Saša Singer

Numerička matematika

Dodatni zadaci za vježbu
(rješenja nekih zadataka s kolokvija)

Ver. 1.1.01 10. srpnja 2020.

Sadržaj

1 Stabilnost i uvjetovanost

1.1 Računanje vrijednosti funkcije iz reda potencija

Zadatak 1.1.1. (NM 2018, 1. kolokvij, 2. zadatak, grupa B)

Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{(k+2)!}.$$

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x_1 = 1/10$,

(b) $x_2 = -30$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Detaljno objasnite.

Ako želite naći točnu vrijednost funkcije f, preuredite zadani red u red za eksponencijalnu funkciju s odgovarajućim argumentom.

Rješenje. Jedina mogućnost za **gubitak** (relativne) točnosti kod približnog računanja u aritmetici računala je katastrofalno **kraćenje** prilikom zbrajanja (oduzimanja):

- kad iz "velikih" brojeva, aditivnim operacijama (zbrajanjem, oduzimanjem), moramo dobiti "mali" broj.

U opisanom algoritmu za računanje $f(x)$, to se može dogoditi **samo** kod zbrajanja članova reda

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \text{gdje je} \quad a_k := \frac{(3x)^k}{(k+2)!}, \quad k \geq 0.$$

Evo zašto. Uz supstituciju $y := 3x$, članove a_k računamo rekurzijom

$$a_0 = 1/2, \qquad a_k = \frac{y}{k+2} \cdot a_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Ovdje koristimo samo multiplikativne operacije (množenje, dijeljenje), pa ne može doći do gubitka točnosti, tj. svi izračunati članovi a_k su vrlo točni. Ove članove zbrajamo algoritmom

$$s_0 = a_0, \qquad s_k = s_{k-1} + a_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

sve dok je $|a_k| > \varepsilon$ (može i $\geq$, umjesto $>$). Pripadna izračunata suma s_k je aproksimacija za funkcijsku vrijednost $f(x)$.

Za $y > 0$, tj. za $x > 0$, svi članovi reda imaju **isti** predznak, pa **ne može** doći do kraćenja.

Za $y < 0$, tj. za $x < 0$, članovi **alterniraju** po predznaku, pa postoji **opasnost** katastrofalnog kraćenja kod zbrajanja članova, ali samo za **velike** apsolutne vrijednosti od y, odnosno, za apsolutno velike negativne x.

Za **male** apsolutne vrijednosti od y (kad je $-1 \leq y < 0$), tj. za $-1/3 \leq x < 0$, članovi reda brzo monotono **padaju** po apsolutnoj vrijednosti

$$|a_k| \ll |a_{k-1}|, \quad k \geq 1.$$

Tada **ne može** doći do kraćenja, pa izračunata suma mora biti približno **točna**.

S druge strane, za $y \ll -1$, tj. za $x \ll -1/3$, članovi, prvo, brzo **rastu** po apsolutnoj vrijednosti, a onda počinju padati. Kada je $a_k \approx -a_{k-1}$, **mora** doći do katastrofalnog kraćenja i **gubitka** točnosti. To se događa za $-y \approx k+2$, tj. za $k \approx -3x-2$.

Konačnu potvrdu ovog zaključka dobivamo nalaženjem eksplicitnog izraza za točnu vrijednost funkcije f. Zadani red transformiramo u red za eksponencijalnu funkciju s odgovarajućim argumentom. Za $x = 0$, očito je $f(0) = 1/2$, a za $x \neq 0$ izlazi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{(k+2)!} = \frac{1}{(3x)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{(3x)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} = \frac{1}{(3x)^2} \left(e^{3x} - 1 - 3x\right).$$

Dakle, za apsolutno velike negativne x, kad je $x \ll -1/3$, dobivamo da $e^{3x} \to 0$, i to puno brže nego što $1/(3x) \to 0$, pa vrijedi

$$f(x) \approx \frac{3|x| - 1}{(3x)^2}.$$

Vidimo da je tada $0 < f(x) < 1/(3|x|)$, pa zaista **mora** doći do katastrofalnog kraćenja.

Kad u ova razmatranja uvrstimo zadane vrijednosti od x, dobivamo sljedeće zaključke:

(a) Za $x_1 = 1/10$, dobivamo $y = 3/10$, brzu konvergenciju i **točan** rezultat.

(b) Za $x_2 = -30$, dobivamo $y = -90$, sporu konvergenciju i **netočan** rezultat.

Za ilustraciju, pogledajmo rezultate dobivene u aritmetici računala. Računanje je provedeno tipu `double`, a tražena točnost je $\varepsilon \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$ (jedinična greška zaokruživanja).

(a) Kad uvrstimo $x_1 = 1/10$ u red potencija, članovi a_k odmah brzo monotono **padaju** po apsolutnoj vrijednosti. Zadnji zbrojeni član reda je

$$a_{11} \approx 2.8448114385614432 \cdot 10^{-16},$$

a izračunata vrijednost sume i egzaktna vrijednost funkcije su

$$\begin{aligned} s_{11} &\approx 5.5398675084447901 \cdot 10^{-1}, \\ f(1/10) &\approx 5.5398675084447890 \cdot 10^{-1}. \end{aligned}$$

Relativna greška ove aproksimacije je

$$\left| \frac{f(1/10) - s_{11}}{f(1/10)} \right| = 2.0040606078263958 \cdot 10^{-16},$$

tj. aproksimacija je savršeno **točna**.

(b) Kad uvrstimo $x_2 = -30$ u red potencija, članovi a_k prvo **rastu** po apsolutnoj vrijednosti do člana

$$a_{87} \approx -6.3300193944813067 \cdot 10^{33},$$

a onda počinju padati po apsolutnoj vrijednosti. Zadnji zbrojeni član reda je

$$a_{265} \approx -2.1872769327212259 \cdot 10^{-16},$$

a izračunata vrijednost sume i egzaktna vrijednost funkcije su

$$\begin{aligned} s_{265} &\approx 4.1010444291962387 \cdot 10^{17}, \\ f(-30) &\approx 1.0987654320987654 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Relativna greška ove aproksimacije je

$$\left| \frac{f(-30) - s_{265}}{f(-30)} \right| \approx 3.7324112220774760 \cdot 10^{19},$$

tj. aproksimacija je **potpuno pogrešna** — izgubili smo sve znamenke.

—— • ——

Zadatak 1.1.2. (NM 2011, 1. kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\,(k+1)!}.$$

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$, a zatim dobiveni zbroj pomnožimo faktorom ispred sume. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x = -1/2$,

(b) $x = 20$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

(Informacija: funkcija f je modificirana Besselova funkcija prve vrste reda 1, standardna oznaka je I_1.)

Rješenje. Jedina mogućnost za **gubitak** točnosti kod približnog računanja (u aritmetici računala) je katastrofalno **kraćenje** prilikom zbrajanja — kad iz "velikih" brojeva, zbrajanjem, moramo dobiti "mali" broj.

U opisanom algoritmu za računanje $f(x)$, to se može dogoditi **samo** kod zbrajanja članova reda

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \text{gdje je} \quad a_k := \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\,(k+1)!}, \quad k \geq 0.$$

Uz supstituciju $y := x^2/4 \geq 0$, članove a_k računamo rekurzijom

$$a_0 = 1, \qquad a_k = \frac{y}{k(k+1)} \cdot a_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Uočimo da svi članovi imaju **isti** predznak, pa **ne postoji** opasnost katastrofalnog kraćenja kod zbrajanja članova, ni za koju vrijednost od x, odnosno, y. Dakle, izračunata suma mora uvijek biti približno **točna**.

Veličina broja y utječe samo na brzinu konvergencije reda, tj. na broj potrebnih članova za zadanu točnost.

(a) Za $x = -1/2$, dobivamo $y = 1/16$, brzu konvergenciju i **točan** rezultat.

(b) Za $x = 20$, dobivamo $y = 100$, sporu konvergenciju i **točan** rezultat.

Za ilustraciju, pogledajmo rezultate dobivene u aritmetici računala. Računanje je provedeno tipu `double`, a tražena točnost je $\varepsilon \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$ (jedinična greška zaokruživanja).

(a) Kad uvrstimo $x = -1/2$ u red potencija, članovi a_k odmah brzo monotono **padaju**. Zadnji zbrojeni član reda je

$$a_6 \approx 1.6425442233077221 \cdot 10^{-14},$$

a izračunata vrijednost sume je

$$s_6 \approx 1.0315772215635850.$$

Nakon množenja s $x/2 = -1/4$, izračunata približna vrijednost funkcije je

$$f_6 \approx -2.5789430539089625 \cdot 10^{-1}.$$

Egzaktna vrijednost funkcije (Matlab i Maple u visokoj točnosti) je

$$f(-1/2) \approx -2.5789430539089631 \cdot 10^{-1}.$$

Relativna greška aproksimacije f_6 je

$$\left| \frac{f(-1/2) - f_6}{f(-1/2)} \right| \approx 2.1524768120458614 \cdot 10^{-16},$$

tj. aproksimacija je vrlo **točna**.

(b) Kad uvrstimo $x = 20$ u red potencija, članovi a_k prvo **rastu** do člana

$$a_9 \approx 7.5940584281266225 \cdot 10^{5},$$

a onda počinju padati. Zadnji zbrojeni član reda je

$$a_{38} \approx 9.3733417882766831 \cdot 10^{-16},$$

a izračunata vrijednost sume je

$$s_{38} \approx 4.2454973385127764 \cdot 10^{6}.$$

Nakon množenja s $x/2 = 10$, izračunata približna vrijednost funkcije je

$$f_{38} \approx 4.2454973385127768 \cdot 10^{7}.$$

Egzaktna vrijednost funkcije (Matlab i Maple u visokoj točnosti) je

$$f(20) \approx 4.2454973385127768 \cdot 10^{7}.$$

Relativna greška aproksimacije f_{38} je

$$\left| \frac{f(20) - f_{38}}{f(20)} \right| = 0,$$

tj. aproksimacija je savršeno **točna**.

Ako članove zbrajamo sve dok sljedeći član ne padne ispod **relativne** točnosti ε obzirom na trenutnu sumu, onda aproksimacija f_{32} već ima punu relativnu točnost.

—— • ——

Zadatak 1.1.3. (NM 2011, 1. kolokvij, 2. zadatak, grupa C)

Funkcija f zadana je sljedećim razvojem u red potencija oko nule

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\,(k+2)!}.$$

U zadanoj točki x, vrijednost funkcije $f(x)$ aproksimiramo tako da članove reda zbrajamo uzlazno po k, sve dok apsolutna vrijednost prvog odbačenog člana ne padne ispod zadane točnosti ε, gdje je $0 < \varepsilon \ll 1$, a zatim dobiveni zbroj pomnožimo faktorom ispred sume. Ako ovo računanje provedemo u aritmetici računala, za

(a) $x = 1/2$,

(b) $x = 20$,

hoće li takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

(Informacija: funkcija f je Besselova funkcija prve vrste reda 2, standardna oznaka je J_2.)

Rješenje. Jedina mogućnost za **gubitak** točnosti kod približnog računanja (u aritmetici računala) je katastrofalno **kraćenje** prilikom zbrajanja — kad iz "velikih" brojeva, zbrajanjem, moramo dobiti "mali" broj.

U opisanom algoritmu za računanje $f(x)$, to se može dogoditi **samo** kod zbrajanja članova reda

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \text{gdje je} \quad a_k := \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!\,(k+2)!}, \quad k \geq 0..$$

Uz supstituciju $y := x^2/4 \geq 0$, članove a_k računamo rekurzijom

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_k = -\frac{y}{k(k+2)} \cdot a_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Uočimo da članovi **alterniraju** po predznaku, pa postoji **opasnost** katastrofalnog kraćenja kod zbrajanja članova, ali samo za **velike** (apsolutne) vrijednosti od x, odnosno, y.

Za **male** vrijednosti od y, na primjer, $y \leq 1$, članovi reda brzo monotono **padaju** po apsolutnoj vrijednosti

$$|a_k| \ll |a_{k-1}|, \quad k \geq 1.$$

Tada **ne može** doći do kraćenja, pa izračunata suma mora biti približno **točna**.

S druge strane, za $y \gg 1$, članovi, prvo, brzo **rastu** po apsolutnoj vrijednosti, a onda počinju padati. Kada je $|a_k| \approx |a_{k-1}|$, **mora** doći do katastrofalnog kraćenja i gubitka točnosti.

(a) Za $x = 1/2$, dobivamo $y = 1/16$, brzu konvergenciju i **točan** rezultat.

(b) Za $x = 20$, dobivamo $y = 100$, sporu konvergenciju i **netočan** rezultat.

Za ilustraciju, pogledajmo rezultate dobivene u aritmetici računala. Računanje je provedeno tipu `double`, a tražena točnost je $\varepsilon \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$ (jedinična greška zaokruživanja).

(a) Kad uvrstimo $x = 1/2$ u red potencija, članovi a_k odmah brzo monotono **padaju** po apsolutnoj vrijednosti. Zadnji zbrojeni član reda je

$$a_6 \approx 2.0531802791346526 \cdot 10^{-15},$$

a izračunata vrijednost sume je

$$s_6 \approx 4.8966437533892221 \cdot 10^{-1}.$$

Nakon množenja s $(x/2)^2 = 1/16$, izračunata približna vrijednost funkcije je

$$f_6 \approx 3.0604023458682638 \cdot 10^{-2}.$$

Egzaktna vrijednost funkcije (Matlab i Maple u visokoj točnosti) je

$$f(1/2) \approx 3.0604023458682642 \cdot 10^{-2}.$$

Relativna greška aproksimacije f_6 je

$$\left| \frac{f(1/2) - f_6}{f(1/2)} \right| \approx 1.1336571338855447 \cdot 10^{-16},$$

tj. aproksimacija je vrlo **točna**.

(b) Kad uvrstimo $x = 20$ u red potencija, članovi a_k prvo **rastu** po apsolutnoj vrijednosti do člana

$$a_9 \approx -6.9036894801151124 \cdot 10^4,$$

a onda počinju padati po apsolutnoj vrijednosti. Zadnji zbrojeni član reda je

$$a_{37} \approx -3.5618698795451402 \cdot 10^{-16},$$

a izračunata vrijednost sume je

$$s_{37} \approx -1.6034135196975276 \cdot 10^{-3}.$$

Nakon množenja s $(x/2)^2 = 100$, izračunata približna vrijednost funkcije je

$$f_{37} \approx -1.6034135196975274 \cdot 10^{-1}.$$

Egzaktna vrijednost funkcije (Matlab i Maple u visokoj točnosti) je

$$f(20) \approx -1.6034135192299814 \cdot 10^{-1}.$$

Relativna greška aproksimacije f_{37} je

$$\left| \frac{f(20) - f_{37}}{f(20)} \right| \approx 2.9159414979791104 \cdot 10^{-10},$$

tj. aproksimacija je prilično **netočna** — izgubili smo 6 dekadskih znamenki.

