]$ dobivamo:

1. **TRAPEZNU FORMULU**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = I_T.$$

Ponovimo isti postupak, ali sada za polinom stupnja 2. Funkciju $f$ interpoliramo polinomom $p_2$ stupnja $\leq 2$ na ekvidistantnoj mreži s čvorovima $a$, $a+h$, $b$ $\left(h = \frac{b-a}{2}\right)$ dobijemo

2. **SIMPSONOVU FORMULU**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = T_S.$$

Pogreške su sljedeće:

1. Za trapeznu formulu:

$$R_T = |\int_a^b f(x)dx - I_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12}M_2 f.$$

2. Za Simpsonovu formulu:

$$R_S = |\int_a^b f(x)dx - I_S| \leq \frac{(b-a)^5}{2880}M_4 f.$$

Ako nam ocjene nisu dovoljno dobre, možemo:

- povećavati stupanj interpolacijskog polinoma ili
- smanjivati područje integracije.

1. **PRODULJENA TRAPEZNA FORMULA** - pretpostavimo da smo $[a, b]$ podijelili na $n$ jednako širokih podsegmenata $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$. Tada produljena trapezna formula glasi:
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right) = I_{PT},$$
a ocjena greške:
$$R_{PT} = |\int_a^b f(x)dx - I_{PT}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 f.$$

2. **PRODULJENA SIMPSONOVA FORMULA** - podijelimo segment $[a, b]$ na $m$ manjih podsegmenata $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i = 1, \ldots, m$. Točke $x_i$ definirane su sa $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $n = 2m$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2m$. Tada produljena trapezna formula glasi:
$$I_{PS} = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right),$$
a ocjena pogreške:
$$R_{PS} = |\int_a^b f(x)dx - I_{PS}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 f.$$

**Primjer 5.1.** *Koliko je minimalni broj čvorova potreban da bi greška prilikom numeričke integracije bila manja od $\varepsilon$ ako koristimo:*

1. *produljenu trapeznu formulu,*
2. *produljenu Simpsonovu formulu.*

*Rješenje.* 1. Želimo:
$$R_{PT} \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 f \leq \varepsilon.$$
Uvrstimo da je $h = \frac{b-a}{n}$ $\Longrightarrow$
$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 f \leq \varepsilon.$$
Rješavanjem po $n$ dobijemo:
$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2 f}.$$

2. Sasvim analogno za produljenu Simpsonovu formulu dobijemo:
$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} M_4 f}.$$

Kod PS formule, biramo paran $n$ (interpolacijski polinom je stupnja 2).

□

**Zadatak 5.1.** *Izračunajte vrijednost integrala*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

*a) produljenom trapeznom formulom,*

*b) produljenom Simpsonovom formulom*

*uz $h = 0.1$. Ocijenite pogrešku i nađite pravu grešku. Nađite najmanji $h$ tako da pogreška integracije ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$.*

*Rješenje.* Kako je $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} = 0.1$ zaključujemo da je $n = 10$. Napravimo tablicu čvorova i vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x}$:

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0.1 | 0.90909 |
| 2 | 0.2 | 0.83333 |
| 3 | 0.3 | 0.76923 |
| 4 | 0.4 | 0.71429 |
| 5 | 0.5 | 0.66667 |
| 6 | 0.6 | 0.625 |
| 7 | 0.7 | 0.58824 |
| 8 | 0.8 | 0.55556 |
| 9 | 0.9 | 0.52632 |
| 10 | 1 | 0.5 |

a)

$$I_{PT} = \frac{0.1}{2}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_9)\right) + f(x_{10})\right) = 0.693773.$$

Za pogrešku nam je potreban maksimum apsolutne vrijednosti druge derivacije:

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

To je strogo padajuća funkcija pa je

$$M_2 f = f''(0) = 2,$$

pa za grešku integracije vrijedi:

$$R_{PT} \leq 0.001667.$$

Kako je

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 = 0.69315,$$

prava pogreška iznosi

$$R_{PT} = |0.693773 - 0.69315| = 0.00062.$$

Broj intervala $n$ da bi pogreška interpolacije bila manja od $10^{-4}$ je

$$n \leq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M_2 f} = \sqrt{\frac{1}{12 \cdot 10^{-4}} \cdot 2} = 40.82$$

pa možemo uzeti $n = 41$.

b)

$$I_{PS} = \frac{0.1}{3} \left( f(x_0) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7) + f(x_9)\right) \right.$$
$$\left. +2\left(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)\right) + f(x_{10}) \right) = 0.69315.$$

Prava pogreška je

$$R_{PS} = 3.0505 \cdot 10^{-6}$$

Za ocjenu pogreške nam treba maksimum apsolutne vrijednosti četvrte derivacije:

$$f^{IV}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}.$$

Ovo je strogo padajuća funkcija pa je $M_4 f = f^{(IV)}(0) = 24$, pa je ocjena pogreške

$$R_{PS} \leq 1.3333 \cdot 10^{-5}.$$

Broj čvorova $n$ tako da ocjena pogreške bude manja od $\varepsilon = 10^{-4}$ je

$$n \geq 6.042,$$

pa uzimamo $n = 8$.

□

**Zadatak 5.2.** *Nađite broj čvorova potreban da izračunamo integral*

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

*s točnošću* $\varepsilon = 0.0005$, *ako koristimo:*

*a) produljenu trapeznu formulu,*

*b) produljenu Simpsonovu formulu.*

*Rješenje.* a) trebamo ocijeniti apsolutnu vrijednost druge derivacije funkcije

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Druga derivacija glasi

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}\left(\left(2-x^2\right)\sin x - 2x\cos x\right).$$

Ocjenjujemo:

$$\begin{aligned}
|f''(x)| &= \frac{1}{|x^3|}\left|\left(2-x^2\right)\sin x - 2x\cos x\right| \le \frac{1}{|x^3|}\left(\left|\left(2-x^2\right)\sin x\right| + |2x\cos x|\right) \\
&= \frac{1}{x^3}\left(|2-x^2|\sin x + 2x\cos x\right) \qquad \underbrace{\le}_{\sin x \le 1,\ \frac{1}{x^3}\ \textit{pada},\ |2-x^2|\ \textit{nađem maksimum}} \\
&\le \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}\left(1\cdot\left(2-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) + 2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right) \\
&\le 7.44023
\end{aligned}$$

Dakle, traženi $n$ je

$$n \ge \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{12\cdot 0.0005}\cdot 7.44023} = 24.511$$

pa možemo uzeti $n = 25$.

b) trebamo ocijeniti apsolutnu vrijednost četvrte derivacije. Četvrta derivacije je

$$f^{(IV)}(x) = \frac{1}{x^5}\left(\sin x\,\overbrace{\left(x^4-12x^2+24\right)}^{g_1(x)} + \cos x\,\overbrace{\left(4x^3-24x\right)}^{g_2(x)}\right)$$

Promatrajmo posebno funkcije $g_1$ i $g_2$.
$g_1'(x) = 4x\left(x^2-6\right)$, što znači da se stacionarne točke ne nalaze u intervalu integracije, zaljučujemo da se maksimum postiže u lijevom rubu segmenta
$g_2'(x) = 12\left(x^2-2\right)$, stacionarne točke su $\pm\sqrt{2}$, lako provjerimo da je u $\sqrt{2}$ maksimum funkcije $|g_2(x)|$.
Prema tome,

$$|f^{(IV)}(x)| \le \frac{1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}\left(\sin\frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 - 12\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 24\right) + \cos\frac{\pi}{4}|4\cdot\sqrt{2}^3 - 24\sqrt{2}|\right) = 110.352.$$

Dakle

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{180\cdot 0.0005}\cdot 110.352} = 4.375$$

Kako $n$ mora biti paran, uzimamo $n = 6$.