Ako članove zbrajamo sve dok sljedeći član ne padne ispod **relativne** točnosti ε obzirom na trenutnu sumu, onda dobivamo aproksimaciju f_{39} sa skoro istom relativnom greškom.

1.2 Uvjetovanost problema i algoritama

1.2.1 Apsolutna i relativna uvjetovanost korijena kvadratne jednadžbe

Zadatak 1.2.1. (NM 2016, 1. kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Zadana je funkcija $f(q) =$ veće rješenje kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 8x + q = 0,$$

gdje je q realni parametar, a funkciju f promatramo na prirodnoj domeni, kad zadana jednadžba ima bar jedno realno rješenje ("veće" rješenje znači da uzimamo predznak + pred korijenom). Promatramo uvjetovanost funkcije f za **male** promjene parametra q oko neke vrijednosti q_0 iz domene.

(a) Napišite izraze za apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točki q_0. Za koje vrijednosti q_0 je računanje vrijednosti $f(q_0)$ stabilno u apsolutnom, odnosno, u relativnom smislu, a za koje vrijednosti je nestabilno?

(b) Izračunajte apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točkama $q_0 = 12$ i $q_0 = 15.98$.

Rješenje. Rješenja zadane kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4q}}{2} = 4 \pm \sqrt{16 - q},$$

a tražena funkcijska vrijednost $f(q)$ je veće rješenje

$$f(q) = x_2 = \frac{8 + \sqrt{64 - 4q}}{2} = 4 + \sqrt{16 - q}.$$

Bar jedno realno rješenje dobivamo ako i samo ako je diskriminanta nenegativna

$$\Delta := 64 - 4q \geq 0.$$

Prirodna domena funkcije f je skup svih točaka $q \in \mathbb{R}$, za koje vrijedi $q \leq 16$.

(a) Apsolutna i relativna uvjetovanost funkcije f, za **male** odgovarajuće promjene parametra q oko točke q_0 iz domene, izražavaju se preko derivacije funkcije f u točki q_0 (namjerno pišemo **bez** apsolutne vrijednosti, radi preglednosti)

$$\kappa_{\text{abs}} := f'(q_0), \qquad \kappa_{\text{rel}} = (\operatorname{cond} f)(q_0) := \frac{q_0}{f(q_0)} \cdot f'(q_0).$$

Sasvim općenito, **relativna** uvjetovanost je korektno definirana (ima smisla) kad je $q_0 \neq 0$ (u domeni) i $f(q_0) \neq 0$ (u kodomeni).

Derivacija funkcije f u točki q_0 je

$$f'(q_0) = -\frac{1}{\sqrt{64 - 4q_0}} = -\frac{1}{2\sqrt{16 - q_0}} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}},$$

odakle dobivamo

$$\kappa_{\text{abs}} = -\frac{1}{2\sqrt{16 - q_0}}, \qquad \kappa_{\text{rel}} = -\frac{q_0}{2\left(4 + \sqrt{16 - q_0}\right)\sqrt{16 - q_0}}.$$

Znamo da je slobodni koeficijent q u kvadratnoj jednadžbi jednak produktu oba rješenja ($q = x_1 \cdot x_2$), tj. za q_0 vrijedi $q_0 = x_1(q_0) \cdot f(q_0)$. Kad to uvrstimo u relativnu uvjetovanost, $f(q_0)$ se skrati i ostaje

$$\kappa_{\mathrm{rel}} = x_1(q_0) \cdot f'(q_0) = -\frac{4 - \sqrt{16 - q_0}}{2\sqrt{16 - q_0}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{16 - q_0}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{\Delta}}.$$

Veza između apsolutne i relativne uvjetovanosti je

$$\kappa_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{2}\,(1 + 8\,\kappa_{\mathrm{abs}}) \quad \text{ili} \quad \kappa_{\mathrm{abs}} = \frac{1}{8}\,(2\,\kappa_{\mathrm{rel}} - 1).$$

Računanje rješenja $f(q_0)$ je **nestabilno** u odgovarajućem smislu (apsolutnom ili relativnom) ako (i samo ako) je apsolutna vrijednost odgovarajuće uvjetovanosti **vrlo velika**, tj. vrijedi $|\kappa_{\mathrm{abs}}| \gg 1$, odnosno, $|\kappa_{\mathrm{rel}}| \gg 1$. Kad se to događa?

- Oba izraza imaju $\sqrt{\Delta}$ u **nazivniku**. Zbog toga, vrijednost izraza je **velika** (po apsolutnoj vrijednosti), ako i samo ako je diskriminanta Δ "jako **mala**", tj. jednadžba ima dva "bliska" rješenja, što uključuje i slučaj $\Delta = 0$.

Dakle, za **obje** uvjetovanosti vrijedi sljedeći zaključak:

- Uvjetovanost je **velika**, tj. računanje je **nestabilno** u odgovarajućem smislu, ako i samo ako je q_0 **blizu** 16 (rub domene). U protivnom, računanje je stabilno.

Strogo govoreći, za apsolutnu uvjetovanost je bitno koliko je $\sqrt{\Delta}$ mali u **apsolutnom** smislu, a za relativnu uvjetovanost je bitno koliko je $\sqrt{\Delta}$ mali u **relativnom** smislu, obzirom na fiksni koeficijent $p = -8$. No, ovdje **nema** bitne razlike.

Primijetimo još da relativna uvjetovanost κ_{rel} ima korektno definiranu vrijednost i kad je $q_0 = 0$ ili $f(q_0) = 0$, iako sam pojam tada **nema** smisla.

(b) U točki $q_0 = 12$, apsolutna i relativna uvjetovanost funkcije f su

$$\kappa_{\mathrm{abs}} = -\frac{1}{4} = -0.2500000000,$$
$$\kappa_{\mathrm{rel}} = -\frac{1}{2} = -0.5000000000.$$

U točki $q_0 = 15.98$, **blizu** "opasnog" ruba 16, dobivamo

$$\kappa_{\mathrm{abs}} = -3.5355339059,$$
$$\kappa_{\mathrm{rel}} = -13.6421356237.$$

—— • ——

Zadatak 1.2.2. (NM 2016, 1. kolokvij, 2. zadatak, grupa B)

Zadana je funkcija $f(p) =$ veće rješenje kvadratne jednadžbe

$$x^2 + px + 9 = 0,$$

gdje je p realni parametar, a funkciju f promatramo na prirodnoj domeni, kad zadana jednadžba ima bar jedno realno rješenje ("veće" rješenje znači da uzimamo predznak $+$ pred korijenom). Promatramo uvjetovanost funkcije f za **male** promjene parametra p oko neke vrijednosti p_0 iz domene.

(a) Napišite izraze za apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točki p_0. Za koje vrijednosti p_0 je računanje vrijednosti $f(p_0)$ stabilno u apsolutnom, odnosno, u relativnom smislu, a za koje vrijednosti je nestabilno?

(b) Izračunajte apsolutnu i relativnu uvjetovanost funkcije f u točkama $p_0 = 10$ i $p_0 = 6.01$.

Rješenje. Rješenja zadane kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 36}}{2},$$

a tražena funkcijska vrijednost $f(p)$ je veće rješenje

$$f(p) = x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 36}}{2}.$$

Bar jedno realno rješenje dobivamo ako i samo ako je diskriminanta nenegativna

$$\Delta := p^2 - 36 \geq 0.$$

Prirodna domena funkcije f je skup svih točaka $p \in \mathbb{R}$, za koje vrijedi $|p| \geq 6$.

(a) Apsolutna i relativna uvjetovanost funkcije f, za **male** odgovarajuće promjene parametra p oko točke p_0 iz domene, izražavaju se preko derivacije funkcije f u točki p_0 (namjerno pišemo **bez** apsolutne vrijednosti, radi preglednosti)

$$\kappa_{\mathrm{abs}} := f'(p_0), \qquad \kappa_{\mathrm{rel}} = (\operatorname{cond} f)(p_0) := \frac{p_0}{f(p_0)} \cdot f'(p_0).$$

Sasvim općenito, **relativna** uvjetovanost je korektno definirana (ima smisla) kad je $p_0 \neq 0$ (u domeni) i $f(p_0) \neq 0$ (u kodomeni).

Derivaciju funkcije f u točki p_0 možemo zapisati na dva načina

$$\begin{aligned} f'(p_0) &= -\frac{1}{2} + \frac{p_0}{2\sqrt{p_0^2 - 36}} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_0}{\sqrt{\Delta}} - 1\right) \\ &= \frac{p_0 - \sqrt{p_0^2 - 36}}{2\sqrt{p_0^2 - 36}} = -\frac{f(p_0)}{\sqrt{p_0^2 - 36}} = -\frac{f(p_0)}{\sqrt{\Delta}}. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$\kappa_{\mathrm{abs}} = -\frac{1}{2} + \frac{p_0}{2\sqrt{p_0^2 - 36}} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_0}{\sqrt{\Delta}} - 1\right).$$

Kad drugi oblik $f'(p_0)$ uvrstimo u relativnu uvjetovanost, $f(p_0)$ se skrati i ostaje

$$\kappa_{\mathrm{rel}} = -\frac{p_0}{\sqrt{p_0^2 - 36}} = -\frac{p_0}{\sqrt{\Delta}}.$$

Veza između apsolutne i relativne uvjetovanosti je

$$\kappa_{\mathrm{rel}} = -2\,\kappa_{\mathrm{abs}} - 1 \quad \text{ili} \quad \kappa_{\mathrm{abs}} = -\frac{1}{2}\,(1 + \kappa_{\mathrm{rel}}).$$

Računanje rješenja $f(p_0)$ je **nestabilno** u odgovarajućem smislu (apsolutnom ili relativnom) ako (i samo ako) je apsolutna vrijednost odgovarajuće uvjetovanosti **vrlo velika**, tj. vrijedi $|\kappa_{\mathrm{abs}}| \gg 1$, odnosno, $|\kappa_{\mathrm{rel}}| \gg 1$. Kad se to događa?

- Oba izraza imaju $\sqrt{\Delta}$ u **nazivniku**, a u brojniku je sigurno $p_0 \neq 0$ (jer nula nije u domeni). Zbog toga, vrijednost izraza je **velika** (po apsolutnoj vrijednosti), ako i samo ako je diskriminanta Δ "jako **mala**", tj. jednadžba ima dva "bliska" rješenja, što uključuje i slučaj $\Delta = 0$.

Dakle, za **obje** uvjetovanosti vrijedi sljedeći zaključak:

- Uvjetovanost je **velika**, tj. računanje je **nestabilno** u odgovarajućem smislu, ako i samo ako je $|p_0|$ **blizu** 6 (rub domene). U protivnom, računanje je stabilno.

Strogo govoreći, za obje uvjetovanosti **nije** bitno koliko je $\sqrt{\Delta}$ mali u apsolutnom smislu. Bitno je koliko je omjer $\sqrt{\Delta}/p_0$ mali u **apsolutnom** smislu, tj. koliko je $\sqrt{\Delta}$ mali u **relativnom** smislu, obzirom na p_0.

Primijetimo još da relativna uvjetovanost κ_{rel} ima korektno definiranu vrijednost i kad je $f(p_0) = 0$, iako sam pojam tada **nema** smisla (a $p_0 = 0$ nije u domeni).

(b) U točki $p_0 = 10$, apsolutna i relativna uvjetovanost funkcije f su

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{abs}} &= \frac{1}{8} = 0.1250000000, \\ \kappa_{\text{rel}} &= -\frac{5}{4} = -1.2500000000. \end{aligned}$$

U točki $p_0 = 6.01$, **blizu** "opasnog" ruba 6, dobivamo

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{abs}} &= 8.1710755988, \\ \kappa_{\text{rel}} &= -17.3421511976. \end{aligned}$$

1.2.2 Loša formula, relativna uvjetovanost funkcije i popravak formule

Zadatak 1.2.3. (NM 2017, 1. kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Zadana je funkcija

$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x}, \quad x \in [0,1].$$

Objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po **ovoj** formuli u aritmetici računala, za vrlo male vrijednosti x.

(a) Izračunajte relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kad $x \to 0$. Iz toga izvedite zaključak je li računanje $f(x)$ stabilno u relativnom smislu, za male vrijednosti x.

(b) Ako je to potrebno i moguće, preuredite izraz za $f(x)$ tako da računanje u aritmetici računala bude stabilno za male x.

Rješenje. Za vrlo male vrijednosti x, $\sqrt{1-x}$ je vrlo blizu 1. Ako $f(x)$ računamo po **ovoj** formuli u aritmetici računala, kod oduzimanja $1 - \sqrt{1-x}$ mora doći do **katastrofalnog** kraćenja i **gubitka** relativne točnosti rezultata. Dakle, zadana formula je **nestabilni** algoritam za računanje $f(x)$. Ostaje vidjeti je li "krivac" **ova formula** (algoritam) ili je "krivac" sama **funkcija** f, tj. velika relativna uvjetovanost funkcije f u okolini nule.

(a) Za **male** relativne promjene argumenta oko točke $x \neq 0$ (tada je i $f(x) \neq 0$), relativna uvjetovanost funkcije f u točki x izražava se preko derivacije $f'(x)$

$$\kappa_{\mathrm{rel}} = (\mathrm{cond}\, f)(x) := \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Deriviranjem dobivamo

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$$

Kad ovo i polaznu formulu za $f(x)$ uvrstimo u relativnu uvjetovanost, izlazi

$$(\mathrm{cond}\, f)(x) = \frac{x}{2\left(1-\sqrt{1-x}\right)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x} - (1-x)}.$$

Na limesu $x \to 0$, zbog $1-x \to 1$, dobivamo neodređeni oblik $0/0$, pa limes računamo L'Hospitalovim pravilom (deriviramo brojnik i nazivnik). Dobivamo, redom,

$$\lim_{x\to 0} (\mathrm{cond}\, f)(x) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\dfrac{1}{2\sqrt{1}} + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{2}} = 1.$$

Kad je x jako mali, relativna uvjetovanost $(\mathrm{cond}\, f)(x)$ je **blizu** 1, tj. **nije** velika. Dakle, računanje $f(x)$ bi trebalo biti **stabilno** u relativnom smislu. U prijevodu, "krivac" je zadana **formula** (kao algoritam), a **ne** sama funkcija f.

(b) Treba "prevesti" zadanu formulu u matematički ekvivalentnu, ali tako da u novoj formuli **nema** kraćenja. To se postiže "deracionalizacijom" formule — tako da brojnik i nazivnik (trenutno jednak 1) pomnožimo s $1 + \sqrt{1-x}$. Dobivamo

$$f(x) = \frac{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1-(1-x)}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}.$$

Za jako male x, u zadnjem izrazu na desnoj strani **nema** kraćenja. To je **stabilni** algoritam (ili formula) za računanje $f(x)$.

Zadatak 1.2.4. (NM 2017, 1. kolokvij, 2. zadatak, grupa B)

Zadana je funkcija
$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1, \quad x \in [0,1].$$
Objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po **ovoj** formuli u aritmetici računala, za vrlo male vrijednosti x.

(a) Izračunajte relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kad $x \to 0$. Iz toga izvedite zaključak je li računanje $f(x)$ stabilno u relativnom smislu, za male vrijednosti x.

(b) Ako je to potrebno i moguće, preuredite izraz za $f(x)$ tako da računanje u aritmetici računala bude stabilno za male x.

Rješenje. Za vrlo male vrijednosti x, $\sqrt{1+x^2}$ je vrlo blizu 1. Ako $f(x)$ računamo po **ovoj** formuli u aritmetici računala, kod oduzimanja $\sqrt{1+x^2} - 1$ mora doći do **katastrofalnog** kraćenja i **gubitka** relativne točnosti rezultata. Dakle, zadana formula je **nestabilni** algoritam za računanje $f(x)$. Ostaje vidjeti je li "krivac" **ova formula** (algoritam) ili je "krivac" sama **funkcija** f, tj. velika relativna uvjetovanost funkcije f u okolini nule.

(a) Za **male** relativne promjene argumenta oko točke $x \neq 0$ (tada je i $f(x) \neq 0$), relativna uvjetovanost funkcije f u točki x izražava se preko derivacije $f'(x)$
$$\kappa_{\text{rel}} = (\operatorname{cond} f)(x) := \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x).$$
Deriviranjem dobivamo
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Kad ovo i polaznu formulu za $f(x)$ uvrstimo u relativnu uvjetovanost, izlazi
$$(\operatorname{cond} f)(x) = \frac{x^2}{\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2}{(1+x^2) - \sqrt{1+x^2}}.$$
Na limesu $x \to 0$, zbog $1+x^2 \to 1$, dobivamo neodređeni oblik $0/0$, pa limes računamo L'Hospitalovim pravilom (deriviramo brojnik i nazivnik). Dobivamo, redom,
$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{cond} f)(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2 - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{2}{2 - \dfrac{1}{\sqrt{1}}} = \frac{2}{1} = 2.$$
Kad je x jako mali, relativna uvjetovanost $(\operatorname{cond} f)(x)$ je **blizu** 2, tj. **nije** velika. Dakle, računanje $f(x)$ bi trebalo biti **stabilno** u relativnom smislu. U prijevodu, "krivac" je zadana **formula** (kao algoritam), a **ne** sama funkcija f.

(b) Treba "prevesti" zadanu formulu u matematički ekvivalentnu, ali tako da u novoj formuli **nema** kraćenja. To se postiže "deracionalizacijom" formule — tako da brojnik i nazivnik (trenutno jednak 1) pomnožimo s $\sqrt{1+x^2} + 1$. Dobivamo
$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+x^2} + 1\right)}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{(1+x^2) - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1}.$$
Za jako male x, u zadnjem izrazu na desnoj strani **nema** kraćenja. To je **stabilni** algoritam (ili formula) za računanje $f(x)$.

1.2.3 Relativna uvjetovanost rješenja linearnog sustava reda 2

Zadatak 1.2.5. (NM 2019, 1. kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Zadan je linearni sustav $Ax = b$, s matricom A reda 2,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

U tom sustavu, element a_{11} varira kao realni parametar, a ostali elementi matrice A i vektor b su fiksni (ne variraju). Promatramo uvjetovanost komponenti rješenja x_1 i x_2, za **male** promjene varijabilnog elementa matrice A, oko neke konkretne vrijednosti a_{11}.

(a) Kad je relativna uvjetovanost komponente x_k (po a_{11}) korektno definirana, tj. ima smisla? Koje oblike uvjetovanosti ima smisla gledati kad to nije slučaj? Precizno objasnite.

(b) Uz odgovarajuće pretpostavke iz (a), nađite relativnu uvjetovanost komponenti x_1 i x_2 po parametru a_{11}. Kad je računanje x_1, x_2 stabilno u relativnom smislu? Pokažite da relativna uvjetovanost x_1 ne ovisi o vektoru b, a relativna uvjetovanost x_2 ovisi samo o A i omjeru x_1/x_2. Ako je $a_{22} = 0$, što se događa s x_1?

(c) Izračunajte relativne uvjetovanosti komponenti x_1 i x_2, po parametru $a_{11} = c$, za sustav u kojem je

$$A = \begin{bmatrix} c & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

—— • ——

Uvod u rješenje. U zadanom linearnom sustavu $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

jedan element matrice A varira kao realni parametar, a ostali elementi matrice A i vektor b su fiksni (ne variraju). Označimo **varijabilni** element s a_{ij} (indeksi i, j su različiti za pojedine grupe).

Promatramo uvjetovanost komponenti rješenja x_1 i x_2, za **male** promjene varijabilnog elementa matrice A, oko neke konkretne vrijednosti a_{ij}. Svaku komponentu rješenja x_k gledamo kao **zasebnu** funkciju f_k varijabilnog parametra a_{ij},

$$x_k = f_k(a_{ij}), \quad k = 1, 2,$$

tj. f_k je realna (skalarna) funkcija jedne realne varijable, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ograničenje na **male** promjene parametra oko neke fiksne vrijednosti a_{ij}, znači da gledamo **limes** omjera odgovarajućih promjena u kodomeni i domeni, kad promjena teži prema nula. Dakle, tražene uvjetovanosti ovise o derivaciji funkcije f_k po njezinom argumentu a_{ij} (u točki a_{ij}).

Umjesto standardne "kratke" oznake f_k', derivaciju pišemo preko diferencijala

$$\frac{df_k}{da_{ij}},$$

zato da se jasno vidi po **kojoj** varijabli se derivira. Osim toga, radi preglednosti, sve formule za uvjetovanost pišemo **bez** apsolutne vrijednosti cijelog izraza.

(a) Za korektan odgovor na ovaj dio zadatka, **nije** potrebno eksplicitno izračunati rješenja sustava x_k, za $k = 1, 2$. Dovoljno je znati da je $x_k = f_k(a_{ij})$, tj. što ovisi o čemu!

Sasvim općenito, **relativna** uvjetovanost x_k po a_{ij} je korektno definirana (ima smisla) kad je $a_{ij} \neq 0$ (u domeni) i $x_k \neq 0$ (u kodomeni). Pripadna formula za **male** (relativne) promjene u domeni i kodomeni je

$$\kappa_{\text{rel}} = (\text{cond}\, f_k)(a_{ij}) := \frac{a_{ij}}{x_k} \cdot \frac{df_k}{da_{ij}}(a_{ij}).$$

Ako je $a_{ij} = 0$ (u domeni) i $x_k \neq 0$, onda relativna greška u a_{ij} **nema** smisla (nije ograničena). Zato gledamo **apsolutnu** grešku u a_{ij} i relativnu u x_k. Pripadni "miješani" broj uvjetovanosti je

$$(\text{cond}\, f_k)(a_{ij}) := \frac{1}{x_k} \cdot \frac{df_k}{da_{ij}}(a_{ij}).$$

Analogno, za $a_{ij} \neq 0$ i $x_k = 0$ (u kodomeni), gledamo **apsolutnu** grešku u x_k i relativnu u a_{ij}. Pripadni "miješani" broj uvjetovanosti je

$$(\text{cond}\, f_k)(a_{ij}) := a_{ij} \cdot \frac{df_k}{da_{ij}}(a_{ij}).$$

Konačno, ako je $a_{ij} = 0$ i $x_k = 0$, onda gledamo apsolutne greške na oba mjesta, a pripadna **apsolutna** uvjetovanost je baš "obična" derivacija

$$\kappa_{\text{abs}} = (\text{cond}\, f_k)(a_{ij}) := \frac{df_k}{da_{ij}}(a_{ij}).$$

Za nalaženje relativne uvjetovanosti u (b) i (c) dijelu, pretpostavljamo da je $a_{ij} \neq 0$ i $x_1 \neq 0$, odnosno, $x_2 \neq 0$, ovisno o tome koju komponentu rješenja promatramo.

U nastavku rješenja, treba naći eksplicitne izraze za komponente rješenja x_1 i x_2, u ovisnosti o elementima matrice A i vektora b. Najlakši način za to je korištenjem Cramerovog pravila

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}, \quad k = 1, 2,$$

gdje je A_k matrica koju dobijemo iz A, tako da k-ti stupac zamijenimo vektorom b,

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}.$$

Potrebne determinante su, redom,

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \det(A_1) = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \quad \det(A_2) = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

a tražene komponente rješenja su

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Kad ove formule interpretiramo kao funkcije varijabilnog parametra a_{ij}, tj. kao $x_k = f_k(a_{ij})$, dobivamo eksplicitne izraze za funkcijske vrijednosti $f_k(a_{ij})$.

Uočiti da $\det(A)$ (u nazivniku) sigurno ovisi o a_{ij}. S druge strane, u brojnicima, samo jedna od determinanti ovisi o parametru a_{ij}, a druga ne.

Na kraju, da bi rješenja x_1, x_2 bila **korektno** definirana, mora biti $\det(A) \neq 0$, gledano kao funkcija od a_{ij}. Dakle, iz domene funkcija f_1 i f_2 treba izbaciti **nultočku** determinante i tu pretpostavku trebati dodati u (b) i (c) dijelu. Upravo u okolini te nultočke očekujemo **veliku** uvjetovanost oba rješenja! Međutim, to ne mora biti jedina točka oko koje je relativna uvjetovanost nekog rješenja velika.

—— • ——

Rješenje. Komponente rješenja x_1 i x_2 gledamo kao funkcije varijabilnog parametra a_{11}, tj. u obliku $x_k = f_k(a_{11})$, za $k = 1, 2$. Onda je (Cramerovo pravilo)

$$x_1 = f_1(a_{11}) = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = f_2(a_{11}) = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

(b) Nominalno, relativna uvjetovanost komponente x_k po a_{11} ima smisla ako je $a_{11} \neq 0$ i $x_k \neq 0$. Dodatni uvjet $\det(A) \neq 0$ pojavit će se u izrazima za relativnu uvjetovanost!

Za početak, računamo obične derivacije funkcija f_1 i f_2 po a_{11}, u točki a_{11}. U izrazu za x_1, samo nazivnik (determinanta) ovisi o a_{11}, pa je

$$\frac{df_1}{da_{11}} = (a_{22}b_1 - a_{12}b_2) \cdot \frac{(-1) \cdot a_{22}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} = -\frac{a_{22}(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}.$$

U izrazu za x_2, brojnik i nazivnik ovise o a_{11}, pa je (derivacija kvocijenta)

$$\frac{df_2}{da_{11}} = \frac{b_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (a_{11}b_2 - a_{21}b_1)a_{22}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} = \frac{a_{21}(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}.$$

Uočimo da oba izraza sadrže x_1 kao faktor. Onda ih možemo i ovako zapisati

$$\frac{df_1}{da_{11}} = -\frac{a_{22}}{\det(A)}\, x_1, \qquad \frac{df_2}{da_{11}} = \frac{a_{21}}{\det(A)}\, x_1.$$

Iz ovog zapisa, relativne uvjetovanosti (oznaka r_k) komponenti x_k po a_{11} su

$$r_1 := \frac{a_{11}}{x_1} \cdot \frac{df_1}{da_{11}} = -\frac{a_{11}a_{22}}{\det(A)}, \qquad r_2 := \frac{a_{11}}{x_2} \cdot \frac{df_2}{da_{11}} = \frac{a_{11}a_{21}}{\det(A)} \cdot \frac{x_1}{x_2}.$$

Odavde se odmah vidi da relativna uvjetovanost x_1 **ne ovisi** o b, a relativna uvjetovanost x_2 ovisi samo o A i **omjeru** x_1/x_2.

Ako je $a_{22} = 0$, iz druge jednadžbe sustava dobivamo da je $x_1 = b_2/a_{21}$, tj. x_1 je **konstantan** (ne ovisi o a_{11}). Apsolutna i relativna uvjetovanost od x_1 su jednake 0.

Računanje komponente x_k je **nestabilno** u relativnom smislu ako (i samo ako) je apsolutna vrijednost relativne uvjetovanosti r_k **vrlo velika**, tj. vrijedi $|r_k| \gg 1$.

- Očita mogućnost da **obje** relativne uvjetovanosti r_1, r_2 budu velike je u slučaju kad je $\det(A) \approx 0$ — toliko blizu nule, da je nazivnik mnogo **manji** od brojnika.
- Dodatno, za x_2, opasnost nastupa kad je $x_2 \approx 0$, odnosno, kad je omjer x_1/x_2 vrlo velik. To se i očekuje, jer pripadna relativna uvjetovanost nije definirana za $x_2 = 0$.

Stvarno, obje mogućnosti traže **detaljniju** analizu, ovisno o vrijednostima preostalih koeficijenata u sustavu. Recimo, za r_1 to ide ovako (uz pretpostavke $a_{11}, a_{22} \neq 0$)

$$r_1 = -\frac{a_{11}a_{22}}{\det(A)} = -\frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = -\frac{1}{1 - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}.$$

Dakle, **nije** bitno koliko je $\det(A)$ blizu 0 (u apsolutnom smislu), već je bitan **omjer** članova u determinanti — koliko je on blizu 1. To kaže koliko je **kraćenje** članova (u relativnom smislu) kod računanja $\det(A)$.

(c) U linearnom sustavu $Ax = b$, zadano je

$$A = \begin{bmatrix} c & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Determinante matrica za Cramerovo pravilo su

$$\det(A) = 6(c-1), \quad \det(A_1) = 12, \quad \det(A_2) = 4(c-2).$$

Komponente x_1, x_2 rješenja linearnog sustava $Ax = b$ su

$$x_1 = f_1(c) = \frac{2}{c-1},$$

$$x_2 = f_2(c) = \frac{2(c-2)}{3(c-1)}.$$

Treba naći njihove relativne uvjetovanosti po parametru c, uz pretpostavku da je $c \neq 0$. Izravnim uvrštavanjem u ranije formule ili deriviranjem, dobivamo

$$r_1 = \frac{c}{x_1} \cdot \frac{df_1}{dc} = -\frac{c\,a_{22}}{\det(A)} = -\frac{6c}{6(c-1)} = -\frac{c}{c-1},$$

$$r_2 = \frac{c}{x_2} \cdot \frac{df_2}{dc} = \frac{c\,a_{21}}{\det(A)} \cdot \frac{x_1}{x_2} = \frac{2c}{6(c-1)} \cdot \frac{3}{c-2} = \frac{c}{(c-1)(c-2)}.$$

Računanje x_1, x_2 je nestabilno u relativnom smislu za $c \approx 1$ (tada je $\det(A) \approx 0$). Komponenta x_2 je nestabilna još i za $c \approx 2$ (što odgovara $x_2 \approx 0$). Uočiti da se **ne** može dogoditi da je $x_1 \approx 0$.