□

## 5.2 Gaussova integracija

Želimo veći stupanj egzaktnosti. Za razliku od Newton-Cotesovih formula, čvorovi integracije nisu unaprijed zadani, nego ih određujemo tako da integracijska formula bude egzaktna na polinomima što višeg stupnja. Općenito, želimo integracijske formule oblika

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n}f(x_{j,n}) + R_n(f).$$

**Primjer 5.2.** *Neka je zadan interval $I = [-1,1]$, te neka je zadana težinska funkcija $w(x) = 1$. Tražimo funkciju sljedećeg oblika:*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1f(x_1) + w_2f(x_2) + R_2(f).$$

*Vrijednosti težina i čvorova integracije biramo tako da formula bude egzaktna na polinomima što je moguće višeg stupnja.*

*Rješenje.* Tražena formula ima 4 nepoznata parametra: $w_1, w_2, x_1, x_2$ pa nam trebaju barem 4 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti.
Uzimamo redom polinome $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_1(x) = x^2$ i $p_2(x) = x^3$ i uvrštavamo u integracijsku formulu:

$$\int_{-1}^{1} 1dx = 2 = w_1 + w_2$$
$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = w_1x_1 + w_2x_2$$
$$\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = w_1x_1^2 + w_2x_2^2$$
$$\int_{-1}^{1} x^3dx = 0 = w_1x_1^3 + w_2x_2^3$$

Mogli smo uzeti i neku drugu bazu polinoma, ako nam je s njom lakše računati.
Problem je što je sustav nelinearan, ali se svejedno može riješiti.
Iz druge jednadžbe je $w_1x_1 = -w_2x_2$. Kada to uvrstimo u četvrtu jednadžbu dobijemo:

$$-w_2x_2x_1^2 + w_2x_2^3 = 0 \implies w_2x_2(x_2^2 - x_1^2) = 0.$$

Ni $w_2$ ni $x_2$ ne mogu biti jednake 0, jer dobijemo kontradikciju u sustavu (uvrstite!). Prema tome, mora biti $x_1^2 = x_2^2$. Sada ponovno slijedi da je $x_1 = -x_2$ jer bi inače $w_1$ i $w_2$ bile različitog predznaka, a to nije dozvoljeno (na predavanjima se radi teorem koji kaže da su težine u Gaussovim formulama pozitivne). Kako je $x_1 = -x_2$ dobijemo da je $w_1 = w_2 = 1$ i $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ i $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pa integracijska formula glasi:

$$\int_{-1}^{1} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + R_2(f).$$

Možemo provjeriti još je li egzaktno integrira polinom stupnja 4. Kada se uvrsti, vidimo da nije ☐

Drugi način za određivanje težina i čvorova integracije:
Definiramo skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx.$$

Odredimo polinome $\varphi$ koji su ortogonalni s obzirom na definirani skalarni produkt, tj.

$$\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{za } i \neq j \\ \|\varphi_i\|^2 & \text{za } i = j \end{cases}$$

Ortogonalizaciju provodimo Gram-Schmidtovim postupokom:

- zadan je skup $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$
- $\varphi_0(x) = 1$
- $\varphi_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \langle x^k, \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}\rangle \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Neka je $\varphi_n(x) = A_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ i neka su njene nultočke $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$. (Za ortogonalne funkcije na $[a, b]$ se dokaže da imaju različite realne nultočke unutar intervala $[a, b]$).

**Teorem 5.1.** *Za svaki $n \geq 1$ postoji jedinstvena integracijska formula*

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n}) + R_n(f),$$

*reda $2n - 1$ (tj. točna na polinomima stupnja $2n - 1$). Ako je $f \in C^{2n}([a, b])$ tada je*

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j) + \frac{\|\varphi_n\|^2}{A_n^2 (2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

*za neki $\xi \in (a, b)$. Čvorovi $x_i$ su nultočke polinoma $\varphi_n(x)$, dok su težine $w_i$ dane sa*

$$w_k = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{\|\varphi_{n-1}\|^2}{\varphi_{n-1}(x_k) \cdot \varphi_n'(x_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

(S velikim $A_i$ označavamo vodeći koeficijent polinoma $\varphi_i$.)

**Zadatak 5.3.** *Gramm-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije nađite ortogonalne polinome na $[-1, 1]$ sa težinskom funkcijom $w(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Nadalje, odredite težine i čvorove integracijske formule tako da ona bude egzaktna na polinomima stupnja manjeg ili jednakog 3.*

*Rješenje.* Kako je stupanj egzaktnosti $2n - 1 = 3$, slijedi da je $n = 2$. Tražimo parametre u integracijskoj formuli

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + R_2(f).$$

Provodimo G-S postupak:

- $\boxed{\varphi_0(x) = 1}$

- $$\|\varphi_0(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\cdot 1^2 dx = \begin{bmatrix} x=\sin t \\ dx = \cos t dt \\ -1 \to -\frac{\pi}{2},\;\; 1\to \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt$$
$$= \left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_1(x) = x - \langle x, \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}\rangle \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|} = x - \frac{1}{\|\varphi_0\|^2} \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\cdot x \cdot 1 dx}_{=0 \text{ (neparna funkcija na simetričnom intervalu)}} .$$

$\implies \boxed{\varphi_1(x) = x}$

- $$\|\varphi_1\|^2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}x^2 dx = \begin{bmatrix} x=\sin t \\ dx = \cos t dt \\ 1 \to \frac{\pi}{2} \quad -1\to -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t \cos t dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\frac{1+\cos 2t}{2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 2t}{4} dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2t}{4} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{8} dt = \frac{\pi}{8}.$$

$$\varphi_2 = x^2 - \langle x^2, \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}\rangle \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|} - \langle x^2, \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}\rangle \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$$
$$= x^2 - \frac{1}{\|\varphi_0\|^2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}x^2 \cdot 1 dx - \frac{1}{\|\varphi_1\|^2} \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}x^2 \cdot x dx\right)}_{=0} x$$
$$= x^2 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{8} - 0$$

$\implies \boxed{\varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}}$

Čvorove integracije nalazimo kao nultočke polinoma $\varphi_2$. Dakle, čvorovi integracije su:

$$\boxed{x_1 = -\tfrac{1}{2}} \text{ i } \boxed{x_2 = \tfrac{1}{2}}$$

Za odrediti težine trebaju nam $A_2$ i $A_1$. Kako je

$$A_2 = A_1 = 1,$$

imamo

$$w_k = \frac{1}{1}\frac{\frac{\pi}{8}}{x_k \cdot 2x_k} = \frac{\pi}{16x_k^2}.$$

Slijedi

$$w_1 = \frac{\pi}{16\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{4},$$
$$w_2 = \frac{\pi}{16\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Pogreška $R_2(f)$ je dana sa

$$R_2(f) = \frac{\|\varphi_2\|^2}{A_2^2(2\cdot 2)!} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in \langle -1, 1\rangle.$$

Kako je $\|\varphi_2\|^2 = \frac{\pi}{32}$ (DZ) slijedi:

$$R_2(f) = \frac{\frac{\pi}{32}}{16} f^{(4)}(\xi) = \frac{\pi}{768} f^{(4)}(\xi).$$

Konačno:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x)dx = \frac{\pi}{4} f\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{768} f^{(4)}(\xi).$$

□

**Zadatak 5.4** (DZ)**.** *Istim postupkom kao u prethodnom zadatku nađite točke i čvorove uz težinsku funkciju* $w(x) = 1$*na intervalu* $[-1, 1]$.

Za neke težinske funkcija i odgovarajuće intervale su poznati ortogonalni polinomi:

| Ime | Težinska funkcija | Interval |
|---|---|---|
| Legendreovi | $w(x) = 1$ | $[-1, 1]$ |
| Čebiševljevi | $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $[-1, 1]$ |
| Laguerrovi | $w(x) = e^{-x}$ | $[0, \infty\rangle$ |

Težine i nultočke odgovarajućih ortogonalnih polinoma su unaprijed tabelirane i njih možemo koristiti.
Ako koristimo Legendrove polinome onda govorimo o Gauss-Legendrovoj integracijskoj formuli itd.
Za Gauss-Legendrovu integracijsku formulu znamo i ocjenu greške

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \frac{f^{(2n)(\xi)}}{(2n)!}.$$

Sljedeći zadatak govori kako sa intervala $[-1, 1]$ prelazimo na općeniti interval $[a, b]$.

**Zadatak 5.5.** *Opišite postupak računanja integrala*

$$\int_a^b f(x)dx$$

*korištenjem Gauss-Legendrove integracijske formule.*

*Rješenje.* Neka je

$$g(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

bijekcija koja preslikava $[-1,1]$ na $[a,b]$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \begin{bmatrix} x = g(t) \\ \\ dx = g'(t)dt = \frac{b-a}{2}dt \end{bmatrix} \\
&= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(g(t))dt \\
&= \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(g(t_i)) + \frac{b-a}{2}R_n(f\circ g).
\end{aligned}$$

Općenito je

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{2}R_n(f\circ g) &= \frac{b-a}{2}\frac{\|\varphi_n\|^2}{A_n^2(2n!)}(f\circ g)^{(2n)}(\xi) \\
&= \frac{\|\varphi_n\|^2}{A_n^2(2n!)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} f^{(2n)}(g(\xi))
\end{aligned}$$

što u slučaju Gauss-Legendrove integracijske formule prelazi u

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{2}R_n(f\circ g) &= \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} f^{(2n)}(g(\xi)) \\
&= \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}(b-a)^{2n+1} f^{(2n)}(g(\xi)) \\
&\leq \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}(b-a)^{2n+1} M_{2n} f
\end{aligned}$$

□

**Zadatak 5.6.** *Izvedite produljenu formulu za Gauss-Legendrovu integracijsku formulu na intervalu* $[a,b]$.

*Rješenje.* Tražimo integral funkcije f na intervalu $[a,b]$. Interval $[a,b]$ podijelimo na $k$ jednakih dijelova $[x_{i-1}, x_i]$, $x_i = a + i\cdot h$, $h = \frac{b-a}{h}$, i na svakom od njih integriramo $f$ koristeći integracijsku formulu. Definiramo funkcije

$$g_i(t) = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}t + \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = \frac{h}{2}t + \frac{x_{i-1}+x_i}{2}, \quad i = 1,\ldots,k$$

Vrijedi

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} w_j f(g_i(t_j)) + \frac{h}{2}R_n^i(f),$$

pa je

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{k}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\
&= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} w_j f(g_i(t_j)) + \sum_{i=1}^{k}\frac{h}{2}R_n^i(f)
\end{aligned}$$

Specijalno, za Gauss-Legendrovu formulu imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \frac{h}{2} R_n^i(f) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} h^{2n+1} f^{(2n)}(\xi_i) \\
&= \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} h^{2n+1} \sum_{i=1}^{k} f^{(2n)}(\xi) \\
&\leq \frac{(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} h^{2n}(b-a) M_{2n}(f)
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili da je $hk = b - a$. $\square$

## 5.3 Metoda neodređenih koeficijenata

Što ako znamo vrijednosti funkcije $f$, koju želimo integrirati, u samo konačno mnogo točaka?

**Primjer 5.3.** *Naći integracijsku formulu za funkciju $f$ na intervalu $[a, b]$ ako imamo zadane vrijednosti $f(a)$, $f(b)$ i $f'(a)$.*

*Rješenje.* Integracijska formula će biti oblika:

$$\int_a^b f(x)dx = w_1 f(a) + w_2 f(b) + w_3 f'(a) + R_2(f).$$

Težine $w_i$ pronalazimo iz zahtjeva da gornja integracijska formula bude egzaktna na polinomima što višeg stupnja.
Uvrštavamo redom 1, $x$, $x^2$:

$$\int_a^b 1dx = b - a = w_1 + w_2$$
$$\int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2} = aw_1 + bw_2 + w_3$$
$$\int_a^b x^2dx = \frac{b^3 - a^3}{3} = a^2w_1 + b^2w_2 + 2aw_3.$$

Ako označimo $h = b - a$ imamo sustav

$$w_1 + w_2 = h \implies w_1 = h - w_2$$
$$hw_2 + w_3 = \frac{h}{2}(b + a) - ah = \frac{h^2}{2}$$
$$h(b + a)w_2 + 2aw_3 = \frac{h}{3}\left(b^2 + ab - 2a^3\right)$$

Rješavanjem sustava dobivamo:

$$w_1 = \frac{2h}{3}$$
$$w_2 = \frac{h}{3}$$
$$w_3 = \frac{h^2}{6}$$

pa integracijska formula glasi

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{3}f(a) + \frac{h}{3}f(b) + \frac{h^2}{6}f'(a) + R_2(f).$$

Ocijenimo pogrešku $R_2(f)$.
Ako je $F'(x) = f(x)$, tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Promatramo grešku