2 Linearni sustavi

2.1 Linearni sustav LR (LU) faktorizacijom s parcijalnim pivotiranjem

Uvod i oznake. LR faktorizacija zadane matrice A, reda n, s **parcijalnim pivotiranjem** ima oblik $PA = LR$, gdje je L donja trokutasta matrica s jediničnom dijagonalom, R je gornja trokutasta matrica, a P je matrica permutacije dobivena parcijalnim pivotiranjem. Transformaciju matrice A u gornju trokutastu matricu R provodimo u nizu od $n-1$ koraka, za $k = 1, \ldots, n-1$. Na početku stavljamo da je $A^{(1)} := A$. U k-tom koraku transformacije, polazna matrica je $A^{(k)}$. Iz nje, Gaussovim eliminacijama s parcijalnim pivotiranjem računamo novu matricu $A^{(k+1)}$ na sljedeći način

$$\begin{aligned} \widetilde{A}^{(k)} &= P^{(k)} A^{(k)} && \text{(pivotiranje)}, \\ A^{(k+1)} &= M^{(k)} \widetilde{A}^{(k)} && \text{(eliminacija } k\text{-tog stupca)}. \end{aligned}$$

Matrica $M^{(k)}$ jednaka je jediničnoj matrici I, s tim da u k-tom stupcu ispod dijagonale sadrži negativne multiplikatore iz eliminacije

$$M_{ik}^{(k)} = -m_{ik} = -\frac{\widetilde{A}_{ik}^{(k)}}{\widetilde{A}_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \ldots, n.$$

Matrica $A^{(k+1)}$ ima prvih k stupaca u gornjetrokutastom obliku, tj. njihovi elementi ispod glavne dijagonale jednaki su nula. Prvih $k-1$ redaka te matrice jednaki su odgovarajućim recima matrice $A^{(k)}$, a k-ti redak je rezultat pivotiranja i ne transformira se. Preostale elemente matrice $A^{(k+1)}$ računamo po formuli

$$A_{ij}^{(k+1)} = \widetilde{A}_{ij}^{(k)} - m_{ik} \widetilde{A}_{kj}^{(k)}, \quad i, j = k+1, \ldots, n.$$

Na kraju ovog postupka dobivamo da je $A^{(n)} = R$.

Uz oznaku $R_k := A^{(k+1)}$, stanje **nakon** k-tog koraka transformacije možemo zapisati u obliku sljedeće faktorizacije polazne matrice A

$$P_k A = L_k R_k = L_k A^{(k+1)},$$

gdje su matrice P_k i L_k produkti

$$P_k = P^{(k)} \cdots P^{(1)}, \qquad L_k = P_k \cdot \big(P^{(1)}\big)^{-1} \big(M^{(1)}\big)^{-1} \cdots \big(P^{(k)}\big)^{-1} \big(M^{(k)}\big)^{-1}.$$

Matrica L_k jednaka je jediničnoj matrici, osim što u strogo donjem trokutu, na prvih k stupaca, sadrži permutirane sve dotadašnje multiplikatore m_{ij}, za $j \leq k$ i $i \geq j$. Te permutacije upravo odgovaraju dotadašnjim permutacijama redaka.

Na početku, prije prvog koraka, možemo uzeti da je $P_0 = L_0 = I$ i $R_0 = A$.

Završne matrice $P := P_{n-1}$, $L := L_{n-1}$ i $R := R_{n-1}$ su upravo tražene matrice iz LR faktorizacije matrice A, tj. vrijedi $PA = LR$.

U zapisu "na ruke", netrivijalne elemente matrica L_k i R_k pišemo **zajedno**, u jednoj matrici $\widehat{A}^{(k)}$ — koja sadrži netrivijalne elemente matrica $L_k - I$ i R_k, tj. vrijedi

$$\widehat{A}^{(k)} = (L_k - I) + R_k.$$

—— • ——

Zadatak 2.1.1. (NM 2012, popravni kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -11 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

Rješenje. Prvo računamo LR faktorizaciju matrice A, s parcijalnim pivotiranjem. Na početku je $P_0 = L_0 = I$, $R_0 = A$.

Eliminacija elemenata 1. stupca. Zamjena 1. i 2. retka. Nakon eliminacije, dobivamo

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{3} & 1 & & \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 \\ & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ & -1 & -\frac{4}{3} & 3 \\ & 2 & \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}.$$

Eliminacija elemenata 2. stupca. Zamjena 2. i 4. retka. Nakon eliminacije, dobivamo

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{2}{3} & 1 & & \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 \\ & 2 & \frac{1}{3} & -2 \\ & & -\frac{7}{6} & 2 \\ & & \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Eliminacija elemenata 3. stupca. Zamjena 3. i 4. retka. Nakon eliminacije, dobivamo

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{2}{3} & 1 & & \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & 1 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 \\ & 2 & \frac{1}{3} & -2 \\ & & \frac{5}{3} & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Za matrice $P = P_3$, $L = L_3$ i $R = R_3$ vrijedi da je $PA = LR$.

Sad rješavamo linearni sustav $PAx = Pb$ u obliku $LRx = Pb$. To radimo u dva koraka. Prvi sustav $Ly = Pb$ rješavamo supstitucijom unaprijed.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{2}{3} & 1 & & \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ -3 \\ -11 \end{bmatrix} \implies y = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Drugi sustav $Rx = y$ rješavamo supstitucijom unatrag.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 \\ & 2 & \frac{1}{3} & -2 \\ & & \frac{5}{3} & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \implies x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.1.2. (NM 2012, popravni kolokvij, 2. zadatak, grupa B)

Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

Rješenje. Prvo računamo LR faktorizaciju matrice A, s parcijalnim pivotiranjem. Na početku je $P_0 = L_0 = I$, $R_0 = A$.

Eliminacija elemenata 1. stupca. Zamjena 1. i 2. retka. Nakon eliminacije, dobivamo

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{4} & 1 & & \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ & -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} \\ & \frac{5}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eliminacija elemenata 2. stupca. Zamjena 2. i 3. retka. Nakon eliminacije, dobivamo

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{4} & 1 & & \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{5} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ & \frac{5}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ & & \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ & & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eliminacija elemenata 3. stupca. Zamjena 3. i 4. retka. Nakon eliminacije, dobivamo

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{4} & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ & \frac{5}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ & & -2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Za matrice $P = P_3$, $L = L_3$ i $R = R_3$ vrijedi da je $PA = LR$.

Sad rješavamo linearni sustav $PAx = Pb$ u obliku $LRx = Pb$. To radimo u dva koraka. Prvi sustav $Ly = Pb$ rješavamo supstitucijom unaprijed.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{4} & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} -17 \\ -5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = \begin{bmatrix} -17 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Drugi sustav $Rx = y$ rješavamo supstitucijom unatrag.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 3 \\ & \frac{5}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ & & -2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -17 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2.2 LR (LU) faktorizacija, parcijalno pivotiranje, pivotni rast

Uvod i oznake. U LR faktorizaciji matrice A **bez pivotiranja** uzimamo da je $P = I$, pa je $A = LR$. Računanje providimo na isti način, s tim da je $P^{(k)} = I$, tj. $\widetilde{A}^{(k)} = A^{(k)}$, za $k = 1, \ldots, n-1$. Međutim, ova faktorizacija postoji (tj. navedeni algoritam je provediv) ako i samo ako su svi multiplikatori dobro definirani, tj. ako vrijedi $A_{kk}^{(k)} \neq 0$, za $k = 1, \ldots, n-1$.

Pivotni rast ili faktor rasta u ovoj faktorizaciji definiran je kao omjer

$$\rho_n = \frac{\max\limits_{i,j,k} \left|a_{ij}^{(k)}\right|}{\max\limits_{i,j} \left|a_{ij}\right|}.$$

Radi preglednosti, računamo ga postupno, do svakog pojedinog koraka transformacije,

$$\rho_n^{(k)} = \frac{\max\limits_{i,j,\,\ell\leq k} \left|a_{ij}^{(\ell+1)}\right|}{\max\limits_{i,j} \left|a_{ij}\right|} = \frac{\max\limits_{i,j,\,\ell\leq k} \left|(R_\ell)_{ij}\right|}{\max\limits_{i,j} \left|a_{ij}\right|},$$

pa je $\rho_n = \rho_n^{(n-1)}$.

Najveći **omjer** odgovarajućih elemenata u matricama $|L|\,|R|$ i $|PA|$ označavamo s

$$o_n = \max_{i,j} \frac{\big(|L|\,|R|\big)_{ij}}{\left|(PA)_{ij}\right|} = \max_{i,j} \frac{\big(|L|\,|R|\big)_{ij}}{\big(|PA|\big)_{ij}}.$$

Za LR faktorizaciju **bez** pivotiranja, ove dvije veličine označvamo s ρ_n^N i o_n^N, a za faktorizaciju s **parcijalnim pivotiranjem**, oznake su ρ_n^P i o_n^P.

Obje veličine ρ_n i o_n služe kao mjera **stabilnosti** odgovarajuće LR faktorizacije — što je dobivena vrijednost **veća**, faktorizacija je **manje** stabilna, jer dolazi do "većeg" **kraćenja** u računanju produkta LR (konačni rezultat je matrica A, odnosno, PA).

—— • ——

Zadatak 2.2.1. (NM 2012, 1. kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -8 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizacije matrice A

(a) bez pivotiranja, tj. $A = LR$,

(b) korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

Izračunajte pivotni rast u ovim faktorizacijama i najveći omjer odgovarajućih elemenata u matricama: (a) $|L|\,|R|$ i $|A|$, odnosno, (b) $|L|\,|R|$ i $|PA|$. Čemu služe ove dvije veličine — pivotni rast i najveći omjer?

Rješenje. Najveća apsolutna vrijednost elemenata polazne matrice A je $|a_{13}| = 8$.

(a) U LR faktorizaciji matrice A **bez pivotiranja**, u svakom koraku uzimamo da je $P^{(k)} = I$, pa na kraju dobivamo da je $P = I$ i $A = LR$.

Eliminacija elemenata 1. stupca. Nakon eliminacije, dobivamo

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ & 9 & 6 \\ & 34 & 6 \end{bmatrix}.$$

Trenutni pivotni rast je $\rho_3^{(1)} = 34/8 = 17/4$.

Eliminacija elemenata 2. stupca. Nakon eliminacije, dobivamo

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -8 & \frac{34}{9} & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ & 9 & 6 \\ & & -\frac{50}{3} \end{bmatrix}.$$

Za matrice $L = L_2$ i $R = R_2$ vrijedi da je $A = LR$. Konačni pivotni rast je $\rho_3^N = 17/4$.

Produkt izračunatih matrica $|L|$ i $|R|$ je

$$|L|\,|R| = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 8 & \frac{34}{9} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ & 9 & 6 \\ & & \frac{50}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 17 & 8 \\ 8 & 66 & \frac{142}{3} \end{bmatrix}.$$

Dijeljenjem odgovarajućih elemenata ove matrice i matrice

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

izlazi da na mjestu $(3, 2)$ dobivamo najveći omjer elemenata $o_3^N = 66/2 = 33$.

(b) Računamo LR faktorizaciju matrice A s **parcijalnim pivotiranjem**.

Eliminacija elemenata 1. stupca. Zamjena 1. i 3. retka. Nakon eliminacije, dobivamo

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{4} & 1 & \\ -\frac{1}{8} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ & \frac{17}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Trenutni pivotni rast je $\rho_3^{(1)} = 8/8 = 1$.

Eliminacija elemenata 2. stupca. Zamjena 2. i 3. retka. Nakon eliminacije, dobivamo

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{8} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{17} & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ & \frac{17}{4} & \frac{3}{4} \\ & & \frac{75}{17} \end{bmatrix}.$$

Za matrice $P = P_2$, $L = L_2$ i $R = R_2$ vrijedi da je $PA = LR$. Konačni pivotni rast je $\rho_3^P = 1$.

Produkt izračunatih matrica $|L|$ i $|R|$ je

$$|L|\,|R| = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{8} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{17} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 \\ & \frac{17}{4} & \frac{3}{4} \\ & & \frac{75}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dijeljenjem odgovarajućih elemenata ove matrice i matrice

$$|PA| = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

izlazi da na mjestu $(3,3)$ dobivamo najveći omjer elemenata $o_3^P = 5/4$.

Obje veličine ρ_n i o_n služe kao mjera **stabilnosti** odgovarajuće LR faktorizacije — što je dobivena vrijednost **veća**, faktorizacija je **manje** stabilna, jer dolazi do "većeg" **kraćenja** u računanju produkta LR (konačni rezultat je matrica A, odnosno, PA).

Usporedbom dobivenih vrijednosti

$$\rho_3^N = \frac{17}{4} = 4.25, \quad o_3^N = 33, \qquad \rho_3^P = 1, \quad o_3^P = \frac{5}{4} = 1.25,$$

vidimo da je LR faktorizacija s parcijalnim pivotiranjem stabilnija.

2.3 Faktorizacija Choleskog i linearni sustav

Zadatak 2.3.1. (NM 2012, 1. kolokvij, 3. zadatak, grupa A)

Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & -8 & 0 \\ 6 & -8 & 17 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -29 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Faktorizacija Choleskog zadane matrice A, reda n, ima oblik $A = R^T R$, gdje je R gornja trokutasta matrica s pozitivnim dijagonalnim elementima. Elemente matrice R računamo stupac po stupac, ili redak po redak, po formulama

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2},$$
$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} \, r_{kj} \right), \quad i < j,$$

za $i = 1, \ldots, n$.