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}\left(2f(a) + f(b)\right) - \frac{h^2}{6}f'(a)$$

i desnu stranu razvijemo u Taylorov red oko točke $a$. Pri tome koristimo $F'(x) = f(x)$ i $F''(x) = f'(x)$ itd..

$$\begin{aligned} F(b) &= F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2}F''(a) + \frac{h^3}{6}F'''(a) + \frac{h^4}{24}F^{(4)}(\xi_1), \;\; \xi_1 \in \langle a, b\rangle \\ &= F(a) + hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{6}f''(a) + \frac{h^4}{24}f'''(\xi_1) \end{aligned}$$

$$f(b) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2), \;\; \xi_1 \in \langle a, b\rangle.$$

Kada sve uvrstimo u izraz za grešku, dobijemo:

$$\begin{aligned} R_2(f) = &\left(F(a) + hf(a) + \frac{h^2}{2}f'(a) + \frac{h^3}{6}f''(a) + \frac{h^4}{24}f'''(\xi_1)\right) - F(a) \\ &- \frac{2h}{3}f(a) - \frac{h^2}{6}f'(a) - \frac{h}{3}\left(f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2)\right) \\ &= \frac{h^4}{24}f'''(\xi_1) - \frac{h^4}{18}f'''(\xi_2) \end{aligned}$$

pa je

$$|R_2(f)| = |\frac{h^4}{24}f'''(\xi_1) - \frac{h^4}{18}f'''(\xi_2)| \le h^4\left(\frac{|f'''(\xi_1)|}{24} + \frac{|f'''(\xi_2)|}{18}\right) \le \frac{7}{72}h^4 M_3 f$$

□

**Zadatak 5.7** (DZ)**.** *Odredite integracijsku formulu oblika*

$$\int_a^b f(x)dx = w_1 f(a) + w_2 f(b) + w_3 f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_2(f).$$

*Nađite izraz za ocjenu pogreške i pomoću te integracijske formule izračunajte integral*

$$\int_1^2 2\ln x dx.$$

# 6 RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

Zadana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$. Želimo odrediti $f^{-1}(0) = \{x \in I : f(x) = 0\}$.
Dodatne pretpostavke na $f$:

a) barem neprekidna,

b) ima samo izolirane nultočke.

## 6.1 Metoda raspolavljanja (bisekcije)

Početne pretpostavke na $f$:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna
- $f(a)f(b) \le 0$ (f ima barem jednu nultočku na $[a, b]$).

*Algoritam*:
U svakom koraku konstruiramo interval $[a_n, b_n]$ čija je duljina jednaka polovini duljine prethodnog intervala tako da se u njemu nalazi nultočka, tj. $f(a_n)f(b_n) \le 0$.

- **POČETAK:** duljina intervala je $d = b - a$.
- **ITERACIJA:** sve dok je $d > \varepsilon$ ( $\varepsilon$ je zadana točnost) ponavljamo:
  - $d = \frac{d}{2}$
  - $x_n = a_n + d$
  - Ako je $f(a_n)f(x_n) < 0$ onda je $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_n$,
    Ako je $f(a_n)f(x_n) > 0$ onda je $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$,
    Ako je $f(a_n)f(x_n) = 0$ onda je $d = 0$ (izlazimo iz petlje)
  - $n = n + 1$.
- **IZLAZ:** $y = x_{n-1}$ je tražena nultočka sa točnošću $\varepsilon$.

*Ocjena greške*:
Neka je $\xi$ nultočka funkcije $f \in C([a, b])$, tj. $f(\xi) = 0$

$$|\xi - x_n| \le \frac{1}{2^{n+1}}(b - a)$$

Ako je, osim toga, $f \in C^1([a, b])$

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| > 0$$

Kriterij zaustavljanja iteracija uz zadanu točnost $\varepsilon$:

- $f \in C([a, b])$:
$$n \ge \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2} - 1$$
- $f \in C^1([a, b])$:
$$|f(x_n)| \le \varepsilon m_1$$

Iteracije zaustavljamo čim je jedan od kriterija zadovoljen.
Ima sigurnu konvergenciju, ali je spora! Nultočke parnog reda ne možemo naći ovom metodom.

**Zadatak 6.1** (DZ)**.** *Riješite, metodom raspolavljanja, jednadžbu*

$$x^3 - 1.5 = 0$$

*uz zadanu točnost* $\varepsilon = 10^{-3}$.

*Rješenje.* Nultočka se nalazi u intervalu $[1, 2]$ jer:

$$\begin{aligned} f(1) &= -0.5 \\ f(2) &= 6.5 \\ &\implies f(1)f(2) < 0. \end{aligned}$$

Iz prvog kriterija zaustavljanja dobijemo da je $n \geq 8.965$. Dakle potrebno je najviše 9 koraka da bismo ostvarili zadanu točnost.
No, kako je $f \in C^1([1, 2])$, možemo koristiti i drugi kriterij. Izračunajmo:

$$m_1 = \min_{[1,2]} |f'(x)| = \min_{[1,2]} 3x^2 = 3,$$

pa je kriterij zaustavljanja $|f(x_n)| \leq 3 \cdot 10^{-3}$.

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $\lvert f(x_n)\rvert$ | $f(a_n)f(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1.5 | 1.875 | $-0.9375 < 0$ |
| 1 | 1 | 1.5 | 1.25 | 0.453125 | $-0.226563 < 0$ |
| 2 | 1 | 1.25 | 1.125 | 0.076172 | $0.038086 > 0$ |
| 3 | 1.125 | 1.25 | 1.1875 | 0.174561 | $-0.013297 < 0$ |
| 4 | 1.125 | 1.1875 | 1.15625 | 0.045807 | $-0.003489 < 0$ |
| 5 | 1.125 | 1.15625 | 1.140625 | 0.016018 | $0.001220 > 0$ |
| 6 | 1.140625 | 1.15625 | 1.1484375 | 0.014684 | $-0.000235 < 0$ |
| 7 | 1.140625 | 1.1484375 | $\boxed{1.14453125}$ | $0.0007192 < 3 \cdot 10^{-3}$ | |

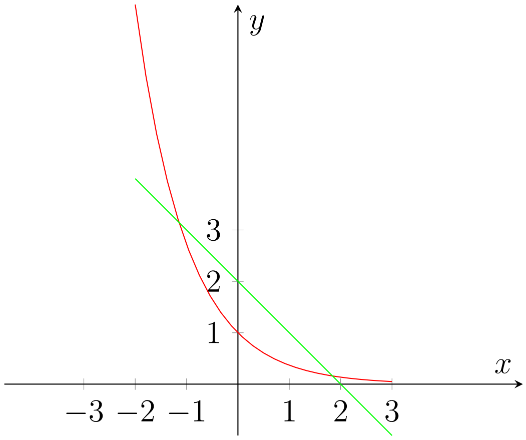
Dakle, rješenje je $x_7 = 1.14453125$. □

**Zadatak 6.2.** *Riješite, metodom raspolavljanja, jednadžbu*

$$e^{-x} - 2 + x = 0,$$

*s točnošću* $\varepsilon = 10^{-2}$.

*Rješenje.* Prvo moramo lokalizirati nultočke. Tražimo $x$ koji zadovoljavaju $e^{-x} = 2 - x$. Stoga gledamo gdje se grafovi tih funkcija sijeku:




$$f'(x) = -e^{-x} + 1 = \begin{cases} < 0 & \text{za } x < 0 \\ > 0 & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

Dakle, $f$ strogo raste na $\langle 0, +\infty\rangle$ i strogo pada na $\langle -\infty, 0\rangle$. To znači da na svakom od intervala $\langle 0, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, 0\rangle$ imamo najviše jednu nultočku. S druge strane, već smo lokalizirali dvije nultočke (slika) $x_0 \in [-2, -1]$ i $y_0 \in [1, 2]$, pa su to i sve nultočke funkcije $f$, tj. sva rješenja početne jednadžbe.
Provjera:

$$\begin{aligned} f(-2)f(-1) &< 0 \\ f(2)f(1) &< 0. \end{aligned}$$

Iz prvog kriterija zaustavljanja

$$n \geq \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2} - 1 = 5.643856$$

vidimo da nam je, u oba slučaja $(b - a = 1)$, dovoljno $n = 6$ iteracija.
Izračunajmo i odgovarajuće minimume za dinamički uvjet zaustavljanja $(f \in C^1)$:

$$\begin{aligned} \min_{y\in[-2,-1]} |f'(y)| = |f'(-1)| = e - 1 &\implies m_1 = 1.7182818 \\ \min_{x\in[1,2]} |f'(x)| = |f'(1)| = -e^{-1} + 1 &\implies m_1 = 0.632120559 \end{aligned}$$

Dakle, za nultočku $x_0 \in [-2, -1]$ uvjet zaustavljanja je

$$|f(x)| \leq 0.017182818.$$

Za nultočku $y_0 \in [1, 2]$ uvjet zaustavljanje je

$$|f(x)| \leq 0.00632120559.$$

Provodimo iteracije na $[1, 2]$:

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $\|f(x_n)\|$ | $f(a_n)f(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1.5 | 0.2768698 | $0.175015 > 0$ |
| 1 | 1.5 | 2 | 1.75 | 0.076226 | $0.0211047 > 0$ |
| 2 | 1.75 | 2 | 1.875 | 0.0283549 | $-0.002161 < 0$ |
| 3 | 1.75 | 1.875 | 1.8125 | 0.0242545 | $0.0018488 > 0$ |
| 4 | 1.8125 | 1.875 | $\boxed{1.84375}$ | $0.00197298 < 0.0063212$ | |

Stajemo u 4. koraku. rješenje je $x_4 = 1.84375$.
Provodimo iteracije na $[-2, -1]$:

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $\|f(x_n)\|$ | $f(a_n)f(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-2$ | $-1$ | $-1.5$ | 0.981689 | $3.326999 > 0$ |
| 1 | $-1.5$ | $-1$ | $-1.25$ | 0.2403429 | $0.235942 > 0$ |
| 2 | $-1.25$ | $-1$ | $-1.125$ | 0.044783 | $-0.010763 < 0$ |
| 3 | $-1.25$ | $-1.125$ | $-1.1875$ | 0.0913738 | $0.021961 > 0$ |
| 4 | $-1.1875$ | $-1.125$ | $-1.15625$ | 0.021743 | $0.00198678 > 0$ |
| 5 | $-1.15625$ | $-1.125$ | $\boxed{-1.140625}$ | $0.011902 < 0.017182818$ | |

Stajemo u 5. koraku. rješenje je $x_5 = -1.140625$.

$\square$

## 6.2 Metoda jednostavne iteracije

Pretpostavimo da tražimo rješenje jednadžbe

$$x = f(x).$$

Takve točke $x$ zovemo fiksne točke funkcije $f$.
Definiramo jednostavnu iteracijsku funkciju

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0$$

uz $x_0$ kao neku početnu aproksimaciju $x$.
Naš problem je traženje nultočke $f(x) = 0$. No ako jednadžbu zapišemo u obliku $g(x) = x$, problem se svodi na traženje fiksne točke funkcije $g$.

**Teorem 6.1.** *Neka je funkcija $g$ neprekidna na $[a, b]$ i neka je*

$$g([a, b]) \subset [a, b].$$

*Pretpostavimo da postoji konstanta $q$, takva da je $0 < q < 1$ i da vrijedi*

$$|g(x) - g(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

*Ovo svojstvo kaže da je $g$ kontrakcija na $[a, b]$.*
*Tada funkcija $g$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x$ unutar $[a, b]$.*
*Nadalje, za proizvoljnu startnu točku $x_0 \in [a, b]$, niz iteracija*

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

*konvergira prema $x$.*

Ako je $g \in C([a, b])$ imamo ocjene pogreške:

1) $|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$

2) $|\xi - x_n| \leq q^n(b - a)$.

Ako je $g \in C^1([a, b])$ i ako je $g([a, b]) \subset [a, b]$, da bismo provjerili da li je kontrakcija, dovoljno je vidjeti da je

$$M_1 = \max_{y \in [a,b]} |g'(y)| \leq q,$$

za neki $q \in \langle 0, 1 \rangle$.
Za zadanu točnost $\varepsilon > 0$ potreban broj koraka može se odrediti iz odgovarajućih ocjena:

1) $n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\log q}$

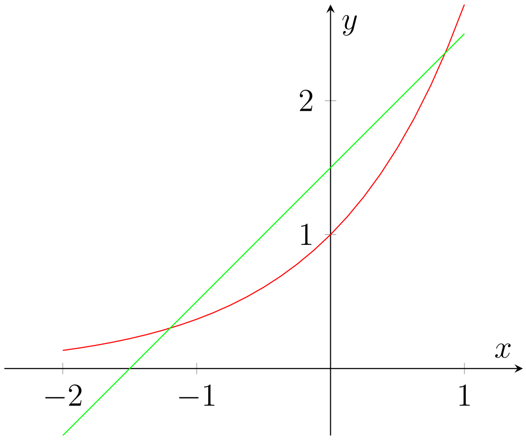
2) $n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon}{b-a}}{\log q}$.