Dobivamo da je $A = R^T R$, gdje je

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ & 2 & -3 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje linearnog sustava $Ax = b$, kad uvrstimo $A = R^T R$, svodi se na rješavanje dva trokutasta linearna sustava

$$R^T y = b, \quad Rx = y.$$

Sustav $R^T y = b$ rješavamo supstitucijom unaprijed

$$y_1 = \frac{b_1}{r_{11}}, \qquad y_i = \frac{1}{r_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji} \, y_j \right), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Dobivamo

$$\begin{bmatrix} 3 & & & \\ -1 & 2 & & \\ 2 & -3 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -29 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Sustav $Rx = y$ rješavamo supstitucijom unatrag

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}}, \qquad x_i = \frac{1}{r_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij} \, x_j \right), \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

Dobivamo

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ & 2 & -3 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dugačko rješenje. Polazna matrica A je

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & -8 & 0 \\ 6 & -8 & 17 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ako elemente matrice R računamo redak po redak, dobivamo redom sljedeće rezultate. Prvi redak:

$$\begin{aligned} r_{11} &:= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3, \\ r_{12} &:= \frac{1}{r_{11}}\, a_{12} = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1, \\ r_{13} &:= \frac{1}{r_{11}}\, a_{13} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2, \\ r_{14} &:= \frac{1}{r_{11}}\, a_{14} = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Drugi redak:

$$\begin{aligned} r_{22} &:= \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{5 - (-1)^2} = \sqrt{4} = 2, \\ r_{23} &:= \frac{1}{r_{22}}\, (a_{23} - r_{12} r_{13}) = \frac{1}{2} \cdot \big(-8 - (-1) \cdot 2\big) = \frac{1}{2} \cdot (-6) = -3, \\ r_{24} &:= \frac{1}{r_{22}}\, (a_{24} - r_{12} r_{14}) = \frac{1}{2} \cdot \big(0 - (-1) \cdot 0\big) = \frac{1}{2} \cdot (0) = 0. \end{aligned}$$

Treći redak:

$$\begin{aligned} r_{33} &:= \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{17 - 2^2 - (-3)^2} = \sqrt{4} = 2, \\ r_{34} &:= \frac{1}{r_{33}}\, (a_{34} - r_{13} r_{14} - r_{23} r_{24}) = \frac{1}{2} \cdot \big(2 - 2 \cdot 0 - (-3) \cdot 0\big) = \frac{1}{2} \cdot (2) = 1. \end{aligned}$$

Na kraju, dijagonalni element u četvrtom retku je

$$r_{44} := \sqrt{a_{44} - r_{14}^2 - r_{24}^2 - r_{34}^2} = \sqrt{10 - 0^2 - 0^2 - 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Dobivamo da je $A = R^T R$, gdje je

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ & 2 & -3 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadani vektor b desne strane sustava $Ax = b$ je

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -29 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rješenje sustava $R^T y = b$

$$\begin{bmatrix} 3 & & & \\ -1 & 2 & & \\ 2 & -3 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -29 \\ 4 \end{bmatrix},$$

supstitucijom unaprijed po elementima vektora y, je

$$\begin{aligned}
y_1 &:= \frac{b_1}{r_{11}} = \frac{3}{3} = 1, \\
y_2 &:= \frac{1}{r_{22}}(b_2 - r_{12}y_1) = \frac{1}{2} \cdot \big(13 - (-1) \cdot 1\big) = \frac{1}{2} \cdot (14) = 7, \\
y_3 &:= \frac{1}{r_{33}}(b_3 - r_{13}y_1 - r_{23}y_2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big(-29 - 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 7\big) = \frac{1}{2} \cdot (-10) = -5, \\
y_4 &:= \frac{1}{r_{44}}(b_4 - r_{14}y_1 - r_{24}y_2 - r_{34}y_3) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \big(4 - 0 \cdot 1 - 0 \cdot 7 - 1 \cdot (-5)\big) = \frac{1}{3} \cdot (9) = 3.
\end{aligned}$$

Konačno rješenje za y je

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 & 3 \end{bmatrix}^T.$$

Rješenje sustava $Rx = y$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ & 2 & -3 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

supstitucijom unatrag po elementima vektora x, je

$$\begin{aligned}
x_4 &:= \frac{y_4}{r_{44}} = \frac{3}{3} = 1, \\
x_3 &:= \frac{1}{r_{33}}(y_3 - r_{34}x_4) = \frac{1}{2} \cdot \big(-5 - 1 \cdot 1\big) = \frac{1}{2} \cdot (-6) = -3, \\
x_2 &:= \frac{1}{r_{22}}(y_2 - r_{23}x_3 - r_{24}x_4) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \big(7 - (-3) \cdot (-3) - 0 \cdot 1\big) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1, \\
x_1 &:= \frac{1}{r_{11}}(y_1 - r_{12}x_2 - r_{13}x_3 - r_{14}x_4) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \big(1 - (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) - 0 \cdot 1\big) = \frac{1}{3} \cdot (6) = 2.
\end{aligned}$$

Konačno rješenje za x je

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.3.2. (NM 2012, 1. kolokvij, 3. zadatak, grupa B)

Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 13 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 2 & -8 & 19 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -45 \\ 32 \\ -39 \end{bmatrix}.$$

Rješenje. Faktorizacija Choleskog zadane matrice A, reda n, ima oblik $A = R^T R$, gdje je R gornja trokutasta matrica s pozitivnim dijagonalnim elementima. Elemente matrice R računamo stupac po stupac, ili redak po redak, po formulama

$$r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2},$$
$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right), \quad i < j,$$

za $i = 1, \ldots, n$.

Dobivamo da je $A = R^T R$, gdje je

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ & 2 & -2 & 1 \\ & & 2 & -3 \\ & & & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje linearnog sustava $Ax = b$, kad uvrstimo $A = R^T R$, svodi se na rješavanje dva trokutasta linearna sustava

$$R^T y = b, \quad Rx = y.$$

Sustav $R^T y = b$ rješavamo supstitucijom unaprijed

$$y_1 = \frac{b_1}{r_{11}}, \qquad y_i = \frac{1}{r_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji} y_j \right), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -3 & 2 & & \\ 0 & -2 & 2 & \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 9 \\ -45 \\ 32 \\ -39 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Sustav $Rx = y$ rješavamo supstitucijom unatrag

$$x_n = \frac{y_n}{r_{nn}}, \qquad x_i = \frac{1}{r_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij} x_j \right), \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

Dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ & 2 & -2 & 1 \\ & & 2 & -3 \\ & & & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dugačko rješenje. Polazna matrica A je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 13 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 2 & -8 & 19 \end{bmatrix}.$$

Ako elemente matrice R računamo redak po redak, dobivamo redom sljedeće rezultate. Prvi redak:

$$\begin{aligned} r_{11} &:= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1, \\ r_{12} &:= \frac{1}{r_{11}}\, a_{12} = \frac{1}{1} \cdot (-3) = -3, \\ r_{13} &:= \frac{1}{r_{11}}\, a_{13} = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0, \\ r_{14} &:= \frac{1}{r_{11}}\, a_{14} = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Drugi redak:

$$\begin{aligned} r_{22} &:= \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{13 - (-3)^2} = \sqrt{4} = 2, \\ r_{23} &:= \frac{1}{r_{22}}\, (a_{23} - r_{12}r_{13}) = \frac{1}{2} \cdot \big(-4 - (-3) \cdot 0\big) = \frac{1}{2} \cdot (-4) = -2, \\ r_{24} &:= \frac{1}{r_{22}}\, (a_{24} - r_{12}r_{14}) = \frac{1}{2} \cdot \big(2 - (-3) \cdot 0\big) = \frac{1}{2} \cdot (2) = 1. \end{aligned}$$

Treći redak:

$$\begin{aligned} r_{33} &:= \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{8 - 0^2 - (-2)^2} = \sqrt{4} = 2, \\ r_{34} &:= \frac{1}{r_{33}}\, (a_{34} - r_{13}r_{14} - r_{23}r_{24}) = \frac{1}{2} \cdot \big(-8 - 0 \cdot 0 - (-2) \cdot 1\big) = \frac{1}{2} \cdot (-6) = -3. \end{aligned}$$

Na kraju, dijagonalni element u četvrtom retku je

$$r_{44} := \sqrt{a_{44} - r_{14}^2 - r_{24}^2 - r_{34}^2} = \sqrt{19 - 0^2 - 1^2 - (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Dobivamo da je $A = R^T R$, gdje je

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ & 2 & -2 & 1 \\ & & 2 & -3 \\ & & & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadani vektor b desne strane sustava $Ax = b$ je

$$b = \begin{bmatrix} 9 \\ -45 \\ 32 \\ -39 \end{bmatrix}.$$

Rješenje sustava $R^T y = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -3 & 2 & & \\ 0 & -2 & 2 & \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 9 \\ -45 \\ 32 \\ -39 \end{bmatrix},$$

supstitucijom unaprijed po elementima vektora y, je

$$\begin{aligned}
y_1 &:= \frac{b_1}{r_{11}} = \frac{9}{1} = 9, \\
y_2 &:= \frac{1}{r_{22}}\,(b_2 - r_{12}y_1) = \frac{1}{2}\cdot\big(-45-(-3)\cdot 9\big) = \frac{1}{2}\cdot(-18) = -9, \\
y_3 &:= \frac{1}{r_{33}}\,(b_3 - r_{13}y_1 - r_{23}y_2) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(32 - 0\cdot 9 - (-2)\cdot(-9)\big) = \frac{1}{2}\cdot(14) = 7, \\
y_4 &:= \frac{1}{r_{44}}\,(b_4 - r_{14}y_1 - r_{24}y_2 - r_{34}y_3) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\big(-39 - 0\cdot 9 - 1\cdot(-9) - (-3)\cdot 7\big) = \frac{1}{3}\cdot(-9) = -3.
\end{aligned}$$

Konačno rješenje za y je

$$y = \begin{bmatrix} 9 & -9 & 7 & -3 \end{bmatrix}^T.$$

Rješenje sustava $Rx = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ & 2 & -2 & 1 \\ & & 2 & -3 \\ & & & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix},$$

supstitucijom unatrag po elementima vektora x, je

$$\begin{aligned}
x_4 &:= \frac{y_4}{r_{44}} = \frac{-3}{3} = -1, \\
x_3 &:= \frac{1}{r_{33}}\,(y_3 - r_{34}x_4) = \frac{1}{2}\cdot\big(7-(-3)\cdot(-1)\big) = \frac{1}{2}\cdot(4) = 2, \\
x_2 &:= \frac{1}{r_{22}}\,(y_2 - r_{23}x_3 - r_{24}x_4) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(-9 - (-2)\cdot 2 - 1\cdot(-1)\big) = \frac{1}{2}\cdot(-4) = -2, \\
x_1 &:= \frac{1}{r_{11}}\,(y_1 - r_{12}x_2 - r_{13}x_3 - r_{14}x_4) \\
&= \frac{1}{1}\cdot\big(9 - (-3)\cdot(-2) - 0\cdot 2 - 0\cdot(-1)\big) = \frac{1}{1}\cdot(3) = 3.
\end{aligned}$$

Konačno rješenje za x je

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 2.3.3. (NM 2013, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -4 & 14 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ -12 \\ 44 \end{bmatrix}.$$

Rješenje (bez postupka). $A = R^T R$, $R^T y = b$, $Rx = y$.

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ & 2 & -1 & 0 \\ & & 1 & -2 \\ & & & 3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

—— • ——

Zadatak 2.3.4. (NM 2013, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa C)

Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 13 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ -42 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Rješenje (bez postupka). $A = R^T R$, $R^T y = b$, $Rx = y$.

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ & 1 & 2 & 0 \\ & & 3 & -1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.4 Faktorizacija Choleskog ovisno o parametru

Zadatak 2.4.1. (NM 2011, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & x & 0 \\ 0 & x & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

Rješenje. Matrica A reda n je pozitivno definitna ako i samo ako su sve vodeće glavne minore od A **pozitivne**, tj. vrijedi

$$D_i := \det(A_i) > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je $A_i := A(1:i, 1:i)$ vodeća glavna podmatrica od A reda i.

Umjesto eksplicitnog računanja determinanti D_i, provjeru njihove pozitivnosti možemo napraviti i **direktno** u algoritmu za računanje faktorizacije Choleskog, $A = R^T R$, gdje je R gornja trokutasta matrica s pozitivnim dijagonalnim elementima. Elemente matrice R računamo stupac po stupac, ili redak po redak, po formulama

$$\begin{aligned} r_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}, \\ r_{ij} &= \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki} r_{kj} \right), \quad i < j, \end{aligned}$$

za $i = 1, \ldots, n$. Uočimo da je $r_{11} = \sqrt{D_1}$ i $r_{ii} = \sqrt{D_i / D_{i-1}}$, za $i = 2, \ldots, n$. Odavde slijedi da je $A(x)$ pozitivno definitna ako i samo ako u izrazima za dijagonalne elemente r_{ii} uvijek dobivamo **pozitivne** vrijednosti pod korijenom.

Elemente gornje trokutaste matrice R računamo redak po redak. Prvi redak:

$$\begin{aligned} r_{11} &:= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2, \\ r_{12} &:= \frac{1}{r_{11}} a_{12} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \\ r_{13} &:= \frac{1}{r_{11}} a_{13} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0, \\ r_{14} &:= \frac{1}{r_{11}} a_{14} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Drugi redak:

$$\begin{aligned} r_{22} &:= \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \\ r_{23} &:= \frac{1}{r_{22}} (a_{23} - r_{12} r_{13}) = \frac{2}{\sqrt{7}} \left(x - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = \frac{2}{\sqrt{7}} x = \frac{2\sqrt{7}}{7} x, \\ r_{24} &:= \frac{1}{r_{22}} (a_{24} - r_{12} r_{14}) = \frac{2}{\sqrt{7}} \left(0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Dijagonalni element u trećem retku je

$$r_{33} := \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{2 - 0^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\,x\right)^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 7 - 4x^2}{7}}$$

$$= \frac{\sqrt{98 - 28x^2}}{7} = \frac{\sqrt{14}}{7} \cdot \sqrt{7 - 2x^2} = \sqrt{\frac{2(7 - 2x^2)}{7}}.$$

Odavde vidimo da mora biti $7 - 2x^2 > 0$. Ako to vrijedi, zadnji element u trećem retku je

$$r_{34} := \frac{1}{r_{33}}\,(a_{34} - r_{13}r_{14} - r_{23}r_{24}) = \sqrt{\frac{7}{2(7 - 2x^2)}}\left(1 - 0 \cdot 0 - \frac{2}{\sqrt{7}}\,x \cdot 0\right)$$

$$= \frac{7}{\sqrt{98 - 28x^2}} = \sqrt{\frac{7}{2(7 - 2x^2)}}.$$

Na kraju, zadnji dijagonalni element je

$$r_{44} := \sqrt{a_{44} - r_{14}^2 - r_{24}^2 - r_{34}^2} = \sqrt{1 - 0^2 - 0^2 - \left(\sqrt{\frac{7}{2(7 - 2x^2)}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{7}{2(7 - 2x^2)}} = \sqrt{\frac{14 - 4x^2 - 7}{2(7 - 2x^2)}} = \sqrt{\frac{7 - 4x^2}{2(7 - 2x^2)}}.$$

Odavde vidimo da mora biti još i $7 - 4x^2 > 0$.

Iz prethodne dvije nejednadžbe dobivamo uvjete $2x^2 < 7$ i $4x^2 < 7$. Dakle, matrica $A(x)$ je pozitivno definitna ako i samo ako je

$$x^2 < \frac{7}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Konačna matrica R je

$$R = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & \frac{\sqrt{7}}{2} & \frac{2}{\sqrt{7}}\,x & 0 \\ & & \sqrt{\frac{2(7 - 2x^2)}{7}} & \sqrt{\frac{7}{2(7 - 2x^2)}} \\ & & & \sqrt{\frac{7 - 4x^2}{2(7 - 2x^2)}} \end{bmatrix}.$$

—— • ——

Zadatak 2.4.2. (NM 2011, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & x & 0 \\ 0 & x & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

Rješenje (bez postupka). Matrica $A(x)$ je pozitivno definitna ako i samo ako je

$$x^2 < \frac{25}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < \frac{5}{2}.$$

$A = R^T R$, gdje je

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ & \sqrt{\dfrac{5}{2}} & \sqrt{\dfrac{2}{5}}\,x & 0 \\ & & \sqrt{\dfrac{15-2x^2}{5}} & \sqrt{\dfrac{5}{15-2x^2}} \\ & & & \sqrt{\dfrac{25-4x^2}{15-2x^2}} \end{bmatrix}.$$

3 Polinomna interpolacija i numeričko deriviranje

3.1 Interpolacija polinomom, Newtonov oblik, ocjena greške

3.1.1 Zadana mreža čvorova

Zadatak 3.1.1. (NM 2009, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa A)

Funkciju

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

interpoliramo polinomom u čvorovima $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 2$.