Dinamička ocjena pogreške je

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1 - q}|x_n - x_{n-1}|.$$

**Primjer 6.1** (DZ). *Metodom iteracija riješite jednadžbu $e^x = x + 1.5$ s točnošću $\varepsilon = 0.005$.*

*Rješenje.* Nacrtajmo funkcije $e^x$ i $x + 1.5$:




Iz slike vidimo da bismo trebali dobiti dva rješenja. Jedno u segmentu $[-2,-1]$ i jedno u segmentu $[0,1]$.
Definiramo

$$g(x) = e^x - 1.5, \quad f(x) = e^x - x - 1.5.$$

Tada jednadžba iz zadatka glasi $g(x) = x$.
Treba provjeriti da li je $g$ kontrakcija. $g'(x) = e^x$, pa je

$$|g'(x)| < 1 \iff x < 0.$$

Dakle, $|g'(x)| < 1$ na $[-2,-1]$, ali ne i na $[0,1]$.
Promatramo $[-2,-1]$: Vrijedi

$$f(-1)f(-2) < 0,$$

prema tome, imamo nultočku na $[-2,-1]$, tj. imamo rješenje jednadžbe.
Treba provjeriti da je $g([-2,-1]) \subset [-2,-1]$. Kako je $g$ strogo rastuća funkcija vrijedi

$$g([-2,-1]) \subset [g(-2), g(-1)] \subset [-1.37, -1.13] \subset [-2,-1].$$

Zaključujemo da je funkcija $g\big|_{[-2,-1]} : [-2,-1] \to [-2,-1]$ kontrakcija.

$$M_1 = \max_{x\in[-2,-1]} |g'(x)| = \max_{x\in[-2,-1]} e^x = e^{-1} = \underbrace{0.367879}_{=q} < 1,$$

pa je potrebni broj koraka (prema 2))

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon}{b-a}}{\log q} = \frac{\log \frac{5\cdot 10^{-3}}{1}}{\log e^{-1}} = 5.2983.$$

Za $n = 6$ iteracija dobit ćemo traženu točnost $\varepsilon$.
S algoritmom krećemo tako da odaberemo $x_0 = -1.5$ (sredina intervala).

$$x_1 = g(x_0) = -1.27686984.$$

Iz 1) dobivamo:

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\log q} = \frac{\log \frac{5\cdot 10^{-3}\cdot 0.632121}{|0.22313016|}}{\log e^{-1}} = 4.25,$$

pa vidimo da nam je dovoljno 5 iteracija.

$$\begin{aligned} x_0 &= -1.5, \\ x_1 = g(x_0) &= -1.27686984, \\ x_2 = g(x_1) &= -1.221091, \\ x_3 = g(x_2) &= -1.205092, \\ x_4 = g(x_3) &= -1.200336, \\ x_5 = g(x_4) &= -1.198907. \end{aligned}$$

<u>Promatramo $[0, 1]$</u>: Primijenimo ln na jednadžbu i dobijemo:

$$x = \ln(x + 1.5).$$

Definiramo funkciju $g(x) = \ln(x + 1.5)$. Provjerimo je li to konrakcija:

$$g'(x) = \frac{1}{x + 1.5},$$

$$M_1 = \max_{x\in[0,1]} |g'(x)| = |g'(0)| = \underbrace{\frac{2}{3}}_{=q} < 1,$$

$$g([0, 1]) \underbrace{\subset}_{graste} [g(0), g(1)] \subset [0.405, 0.917] \subset [0, 1].$$

Dakle, $g$ je kontrakcija.
Ocjenjujemo potreban broj iteracija:

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon}{b-a}}{\log q} = \frac{\log \frac{5\cdot 10^{-3}}{1}}{\log \frac{2}{3}} = 13.067,$$

pa nam je potrebno 14 iteracija da zadovoljimo zadanu točnost.
Ako uzmemo $x = 0.5$ (polovište intervala)

$$x_1 = g(x_0) = 0.693147,$$

pa iz druge ocjene dobijemo da je potrebno $n = 12$ iteracija.
Računamo:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5, \\ x_1 = g(x_0) &= 0.693147, \\ x_2 = g(x_1) &= 0.785338, \\ x_3 = g(x_2) &= 0.826514, \\ x_4 = g(x_3) &= 0.844371, \\ x_5 = g(x_4) &= 0.852017, \\ x_6 = g(x_5) &= 0.855273, \\ x_7 = g(x_6) &= 0.856657, \\ x_8 = g(x_7) &= 0.857243, \\ x_9 = g(x_8) &= 0.857493, \\ x_{10} = g(x_9) &= 0.857599, \\ x_{11} = g(x_{10}) &= 0.857644, \\ x_{12} = g(x_{11}) &= 0.857663. \end{aligned}$$

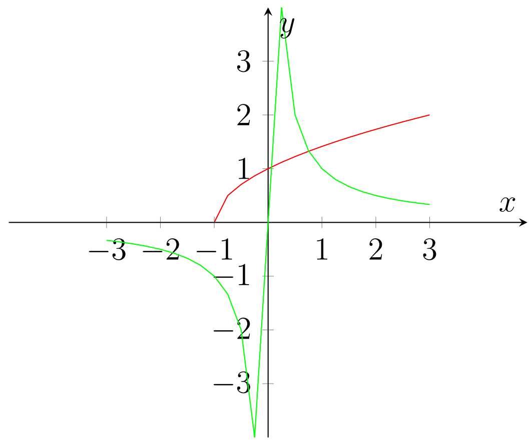
□

**Zadatak 6.3.** *Metodom jednostavne iteracije riješiti jednadžbu*

$$\sqrt{x+1} = \frac{1}{x},$$

*s točnosšću* $\varepsilon = 10^{-4}$.

*Rješenje.* Nacrtajmo grafove funkcija $\sqrt{x+1}$ i $\frac{1}{x}$.




Iz grafa vidimo da postoji jedno rješenje jednadžbe i da se ono nalazi u segmentu $[0,1]$. Provjerom lako vidimo da je rješenje u segmentu $\left[\frac{1}{2},1\right]$:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) f(1) < 0.$$

Prelazimo na oblik $g(x) = x$ gdje je $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
Funkcija $g$ je padajuća, pa je

$$g\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) \subset \left[g(1), g\left(\frac{1}{2}\right)\right] \subset \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right] \subset \left[\frac{1}{2},1\right],$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$|g'(x)| = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$M_1 = \max_{x\in\left[\frac{1}{2},1\right]} |g'(x)| = |g'\left(\frac{1}{2}\right)| = \underbrace{0.2721655}_{=q}.$$

$\Longrightarrow$ $g$ je kontrakcija na $\left[\frac{1}{2},1\right]$ s koeficijentom kontrakcije $q$.
Promatramo $\left[\frac{1}{2},1\right]$:
Za početnu točku $x_0$ odaberimo sredinu segmenta, tj. $x_0 = 0.75$. Tada je

$$x_1 = g(x_0) = 0.75592895,$$

pa je potreban broj iteracija:

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1-x_0|}}{\log q} = \frac{\log \frac{\varepsilon(1-0.2721655)}{|0.75592895-0.75|}}{\log 0.2721655} = 3.381$$

$n = 4$. Da smo koristili drugu ocjenu, dobili bi da je $n = 7$.
Možemo koristiti i dinamičku ocjenu, tj. provjeravati da li je $\frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$. Zapišimo odmah da je $\frac{q}{1-q} = 0.3739387$. Iteracije su:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.75, \\
x_1 &= g(x_0) = 0.75592895 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.002217 > \varepsilon, \\
x_2 &= g(x_1) = 0.754651658 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.0004776319 > \varepsilon, \\
x_3 &= g(x_2) = 0.7549262808 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.00010269 > \varepsilon, \\
x_4 &= g(x_3) = 0.75486721045 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.000022 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle i dinamička i statička ocjena daju da je potrebni broj iteracija za zadanu točnost $n = 4$.
Pogledajmo što bi bilo kada bi za početnu iteraciju uzeli $\underline{x_0 = \frac{1}{2}}$:

$$x_1 = g(x_0) = 0.8164966,$$

pa je potrebni broj iteracija jednak

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\log q} = \frac{\log \frac{\varepsilon(1-0.2721655)}{|0.8164966-0.5|}}{\log 0.2721655} = 6.4376315,$$

$n = 7$. Računamo iteracije i gledamo dinamičku ocjenu:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.5, \\
x_1 &= g(x_0) = 0.8164966 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.1183503 > \varepsilon, \\
x_2 &= g(x_1) = 0.74196378 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.0278707 > \varepsilon, \\
x_3 &= g(x_2) = 0.757670607 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.005873 > \varepsilon, \\
x_4 &= g(x_3) = 0.7542776770 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.0012687 > \varepsilon, \\
x_5 &= g(x_4) = 0.75500674495 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.0002726 > \varepsilon, \\
x_6 &= g(x_5) = 0.754849905549 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.0000586 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, s dinamičkom ocjenom smo uštedili jednu iteraciju.
<u>Promatramo $[0, 1]$</u>:
Treba prvo dokazati da je $g$ kontrakcija na ovom segmentu:

$$\max_{x\in[0,1]} |g'(x)| = |g'(0)| = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=q}.$$

Lako je provjeri i da je $g([0, 1]) \subset [0, 1]$ pa slijedi da je $g$ kontrakcija.
Za početnu iteraciju izaberimo polovinu intervala $x_0 = 0.5$. Tada je

$$x_1 = g(x_0) = 0.8164966,$$

pa je potrebni broj iteracija jednak

$$n \geq \frac{\log \frac{\varepsilon(1-q)}{|x_1-x_0|}}{\log q} = \frac{\log \frac{\varepsilon(1-0.5)}{|0.8164966-0.5|}}{\log 0.5} = 12.6279,$$

$n = 13$. Promatrat ćemo i dinamičku ocjenu pogreške. Primijetimo da je prvih 6 iteracija isto kao u prošlom slučaju, samo se mijenja dinamička ocjena:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.5,\\
x_1 = g(x_0) &= 0.8164966 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.3164966 > \varepsilon,\\
x_2 = g(x_1) &= 0.74196378 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.07453 > \varepsilon,\\
x_3 = g(x_2) &= 0.757670607 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.0157 > \varepsilon,\\
x_4 = g(x_3) &= 0.7542776770 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.00339 > \varepsilon,\\
x_5 = g(x_4) &= 0.75500674495 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.000729 > \varepsilon,\\
x_6 = g(x_5) &= 0.754849905549 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.000157 > \varepsilon,\\
x_7 = g(x_6) &= 0.75488836370844 \implies \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| = 0.0000337 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Znači, dinamička ocjena nam daje da stajemo u 7. iteraciji. $\square$

Komentirajmo još kako iz jednadžbe $f(x) = 0$ prijeći na ekvivalentnu jednadžbu $g(x) = x$ tako da $g$ bude kontrakcija.
Pretpostavimo da za $f$ na segmentu $[a, b]$ na kojem smo izolirali nultočku vrijedi:

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1, \quad \forall x \in [a, b].$$

Zamijenimo jednadžbu $f(x) = 0$ s ekvivalentnom jednadžbom $x = x - \lambda f(x)$, $\lambda > 0$.
Definirajmo $g(x) = x - \lambda f(x)$. Parametar $\lambda$ odaberemo tako da vrijedi:

$$0 \leq g'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq q < 1, \quad \forall x \in [a, b].$$

Vrijedi

$$0 \leq 1 - \lambda M_1 \leq 1 - \lambda f'(x) \leq 1 - \lambda m_1 \leq q < 1.$$

Sada vidimo da će to vrijediti ako uzmemo $\lambda = \frac{1}{M_1}$.

## 6.3 Newtonova metoda

Početne pretpostavke na funkciju $f$:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2([a, b])$,
- $f(a)f(b) \leq 0$,
- $|f'(x)|$, $|f''(x)| > 0$, $\forall x \in [a, b]$ ($f'$ i $f''$ imaju konstantan predznak)

tada Newtonova metoda konvergira prema jedinstvenoj nultočki $\xi$, i to za svaku početnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$, za koju vrijedi

$$f(x_0)f''(x_0) > 0.$$

*Algoritam*:
Počevši od polazne aproksimacije $x_0 \in [a, b]$ iterativno se formira niz točaka $(x_n)_n$ koji konvergira prema nultočki $\xi$.

- **POČETAK:** Odaberemo početnu točku $x_0$ tako da $f(x_0)f''(x_0) > 0$.
- **ITERACIJA:** sve dok nije zadovoljena tražena točnost $\varepsilon$ ponavljamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

*Ocjena pogreške:*

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x_{n-1}|^2,$$
$$M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]}|f'(x)|.$$

*Kriterij zaustavljanja*:

$$|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}.$$

Napomenimo još da je uvjet da $f'$ i $f''$ ne mijenaju predznak ponekad teško provjeriti, pa je dovoljno osigurati da $f'(\xi) \neq 0$ i $f''(\xi) \neq 0$ (nije višestruka nultočka).

**Zadatak 6.4.** *Newtonovom metodom nađite realne korijene jednadžbe*

$$x^5 + x + 1 = 0,$$

*uz točnost* $\varepsilon = 10^{-4}$.