(a) Izračunajte Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 2]$.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1$ i pripadnu pravu pogrešku.

Rješenje. Neka je $p_3 \in \mathcal{P}_3$ traženi interpolacijski polinom stupnja najviše $n = 3$.

(a) Za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma trebamo tablicu podijeljenih razlika za funkciju f u zadanim čvorovima:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	0.0000000000			
		0.5815725764		
$\frac{1}{2}$	0.2907862882		-0.4331917657	
		-0.0682150721		0.1729934460
$\frac{3}{2}$	0.2225712161		-0.0872048737	
		-0.1990223826		
2	0.1230600248			

Interpolacijski polinom p_3 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 0 + 0.5815725764\, x - 0.4331917657\, x\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + 0.1729934460\, x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

(b) Ocjena uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 2]$ ima oblik

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \max_{x\in[0,2]} |\omega(x)| \cdot M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[0,2]} |f^{(4)}(x)|,$$

gdje je $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_3)$ polinom čvorova.

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \sin x \\ f'(x) &= e^{-x}(\cos x - \sin x) \\ f''(x) &= e^{-x}(-\sin x - 2\cos x + \sin x) = -2e^{-x} \cos x \\ f'''(x) &= 2e^{-x}(\sin x + \cos x) \\ f^{(4)}(x) &= 2e^{-x}(\cos x - 2\sin x - \cos x) = -4e^{-x} \sin x \\ f^{(5)}(x) &= 4e^{-x}(\sin x - \cos x). \end{aligned}$$

Uočimo da je $f^{(4)}(x) = -4f(x)$.

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 0, 2, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[0, 2]$. Iz $f^{(5)}(x) = 0$, zbog $e^{-x} \neq 0$, dobivamo

$$\sin x - \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vidimo da je $x^{(5)} = \pi/4$ jedina nultočka od $f^{(5)}$ unutar intervala $[0, 2]$. Onda imamo

$$\begin{aligned} f^{(4)}(0) &= -4e^0 \sin(0) = 0, \\ f^{(4)}(\pi/4) &= -4e^{-\pi/4} \sin(\pi/4) = -1.2895877678, \\ f^{(4)}(2) &= -4e^{-2} \sin(2) = -0.4922400992, \end{aligned}$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(\pi/4)| = 1.2895877678.$$

Još treba naći maksimum apsolutne vrijednosti polinoma čvorova

$$\omega(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2)$$

na $[0, 2]$. Množenjem izlazi

$$\omega(x) = x^4 - 4x^3 + \frac{19}{4}x^2 - \frac{3}{2}x.$$

Deriviranjem dobivamo

$$\omega'(x) = 4x^3 - 12x^2 + \frac{19}{2}x - \frac{3}{2} = (x - 1)\left(4x^2 - 8x + \frac{3}{2}\right).$$

Nultočke ovog polinoma su $x'_0 = 1$ i $x'_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5/8}$. Uvrštavanjem izlazi

$$\max_{x\in[0,2]} |\omega(x)| = \max\{\, |\omega(x'_0)|, |\omega(x'_1)|, |\omega(x'_2)| \,\} = \max\left\{ \frac{1}{4}, \frac{9}{64}, \frac{9}{64} \right\} = \frac{1}{4}.$$

Ovaj zaključak izlazi puno jednostavnije ako uočimo da su zadani čvorovi simetrično raspoređeni oko polovišta intervala $[0, 2]$, tj. oko točke $x = 1$. Supstitucijom $y = x - 1$ dobivamo

$$\omega(y) = (y^2 - 1)\left(y^2 - \frac{1}{4}\right) = y^4 - \frac{5}{4}y^2 + \frac{1}{4}, \quad \omega'(y) = 4y^3 - \frac{5}{2}y = 4y\left(y^2 - \frac{5}{8}\right).$$

Odavde se odmah čitaju nultočke od ω' i trivijalno uvrštavaju u ω.

Ocjena uniformne pogreške interpolacije polinomom p_3 na intervalu $[0, 2]$ je

$$\begin{aligned} \max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_3(x)| &\leq \frac{1}{4!} \cdot \max_{x\in[0,2]} |\omega(x)| \cdot M_4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1.2895877678 \\ &= 0.0134332059 = 1.34332059 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

(c) U točki $x = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} p_3(1) &= \quad 0.3217283321, \\ f(1) &= \quad 0.3095598757, \\ f(1) - p_3(1) &= -0.0121684564 = -1.21684564 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Za ocjenu lokalne pogreške u točki $x = 1$ izlazi ista ocjena kao i za uniformnu pogrešku, jer se maksimum $|\omega(x)|$ dostiže baš u točki $x = 1$.

$$|f(1) - p_3(1)| \leq \frac{1}{4!} \cdot |\omega(1)| \cdot M_4 = 0.0134332059 = 1.34332059 \cdot 10^{-2}.$$

—— • ——

Zadatak 3.1.2. (NM 2009, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa B)

Funkciju

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}$$

interpoliramo polinomom u čvorovima $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

(a) Izračunajte Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 4]$.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 2$ i pripadnu pravu pogrešku.

Rješenje. Neka je $p_3 \in \mathcal{P}_3$ traženi interpolacijski polinom stupnja najviše $n = 3$.

(a) Za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma trebamo tablicu podijeljenih razlika za funkciju f u zadanim čvorovima:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	2.0000000000			
		−0.8963616765		
1	1.1036383235		0.1563367285	
		−0.4273514908		−0.0150583503
3	0.2489353418		0.0961033274	
		−0.1390415085		
4	0.1098938333			

Interpolacijski polinom p_3 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_3(x) = 2 &- 0.8963616765\, x + 0.1563367285\, x(x-1) \\ &- 0.0150583503\, x(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

(b) Ocjena uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 4]$ ima oblik

$$\max_{x\in[0,4]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \max_{x\in[0,4]} |\omega(x)| \cdot M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[0,4]} |f^{(4)}(x)|,$$

gdje je $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_3)$ polinom čvorova.

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)e^{-x} \\ f'(x) &= e^{-x} - (x+2)e^{-x} = -(x+1)e^{-x} \\ f''(x) &= -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = xe^{-x} \\ f'''(x) &= e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} \\ f^{(4)}(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x} \\ f^{(5)}(x) &= e^{-x} - (x-2)e^{-x} = (3-x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 0, 4, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[0,4]$. Iz $f^{(5)}(x) = 0$, zbog $e^{-x} \neq 0$, dobivamo

$$3 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

Vidimo da je $x^{(5)} = 3$ jedina nultočka od $f^{(5)}$ unutar intervala $[0,4]$. Onda imamo

$$\begin{aligned} f^{(4)}(0) &= -2e^0 = -2, \\ f^{(4)}(3) &= e^{-3} = 0.0497870684, \\ f^{(4)}(4) &= 2e^{-4} = 0.0366312778, \end{aligned}$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(0)| = 2.$$

Još treba naći maksimum apsolutne vrijednosti polinoma čvorova

$$\omega(x) = x(x-1)(x-3)(x-4)$$

na $[0,4]$. Množenjem izlazi

$$\omega(x) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x.$$

Deriviranjem dobivamo

$$\omega'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 38x - 12 = 2(x-2)(2x^2 - 8x + 3).$$

Nultočke ovog polinoma su $x_0' = 2$ i $x_{1,2}' = 2 \pm \sqrt{5/2}$. Uvrštavanjem izlazi

$$\max_{x\in[0,4]} |\omega(x)| = \max\{\, |\omega(x_0')|, |\omega(x_1')|, |\omega(x_2')| \,\} = \max\left\{ 4, \frac{9}{4}, \frac{9}{4} \right\} = 4.$$

Ovaj zaključak izlazi puno jednostavnije ako uočimo da su zadani čvorovi simetrično raspoređeni oko polovišta intervala $[0,4]$, tj. oko točke $x = 2$. Supstitucijom $y = x - 2$ dobivamo

$$\omega(y) = (y^2-4)(y^2-1) = y^4 - 5y^2 + 4, \quad \omega'(y) = 4y^3 - 10y = 4y\left(y^2 - \frac{5}{2}\right).$$

Odavde se odmah čitaju nultočke od ω' i trivijalno uvrštavaju u ω.

Ocjena uniformne pogreške interpolacije polinomom p_3 na intervalu $[0,4]$ je

$$\begin{aligned} \max_{x\in[0,4]} |f(x) - p_3(x)| &\le \frac{1}{4!} \cdot \max_{x\in[0,4]} |\omega(x)| \cdot M_4 = \frac{1}{24} \cdot 4 \cdot 2 \\ &= \frac{1}{3} = 0.3333333333. \end{aligned}$$

(c) U točki $x = 2$ dobivamo

$$\begin{aligned} p_3(2) &= 0.5500668047, \\ f(2) &= 0.5413411329, \\ f(2) - p_3(2) &= -0.0087256717 = -8.7256717 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Za ocjenu lokalne pogreške u točki $x = 2$ izlazi ista ocjena kao i za uniformnu pogrešku, jer se maksimum $|\omega(x)|$ dostiže baš u točki $x = 2$.

$$|f(2) - p_3(2)| \leq \frac{1}{4!} \cdot |\omega(2)| \cdot M_4 = \frac{1}{3} = 0.3333333333.$$

3.1.2 Čebiševljeva mreža čvorova

Zadatak 3.1.3. (NM 2010, 1. kolokvij, 3. zadatak, grupa A)

Funkciju

$$f(x) = \sqrt{2x + 1}$$

interpoliramo polinomom p_3 stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži čvorova u intervalu $[0, 2]$.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3.

(b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 2]$.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 0.75$ i pripadnu pravu pogrešku.

Rješenje. Neka je $p_3 \in \mathcal{P}_3$ traženi interpolacijski polinom stupnja najviše $n = 3$.

Čebiševljeva mreža s $n + 1 = 4$ čvora na intervalu $[a, b] = [0, 2]$, u silaznoj numeraciji čvorova, ima oblik

$$x_i = \frac{1}{2}\left(a + b + (b - a)\cos\frac{(2i + 1)\pi}{2n + 2}\right) = 1 + \cos\frac{(2i + 1)\pi}{8}, \quad i = 0, \ldots, 3.$$

Čvorovi mreže su:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 + \cos\frac{\pi}{8} = 1.9238795325, \\ x_1 &= 1 + \cos\frac{3\pi}{8} = 1.3826834324, \\ x_2 &= 1 + \cos\frac{5\pi}{8} = 0.6173165676, \\ x_3 &= 1 + \cos\frac{7\pi}{8} = 0.0761204675. \end{aligned}$$

(a) Za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 trebamo tablicu podijeljenih razlika za funkciju f u zadanim čvorovima:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, \ldots, x_{k+2}]$	$f[x_k, \ldots, x_{k+3}]$
1.9238795325	2.2017627177			
		0.4828331053		
1.3826834324	1.9404553241		−0.0760419283	
		0.5821866726		0.0402561186
0.6173165676	1.4948689358		−0.1504255363	
		0.7787271073		
0.0761204675	1.0734248623			

Interpolacijski polinom p_3 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned}
p_3(x) = {} & 2.2017627177 \\
& + 0.4828331053\,(x - 1.9238795325) \\
& - 0.0760419283\,(x - 1.9238795325)(x - 1.3826834324) \\
& + 0.0402561186\,(x - 1.9238795325)(x - 1.3826834324)(x - 0.6173165676).
\end{aligned}$$

U standardnoj bazi je

$$p_3(x) = 0.0402561186\,x^3 - 0.2340020881\,x^2 + 0.9235271208\,x + 1.0044636748.$$

(b) Ocjena uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 2]$ ima oblik

$$\max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \max_{x\in[0,2]} |\omega(x)| \cdot M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[0,2]} |f^{(4)}(x)|,$$

gdje je $\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_3)$ polinom čvorova.

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{2x+1} \\
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\
f''(x) &= -\frac{1}{(2x+1)^{3/2}} \\
f'''(x) &= \frac{3}{(2x+1)^{5/2}} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{(2x+1)^{7/2}} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{105}{(2x+1)^{9/2}}.
\end{aligned}$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 0, 2, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[0, 2]$. No, očito je da $f^{(5)}$ nema nultočaka, pa ostaju samo rubovi intervala. Onda imamo

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(0) &= -15, \\
f^{(4)}(2) &= -\frac{15}{5^{7/2}} = -\frac{3\sqrt{5}}{125} = -0.0536656315,
\end{aligned}$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(0)| = 15.$$

Još treba naći maksimum apsolutne vrijednosti polinoma čvorova $\omega(x)$ na $[0, 2]$. Za Čebiševljevu mrežu znamo da vrijedi

$$\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1},$$

pa je

$$\max_{x\in[0,2]} |\omega(x)| = 2\left(\frac{2}{4}\right)^4 = \frac{1}{8}.$$

Ocjena uniformne pogreške interpolacije polinomom p_3 na intervalu $[0, 2]$ je

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,2]} |f(x) - p_3(x)| &\leq \frac{1}{4!} \cdot \max_{x\in[0,2]} |\omega(x)| \cdot M_4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{8} \cdot 15 \\ &= 0.0781250000 = 7.8125 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

(c) U točki $x = 0.75$ dobivamo

$$\begin{aligned} p_3(0.75) &= 1.5824658909, \\ f(0.75) &= 1.5811388301, \\ f(0.75) - p_3(0.75) &= -0.0013270608 = -1.3270608 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Za ocjenu lokalne pogreške u točki $x = 0.75$ dobivamo

$$\begin{aligned}|f(0.75) - p_3(0.75)| &\leq \frac{1}{4!} \cdot |\omega(0.75)| \cdot M_4 = \frac{1}{24} \cdot 0.0664062500 \cdot 15 \\ &= 0.0415039062 = 4.15039062 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

——— • ———

Zadatak 3.1.4. (NM 2010, 1. kolokvij, 3. zadatak, grupa B)

Funkciju

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x + 2}}$$

interpoliramo polinomom p_3 stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži čvorova u intervalu $[1, 2]$.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3.

(b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[1, 2]$.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1.25$ i pripadnu pravu pogrešku.

Rješenje. Neka je $p_3 \in \mathcal{P}_3$ traženi interpolacijski polinom stupnja najviše $n = 3$.