*Rješenje.* Prvo trebamo izolirati nultočku. Primijetimo

$$f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

pa $f$ strogo raste, što znači da može imati najviše jednu nultočku. Kako je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

$f$ mora imati barem jednu nultočku. Zaključujemo: $f$ ima jedinstvenu nultočku u $\mathbb{R}$.
Kako je $f(0) = 1$, tražena nultočka $\xi$ je negativna (jer $f$ raste).
Nadalje, vrijedi

$$|\xi - x| \leq \frac{|f'(x)|}{m_1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)| = 1.$$

Po teoremu srednje vrijednosti, postoji $\tilde{x}$ između $x$ i $\xi$ t.d.

$$|f(x) - \underbrace{f(\xi)}_{=0}| = |f'(\tilde{x})||x-\xi|,$$

$$\implies |f(x)| \geq m_1|x-\xi|,$$

$$\implies |\xi - x| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo $x = 0$ pa slijedi $|\xi| \leq 1$. Konačno zaključujemo

$$\xi \in [-1, 0].$$

Provjeravamo pretpostavke:

$$f'(x) > 0 \forall x,$$

$$f''(x) = 20x^3 \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Kako druga derivacija mora biti različita od nule u svim točkama segmenta, moramo smanjiti segment $[-1, 0]$. Lako provjerimo da je $\xi \in [-1, -0.5]$.
Računamo uvjet zaustavljanja:

$$m_1 = \min_{x\in[-1,-0.5]} |f'(x)| = |f'(-0.5)| = 1.3125,$$

$$M_2 = \max_{x\in[-1,-0.5]} |f''(x)| = 20.$$

(Za $M_2$ tražimo i stacionarne točke). Dakle uvjet zaustavljanja je

$$|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.0036228.$$

Odaberemo početnu točku $x_0 \in [-1, -0.5]$ takvu da vrijedi $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Uzmimo $x_0 = -1$. Provodimo iteracije

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + x_n + 1}{5x_n^4 + 1}.$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= -1, \\
x_1 &= -0.833333 \implies |x_1 - x_0| = 0.166667 > 0.0036228, \\
x_2 &= -0.764382 \implies |x_2 - x_1| = 0.068951 > 0.0036228, \\
x_3 &= -0.755025 \implies |x_3 - x_2| = 0.009357 > 0.0036228, \\
x_4 &= -0.754878 \implies |x_4 - x_3| = 0.000147 < 0.0036228,
\end{aligned}$$

slijedi $\xi \approx x_4 = -0.754878$. □

**Zadatak 6.5** (DZ). *Newtonovom metodom nađite pozitivni korijen jednadžbe*

$$x - \sin x - 0.25 = 0,$$

*s točnošću* $\varepsilon = 10^{-3}$.

**Zadatak 6.6.** *Nađite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe*

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0,$$

*s točnošću* $\varepsilon = 10^{-4}$. *Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem* $\frac{1}{2}$.

*Rješenje.* kolokvij 2012., 5. zadatak. □

## 6.4 Regula falsi (metoda pogrešnog položaja)

Pokušaj ubrzavanja metode biskecije. Ima sigurnu konvergenciju uz iste pretpostavke:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i
- u rubovima intervala vrijedi $f(a)f(b) < 0$.

Ideja: Aproksimirati funkciju $f$ pravcem koji prolazi točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Traženu nultočku $\xi$ tada aproksimiramo nultočkom tog pravca $x_0$.
Pomičemo točku $a$ ili $b$ u $x_0$ ovisno o tome u kojem intervalu se nalazi nultočka (test predznaka).
*Algoritam:*

- **POČETAK:**

$$\begin{aligned}
a_0 &= a \\
b_0 &= b \\
x_0 &= b_0 - f(b_0)\frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)}.
\end{aligned}$$

- **ITERACIJA:** sve dok nije zadovoljena tražena točnost:
  - ako je $f(a_n)f(x_n) < 0$ tada je $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_n$
  - ako je $f(a_n)f(x_n) > 0$ tada je $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$

$$x_{n+1} = b_{n+1} - f(b_{n+1})\frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})}.$$

*Kriterij zaustavljanja*

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

## 6.5 Metoda sekante

Počinjemo s dvije početne točke $x_0$ i $x_1$. Povlačimo sekantu grafa funkcije $f$ kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ i definiramo novu aproksimaciju $x_2$ u točki gdje sekanta siječe os $x$. Postupak nastavljamo povlačenjem sekante kroz posljedne dvije točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$. (ključna razlika od regule falsi-tamo se jedna početna točka drži fiksnom).
Moguće je da metoda sekante ne konvergira!
*Iteracije:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}(x_{n-1} - x_n).$$

*Ocjena pogreške*:

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_{n+1} - x_n|.$$

*Kriterij zaustavljanja*:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{\varepsilon m_1}{M_1 - m_1}.$$

**Zadatak 6.7.** *Korištenjem metode sekante i metode regula falsi, riješite jednadžbu*

$$x^2 - e^x + 2 = 0,$$

*s točnošću* $\varepsilon = 10^{-4}$.

*Rješenje.* Nultočka se nalazi u intervalu $[1, 2]$.
Kako je

$$f'(x) = 2x - e^x < 0,$$
$$f''(x) = 2 - e^x < 0.$$

$f'$ pada na intervalu $[1, 2]$, pa je

$$m_1 = \min_{x\in[1,2]} |f'(x)| = |f'(1)| = 0.718282,$$

$$M_1 = \max_{x\in[1,2]} |f'(x)| = |f'(2)| = 3.389056.$$

Dakle, kriterij zaustavljanja za metodu sekante je:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{10^{-4} \cdot 0.718282}{3.389056 - 0.718282} = 0.000026894 = K.$$

Računamo iteracije za metodu sekante:

| $n$ | $x_n$ | $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | |
| 1 | 2 | |
| 2 | 1.16861534 | $0.831385 > K$ |
| 3 | 1.24872997 | $0.00011463 > K$ |
| 4 | 1.32745037 | $0.0787204 > K$ |
| 5 | 1.31860702 | $0.00884335 > K$ |
| 6 | 1.31907059 | $0.0004635 > K$ |
| 7 | 1.31907368 | $3.09 \cdot 10^{-6} < K$ |

Sada računamo iteracije za metodu regula falsi:

| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$ | $f(a_n)f(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1.16861534 | $0.831385 > \varepsilon$ | $0.041730 > 0$ |
| 1 | 1.16861534 | 2 | 1.24872997 | $0.080115 > \varepsilon$ | $0.010874 > 0$ |
| 2 | 1.24872997 | 2 | 1.286442507 | $0.037713 > \varepsilon$ | $0.002573 > 0$ |
| 3 | 1.286442507 | 2 | 1.30400376 | $0.017561 > \varepsilon$ | $5.75 \cdot 10^{-4} > 0$ |
| 4 | 1.30400376 | 2 | 1.31212947 | $0.008126 > \varepsilon$ | $1.248 \cdot 10^{-4} > 0$ |
| 5 | 1.31212947 | 2 | 1.31587719 | $0.003748 > \varepsilon$ | $2.67 \cdot 10^{-5} > 0$ |
| 6 | 1.31587719 | 2 | 1.31760303 | $0.001726 > \varepsilon$ | $5.68 \cdot 10^{-6} > 0$ |
| 7 | 1.31760303 | 2 | 1.31839722 | $0.000794 > \varepsilon$ | $1.2 \cdot 10^{-5} > 0$ |
| 8 | 1.31839722 | 2 | 1.31876255 | $0.000365 > \varepsilon$ | $2.55 \cdot 10^{-7} > 0$ |
| 9 | 1.31876255 | 2 | 1.31893059 | $0.00016 > \varepsilon$ | $5.4 \cdot 10^{-8} > 0$ |
| 10 | 1.31893059 | 2 | 1.3190079 | $0.000077 < \varepsilon$ | |

$\square$