Čebiševljeva mreža s $n + 1 = 4$ čvora na intervalu $[a, b] = [1, 2]$, u silaznoj numeraciji čvorova, ima oblik

$$x_i = \frac{1}{2}\left(a + b + (b - a) \cos \frac{(2i + 1)\pi}{2n + 2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{(2i + 1)\pi}{8}, \quad i = 0, \ldots, 3.$$

Čvorovi mreže su:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{8} = 1.9619397663, \\ x_1 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{8} = 1.6913417162, \\ x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{5\pi}{8} = 1.3086582838, \\ x_3 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{7\pi}{8} = 1.0380602337. \end{aligned}$$

(a) Za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 trebamo tablicu podijeljenih razlika za funkciju f u zadanim čvorovima:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, \ldots, x_{k+2}]$	$f[x_k, \ldots, x_{k+3}]$
1.9619397663	0.6319713309			
		−0.0557275781		
1.6913417162	0.6470511048		0.0108634101	
		−0.0628244428		−0.0026948169
1.3086582838	0.6710929782		0.0133530963	
		−0.0715477733		
1.0380602337	0.6904536662			

Interpolacijski polinom p_3 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_3(x) = 0.&6319713309 \\ &- 0.0557275781\,(x - 1.9619397663) \\ &+ 0.0108634101\,(x - 1.9619397663)(x - 1.6913417162) \\ &- 0.0026948169\,(x - 1.9619397663)(x - 1.6913417162)(x - 1.3086582838). \end{aligned}$$

U standardnoj bazi je

$$p_3(x) = -0.0026948169\,x^3 + 0.0242349294\,x^2 - 0.1172405550\,x + 0.7890559868.$$

(b) Ocjena uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[1, 2]$ ima oblik

$$\max_{x\in[1,2]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \max_{x\in[1,2]} |\omega(x)| \cdot M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[1,2]} |f^{(4)}(x)|,$$

gdje je $\omega(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_3)$ polinom čvorova.

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{1}{(x+2)^{1/3}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{3(x+2)^{4/3}} \\ f''(x) &= \frac{4}{9(x+2)^{7/3}} \\ f'''(x) &= -\frac{28}{27(x+2)^{10/3}} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{280}{81(x+2)^{13/3}} \\ f^{(5)}(x) &= -\frac{3640}{243(x+2)^{16/3}}. \end{aligned}$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 1, 2, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[1, 2]$. No, očito je da $f^{(5)}$ nema nultočaka, pa ostaju samo rubovi intervala. Onda imamo

$$\begin{aligned} f^{(4)}(1) &= \frac{280}{81\cdot 3^{13/3}} = \frac{280}{19683}\cdot 3^{2/3} = 0.0295901778, \\ f^{(4)}(2) &= \frac{280}{81\cdot 4^{13/3}} = \frac{35}{10368}\cdot 4^{2/3} = 0.0085064114, \end{aligned}$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(1)| = 0.0295901778.$$

Još treba naći maksimum apsolutne vrijednosti polinoma čvorova $\omega(x)$ na $[1,2]$. Za Čebiševljevu mrežu znamo da vrijedi

$$\max_{x\in[a,b]} |\omega(x)| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1},$$

pa je

$$\max_{x\in[1,2]} |\omega(x)| = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{4} = \frac{1}{128} = 0.0078125000.$$

Ocjena uniformne pogreške interpolacije polinomom p_3 na intervalu $[1,2]$ je

$$\begin{aligned}\max_{x\in[1,2]} |f(x) - p_3(x)| &\leq \frac{1}{4!}\cdot\max_{x\in[1,2]} |\omega(x)|\cdot M_4 = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{128}\cdot 0.0295901778\\ &= 0.0000096322 = 9.6322\cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

(c) U točki $x = 1.25$ dobivamo

$$\begin{aligned} p_3(1.25) &= 0.6751090560,\\ f(1.25) &= 0.6751063812,\\ f(1.25) - p_3(1.25) &= -0.0000026748 = -2.6748\cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

Za ocjenu lokalne pogreške u točki $x = 1.25$ dobivamo

$$\begin{aligned}|f(1.25) - p_3(1.25)| &\leq \frac{1}{4!}\cdot|\omega(1.25)|\cdot M_4 = \frac{1}{24}\cdot 0.0039062500\cdot 0.0295901778\\ &= 0.0000048161 = 4.8161\cdot 10^{-6}.\end{aligned}$$

3.2 Hermiteova interpolacija polinomom

Zadatak 3.2.1. (NM 2013, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa A)

Zadana je funkcija (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$f(x) = (x+3)\exp\left(-\frac{4}{3}x + 2\right)$$

na intervalu $[0, 1]$. Nađite Hermiteov interpolacijski polinom koji interpolira funkciju f i njezinu derivaciju u rubnim čvorovima zadanog intervala.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na zadanom intervalu.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1/3$, ocjenu lokalne pogreške i pripadnu pravu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

— • —

Uvod u rješenje — derivacije za ocjenu greške. Za ocjenu greške treba naći prvih 5 derivacija funkcije f. Uočimo da funkciju f možemo zapisati u obliku produkta $f = g \cdot h$, uz oznake

$$g(x) = ax + b, \quad h(x) = \exp(cx + d) = e^{cx+d},$$

s tim da za $a \neq 0$ i $c \neq 0$, funkcije g i h nisu konstantne.

Bilo koju derivaciju $f^{(n)}$, za $n \geq 1$, najlakše je izračunati Leibnizovim pravilom za derivaciju produkta,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = (g \cdot h)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) \cdot h^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ax+b)^{(k)} \cdot \left(e^{cx+d}\right)^{(n-k)}. \end{aligned}$$

Ako je $a \neq 0$ i $c \neq 0$, u ovoj sumi ostaju samo **prva dva** člana — za $k = 0$ i $k = 1$. Za bilo koji $n \geq 1$, onda dobivamo

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (ax+b) \cdot \left(e^{cx+d}\right)^{(n)} + n \cdot (ax+b)' \cdot \left(e^{cx+d}\right)^{(n-1)} \\ &= (ax+b) \cdot c^n e^{cx+d} + na \cdot c^{n-1} e^{cx+d} \\ &= c^{n-1}\big(c(ax+b) + na\big)\, e^{cx+d} \\ &= c^n \left(ax + b + \frac{na}{c}\right) e^{cx+d}. \end{aligned}$$

Odavde odmah slijedi da jednadžba $f^{(n)}(x) = 0$ ima točno **jedno** realno rješenje

$$x_0^{(n)} = -\frac{1}{a}\left(b + \frac{na}{c}\right) = -\left(\frac{b}{a} + \frac{n}{c}\right).$$

Dakle, za zadane parametre a, b, c, d i $n \geq 1$, kad računamo

$$M_{n-1} = \max_{x\in[0,1]} |f^{(n-1)}(x)|,$$

treba još **provjeriti** je li $x_0^{(n)} \in [0, 1]$.

Za ocjenu greške Hermiteove interpolacije s dva (dupla) čvora, traži se M_4 ($n = 5$) i treba provjeriti nultočke 5. derivacije

$$x_0^{(5)} = -\frac{1}{a}\left(b + \frac{5a}{c}\right) = -\left(\frac{b}{a} + \frac{5}{c}\right).$$

——— • ———

Rješenje. Hermiteov interpolacijski polinom interpolira vrijednosti funkcije f i vrijednosti njezine derivacije f' u svakom čvoru, tj. svi čvorovi su dvostruki. Ovdje imamo samo dva takva čvora (rubove intervala), odnosno, 4 zadana podatka, pa je stupanj interpolacijskog polinoma najviše 3.

Neka je $p_3 \in \mathcal{P}_3$ traženi interpolacijski polinom stupnja najviše $n = 3$. Newtonov oblik polinoma p_3 (s podijeljenim razlikama) za funkciju f na mreži čvorova x_0, x_0, x_1, x_1 je

$$\begin{aligned} p_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0]\,(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1]\,(x - x_0)^2 \\ + f[x_0, x_0, x_1, x_1]\,(x - x_0)^2(x - x_1). \end{aligned}$$

U dvostrukom čvoru x_k vrijedi da je $f[x_k, x_k] = f'(x_k)$ = zadani podatak za derivaciju. U tablici podijeljenih razlika, mrežu čvorova s multiplicitetima x_0, x_0, x_1, x_1 označavamo s t_0, t_1, t_2, t_3 (tj. $t_0 = t_1 = x_0$ i $t_2 = t_3 = x_1$).

(a) Za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 trebamo tablicu podijeljenih razlika za funkciju f u zadanim čvorovima:

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, t_{j+3}]$
0	22.1671682968			
		−22.1671682968		
0	22.1671682968		7.7909361642	
		−14.3762321326		−1.8548848762
1	7.7909361642		5.9360512880	
		−8.4401808446		
1	7.7909361642			

Interpolacijski polinom p_3 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_3(x) = 22.1671682968 - 22.1671682968\,x + 7.7909361642\,x^2 \\ - 1.8548848762\,x^2(x - 1). \end{aligned}$$

U standardnoj bazi je

$$p_3(x) = -1.8548848762\,x^3 + 9.6458210404\,x^2 - 22.1671682968\,x + 22.1671682968.$$

(b) Ocjena uniformne pogreške Hermiteove interpolacije na intervalu $[0, 1]$ ima oblik

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \max_{x\in[0,1]} |\omega(x)| \cdot M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|,$$

gdje je $\omega(x) = (x - t_0) \cdots (x - t_3) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2$ polinom čvorova.
Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$f(x) = (x+3)\,\exp\left(-\frac{4}{3}x + 2\right) = (x+3)\,e^{-\frac{4}{3}x+2}$$

$$f'(x) = \left(1 - (x+3)\cdot\frac{4}{3}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2} = -\frac{4}{3}\left(x + \frac{9}{4}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{3}\left(1 - \left(x + \frac{9}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(x + \frac{3}{2}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(1 - \left(x + \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2} = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(x + \frac{3}{4}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2}$$

$$f^{(4)}(x) = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 \left(1 - \left(x + \frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 x\, e^{-\frac{4}{3}x+2}$$

$$f^{(5)}(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(1 - x\cdot\frac{4}{3}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2} = -\left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(x - \frac{3}{4}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2}.$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 0, 1, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[0, 1]$. Iz $f^{(5)}(x) = 0$ dobivamo

$$-\left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(x - \frac{3}{4}\right) e^{-\frac{4}{3}x+2} = 0 \quad\Rightarrow\quad x - \frac{3}{4} = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{3}{4}.$$

Vidimo da $f^{(5)}$ **ima** nultočku $3/4$ unutar intervala $[0, 1]$. Onda imamo

$$f^{(4)}(0) = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot 0 \cdot e^2 = 0$$

$$f^{(4)}(3/4) = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right) e^{-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}+2} = \frac{64}{27}\,e = 6.4433347045$$

$$f^{(4)}(1) = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot 1 \cdot e^{-\frac{4}{3}+2} = \frac{256}{81}\,e^{2/3} = 6.1558014137,$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(3/4)| = 6.4433347045.$$

Još treba naći maksimum apsolutne vrijednosti polinoma čvorova

$$\omega(x) = x^2 (x-1)^2$$

na $[0, 1]$. Znamo (v. predavanja) da se taj maksimum dostiže u polovištu intervala $x_e = (x_0 + x_1)/2$ i da je

$$|\omega(x_e)| = \frac{(x_1 - x_0)^4}{16}.$$

pa je

$$\max_{x\in[0,1]} |\omega(x)| = \frac{1}{16} = 0.0625000000.$$

Ocjena uniformne pogreške Hermiteove interpolacije polinomom p_3 na intervalu $[0,1]$ je

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,1]} |f(x)-p_3(x)| \leq \frac{1}{4!}\cdot\max_{x\in[0,1]}|\omega(x)|\cdot M_4 &= \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16}\cdot 6.4433347045\\ &= 0.0167795175 = 1.67795175\cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

(c) U točki $x = 1/3$ dobivamo

$$\begin{aligned}p_3(1/3) &= 15.7811706514,\\ f(1/3) &= 15.7923928655,\\ f(1/3)-p_3(1/3) &= \ \ 0.0112222141 = 1.12222141\cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

Za ocjenu lokalne pogreške u točki $x = 1/3$ dobivamo

$$\begin{aligned}|f(1/3)-p_3(1/3)| \leq \frac{1}{4!}\cdot|\omega(1/3)|\cdot M_4 &= \frac{1}{24}\cdot|0.0493827160|\cdot 6.4433347045\\ &= 0.0132578903 = 1.32578903\cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

3.3 Opća interpolacija polinomom, moguće preskakanje derivacija

3.3.1 Jedna vrijednost funkcije

Zadatak 3.3.1. (NM 2008, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Zadane su tri točke a, b i c koje **ne moraju** nužno biti različite. Neka je f dovoljno glatka funkcija u tim točkama. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p stupnja najviše 3 koji zadovoljava sljedeća četiri uvjeta interpolacije:

$$p(a) = f(a), \quad p''(a) = f''(a), \quad p''(b) = f''(b), \quad p'(c) = f'(c).$$

Ako postoji, izračunajte takav polinom p za podatke: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ i

$$f(a) = 2, \quad f''(a) = 1, \quad f''(b) = 0, \quad f'(c) = 1.$$

Rješenje. Polinom p tražimo u bazi potencija oko točke a, u kojoj su zadana dva uvjeta:

$$p(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + d_3(x-a)^3.$$

Derivacije polinoma p su

$$p'(x) = d_1 + 2d_2(x-a) + 3d_3(x-a)^2, \qquad p''(x) = 2d_2 + 6d_3(x-a).$$

Iz zadanih uvjeta interpolacije dobivamo sljedeći linearni sustav za koeficijente d_i

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6(b-a) \\ 0 & 1 & 2(c-a) & 3(c-a)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a) \\ f''(a) \\ f''(b) \\ f'(c) \end{bmatrix}.$$

Nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p je **regularnost** matrice A ovog sustava. Razvojem determinante po prva **dva stupca** dobivamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6(b-a) \\ 1 & 2(c-a) & 3(c-a)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6(b-a) \end{vmatrix} = 12(b-a).$$

Dakle, $\det A \neq 0 \iff a \neq b$.

Za zadane podatke je $a = 1$ i $b = 2$, pa je $a \neq b$. Zato postoji jedinstveni p koji interpolira zadane podatke. Linearni sustav za koeficijente je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

s rješenjem

$$d_0 = 2, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = \frac{1}{2}, \quad d_3 = -\frac{1}{6}.$$

Pripadni polinom p je

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 \\ &= \frac{10}{6} - \frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

Zadatak 3.3.2. (NM 2008, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Zadane su tri točke a, b i c koje **ne moraju** nužno biti različite. Neka je f dovoljno glatka funkcija u tim točkama. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p stupnja najviše 3 koji zadovoljava sljedeća četiri uvjeta interpolacije:

$$p(a) = f(a), \quad p''(a) = f''(a), \quad p'(b) = f'(b), \quad p'(c) = f'(c).$$

Ako postoji, izračunajte takav polinom p za podatke: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ i

$$f(a) = 1, \quad f''(a) = 2, \quad f'(b) = 1, \quad f'(c) = 0.$$

Rješenje. Polinom p tražimo u bazi potencija oko točke a, u kojoj su zadana dva uvjeta:

$$p(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + d_3(x-a)^3.$$

Derivacije polinoma p su

$$p'(x) = d_1 + 2d_2(x-a) + 3d_3(x-a)^2, \qquad p''(x) = 2d_2 + 6d_3(x-a).$$

Iz zadanih uvjeta interpolacije dobivamo sljedeći linearni sustav za koeficijente d_i

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2(b-a) & 3(b-a)^2 \\ 0 & 1 & 2(c-a) & 3(c-a)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a) \\ f''(a) \\ f'(b) \\ f'(c) \end{bmatrix}.$$

Nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p je **regularnost** matrice A ovog sustava. Razvojem determinante po prva **dva retka** dobivamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2(b-a) & 3(b-a)^2 \\ 1 & 2(c-a) & 3(c-a)^2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3(b-a)^2 \\ 1 & 3(c-a)^2 \end{vmatrix} = -6(c+b-2a)(c-b).$$

Dakle, $\det A \neq 0 \iff b \neq c$ **i** $a \neq (b+c)/2$.

Za zadane podatke je $a = 1$, $b = 2$ i $c = 3$, pa je $b \neq c$ i $a \neq (b+c)/2 = 2.5$. Zato postoji jedinstveni p koji interpolira zadane podatke. Linearni sustav za koeficijente je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

s rješenjem

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = -\frac{1}{3}.$$

Pripadni polinom p je

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + (x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 \\ &= \frac{7}{3} - 3x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

3.3.2 Dvije vrijednosti funkcije

Zadatak 3.3.3. (NM 2012, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa C)

Zadane su tri točke a, b i c koje **ne moraju** nužno biti različite. Neka je f dovoljno glatka funkcija u tim točkama. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p stupnja najviše 3 koji zadovoljava sljedeća četiri uvjeta interpolacije:

$$p(a) = f(a), \quad p'(a) = f'(a), \quad p''(b) = f''(b), \quad p(c) = f(c).$$

Ako postoji, izračunajte takav polinom p za podatke: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ i

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 1, \quad f''(b) = 2, \quad f(c) = 1.$$

Rješenje. Polinom p tražimo u bazi potencija oko točke a, u kojoj su zadana dva uvjeta:

$$p(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + d_3(x-a)^3.$$

Derivacije polinoma p su

$$p'(x) = d_1 + 2d_2(x-a) + 3d_3(x-a)^2, \qquad p''(x) = 2d_2 + 6d_3(x-a).$$

Iz zadanih uvjeta interpolacije dobivamo sljedeći linearni sustav za koeficijente d_i

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6(b-a) \\ 1 & c-a & (c-a)^2 & (c-a)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ f''(b) \\ f(c) \end{bmatrix}.$$

Nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p je **regularnost** matrice A ovog sustava. Razvojem determinante po prva **dva retka** dobivamo

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6(b-a) \\ c-a & (c-a)^2 & (c-a)^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6(b-a) \\ (c-a)^2 & (c-a)^3 \end{vmatrix} \\ &= 2(c-a)^2\big((c-a) - 3(b-a)\big) \\ &= 2(c-a)^2(c-3b+2a). \end{aligned}$$

Dakle, $\det A \neq 0 \iff a \neq c$ **i** $c - a \neq 3(b-a)$.

Za zadane podatke je $a = 1$, $b = 2$ i $c = 3$, pa je $a \neq c$ i $c - a = 2 \neq 3 = 3(b-a)$. Zato postoji jedinstveni polinom p koji interpolira zadane podatke. Linearni sustav za koeficijente je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

s rješenjem

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 1, \quad d_2 = -\frac{11}{4}, \quad d_3 = \frac{5}{4}.$$

Traženi polinom p je

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1) - \frac{11}{4}\,(x-1)^2 + \frac{5}{4}\,(x-1)^3 \\ &= -5 + \frac{41}{4}\,x - \frac{13}{2}\,x^2 + \frac{5}{4}\,x^3. \end{aligned}$$

——— • ———

Zadatak 3.3.4. (NM 2012, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa D)

Zadane su tri točke a, b i c koje **ne moraju** nužno biti različite. Neka je f dovoljno glatka funkcija u tim točkama. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p stupnja najviše 3 koji zadovoljava sljedeća četiri uvjeta interpolacije:

$$p(a) = f(a), \quad p'(a) = f'(a), \quad p'(b) = f'(b), \quad p(c) = f(c).$$

Ako postoji, izračunajte takav polinom p za podatke: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ i

$$f(a) = 1, \quad f'(a) = 0, \quad f'(b) = 1, \quad f(c) = 2.$$

Rješenje. Polinom p tražimo u bazi potencija oko točke a, u kojoj su zadana dva uvjeta:

$$p(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + d_3(x-a)^3.$$

Derivacije polinoma p su

$$p'(x) = d_1 + 2d_2(x-a) + 3d_3(x-a)^2, \qquad p''(x) = 2d_2 + 6d_3(x-a).$$

Iz zadanih uvjeta interpolacije dobivamo sljedeći linearni sustav za koeficijente d_i

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(b-a) & 3(b-a)^2 \\ 1 & c-a & (c-a)^2 & (c-a)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ f'(b) \\ f(c) \end{bmatrix}.$$

Nužan i dovoljan uvjet za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p je **regularnost** matrice A ovog sustava. Razvojem determinante po prva **dva retka** dobivamo

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2(b-a) & 3(b-a)^2 \\ c-a & (c-a)^2 & (c-a)^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(b-a) & 3(b-a)^2 \\ (c-a)^2 & (c-a)^3 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)^2\big(2(c-a) - 3(b-a)\big) \\ &= (b-a)(c-a)^2(2c - 3b + a). \end{aligned}$$

Dakle, $\det A \neq 0 \iff a \neq b$ **i** $a \neq c$ **i** $2(c-a) \neq 3(b-a)$.

Za zadane podatke je $a = 1$, $b = 2$ i $c = 3$, pa je $a \neq b$, $a \neq c$ i $2(c-a) = 4 \neq 3 = 3(b-a)$. Zato postoji jedinstveni polinom p koji interpolira zadane podatke. Linearni sustav za koeficijente je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

s rješenjem

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = \frac{5}{4}, \quad d_3 = -\frac{1}{2}.$$

Traženi polinom p je

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + \frac{5}{4}\,(x-1)^2 - \frac{1}{2}\,(x-1)^3 \\ &= \frac{11}{4} - 4\,x + \frac{11}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x^3. \end{aligned}$$

3.4 Numeričko deriviranje iz interpolacijskog polinoma

Zadatak 3.4.1. (NM 2009, popravni kolokvij, 3. zadatak, grupa D)

Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Drugu derivaciju f'' aproksimiramo drugom derivacijom p_3'' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

(a) Nađite takvu aproksimaciju za $f''(x_0)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

(b) Zadana je funkcija
$$f(x) = \sin x$$
i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f''(x_0)$ i pripadnu pravu pogrešku.

Rješenje. Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 (s podijeljenim, a ne konačnim razlikama) za funkciju f na mreži čvorova x_0, x_1, x_2, x_3 je
$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2). \end{aligned}$$
Deriviranjem dobivamo
$$\begin{aligned} p_3'(x) &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,\big((x - x_1) + (x - x_0)\big) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,\big((x - x_1)\,(x - x_2) + (x - x_0)\,(x - x_2) \\ &\quad + (x - x_0)\,(x - x_1)\big), \\ p_3''(x) &= 2\,f[x_0, x_1, x_2] + 2\,f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,\big((x - x_0) + (x - x_1) + (x - x_2)\big). \end{aligned}$$

(a) Kad uvrstimo točku x_0, izlazi
$$p_3''(x_0) = 2\,f[x_0, x_1, x_2] + 2\,f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,\big((x_0 - x_1) + (x_0 - x_2)\big).$$
Sad iskoristimo da je mreža ekvidistantna, tj. $x_i = x_0 + ih$, za $i = 0, 1, 2, 3$, pa je
$$x_i - x_j = (i - j)h.$$
Onda je
$$\begin{aligned} p_3''(x_0) &= 2\,f[x_0, x_1, x_2] + 2\,f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(-h - 2h) \\ &= 2\,f[x_0, x_1, x_2] - 6h\,f[x_0, x_1, x_2, x_3]. \end{aligned}$$
Podijeljene razlike višeg reda možemo izraziti preko podijeljenih razlika prvog reda u susjednim čvorovima mreže. Na ekvidistantnoj mreži dobivamo
$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{2h}, \\ f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{2h}, \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{3h} \\ &= \frac{f[x_0, x_1] - 2\,f[x_1, x_2] + f[x_2, x_3]}{6h^2}. \end{aligned}$$

Kad to uvrstimo u formulu za $p_3''(x_0)$, izlazi

$$\begin{aligned} p_3''(x_0) &= 2\,\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{2h} - 6h\,\frac{f[x_0,x_1]-2\,f[x_1,x_2]+f[x_2,x_3]}{6h^2} \\ &= \frac{1}{h}\Big((-1-1)\,f[x_0,x_1]+(1+2)\,f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]\Big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(-2\,f[x_0,x_1]+3\,f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]\Big). \end{aligned}$$

(b) Uočimo da je zadana mreža ekvidistantna, s korakom $h=\pi/6$, pa možemo koristiti prethodnu formulu.

Tablica podijeljenih razlika za funkciju $f(x)=\sin x$ na zadanoj mreži čvorova je

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k,x_{k+1}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2}]$	$f[x_k,x_{k+1},x_{k+2},x_{k+3}]$
0	0.0000000000			
		0.9549296586		
$\frac{\pi}{6}$	0.5000000000		−0.2443403640	
		0.6990570277		−0.1138718991
$\frac{\pi}{3}$	0.8660254038		−0.4232099248	
		0.2558726308		
$\frac{\pi}{2}$	1.0000000000			

Interpolacijski polinom p_3 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_3(x) = 0 + 0.9549296586\,x - 0.2443403640\,x\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \\ - 0.1138718991\,x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Napomena: zadnja dva stupca u prethodnoj tablici i polinom p_3 **ne** treba računati.

Aproksimacija vrijednosti $f''(x_0)$ u točki $x_0=0$ je

$$\begin{aligned} p_3''(0) &= \frac{1}{h}\Big(-2\,f[x_0,x_1]+3\,f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]\Big) \\ &= \frac{6}{\pi}\Big(-2\cdot 0.9549296586+3\cdot 0.6990570277-0.2558726308\Big) \\ &= -0.1309416064. \end{aligned}$$

Prava vrijednost $f''(x_0)$ i pripadna pogreška su

$$\begin{aligned} f''(0) &= -\sin(0) = 0, \\ f''(0)-p_3''(0) &= 0.1309416064 = 1.309416064\cdot 10^{-1}. \end{aligned}$$

——— • ———

Zadatak 3.4.2. (NM 2012, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa C)

Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Prvu derivaciju f' aproksimiramo prvom derivacijom p_3' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

(a) Nađite takvu aproksimaciju za $f'(x_1)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

(b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x$$

i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f'(x_1)$ i pripadnu pravu pogrešku.

Rješenje. Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 (s podijeljenim, a ne konačnim razlikama) za funkciju f na mreži čvorova x_0, x_1, x_2, x_3 je

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2). \end{aligned}$$

Deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned} p_3'(x) &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,\big((x - x_1) + (x - x_0)\big) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,\big((x - x_1)\,(x - x_2) + (x - x_0)\,(x - x_2) \\ &\qquad + (x - x_0)\,(x - x_1)\big). \end{aligned}$$

(a) Kad uvrstimo točku x_1, izlazi

$$p_3'(x_1) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,(x_1 - x_0) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x_1 - x_0)\,(x_1 - x_2).$$

Sad iskoristimo da je mreža ekvidistantna, tj. $x_i = x_0 + ih$, za $i = 0, 1, 2, 3$, pa je

$$x_i - x_j = (i - j)h.$$

Onda je

$$\begin{aligned} p_3'(x_1) &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,(h) + f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(h)(-h) \\ &= f[x_0, x_1] + h\,f[x_0, x_1, x_2] - h^2\,f[x_0, x_1, x_2, x_3]. \end{aligned}$$

Podijeljene razlike višeg reda možemo izraziti preko podijeljenih razlika prvog reda u susjednim čvorovima mreže. Na ekvidistantnoj mreži dobivamo

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{2h}, \\ f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{2h}, \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{3h} \\ &= \frac{f[x_0, x_1] - 2\,f[x_1, x_2] + f[x_2, x_3]}{6h^2}. \end{aligned}$$

Kad to uvrstimo u formulu za $p_3'(x_1)$, izlazi

$$\begin{aligned} p_3'(x_1) &= f[x_0, x_1] + h\,\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{2h} - h^2\,\frac{f[x_0, x_1] - 2\,f[x_1, x_2] + f[x_2, x_3]}{6h^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) f[x_0, x_1] + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) f[x_1, x_2] - \frac{1}{6}\,f[x_2, x_3] \\ &= \frac{1}{3}\,f[x_0, x_1] + \frac{5}{6}\,f[x_1, x_2] - \frac{1}{6}\,f[x_2, x_3]. \end{aligned}$$

(b) Uočimo da je zadana mreža ekvidistantna, s korakom $h = \pi/6$, pa možemo koristiti prethodnu formulu.

Tablica podijeljenih razlika za funkciju $f(x) = \cos x$ na zadanoj mreži čvorova je

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
0	1.0000000000			
		-0.2558726308		
$\frac{\pi}{6}$	0.8660254038		-0.4232099248	
		-0.6990570277		0.1138718991
$\frac{\pi}{3}$	0.5000000000		-0.2443403640	
		-0.9549296586		
$\frac{\pi}{2}$	0.0000000000			

Interpolacijski polinom p_3 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_3(x) = 1 - 0.2558726308\, x - 0.4232099248\, x\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ + 0.1138718991\, x\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Napomena: zadnja dva stupca u prethodnoj tablici i polinom p_3 **ne** treba računati.

Aproksimacija vrijednosti $f'(x_1)$ u točki $x_1 = \pi/6$ je

$$\begin{aligned} p_3'(\pi/6) &= \frac{1}{3}\, f[x_0, x_1] + \frac{5}{6}\, f[x_1, x_2] - \frac{1}{6}\, f[x_2, x_3]. \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-0.2558726308) + \frac{5}{6} \cdot (-0.6990570277) - \frac{1}{6} \cdot (-0.9549296586) \\ &= -0.5086834569. \end{aligned}$$

Prava vrijednost $f'(x_1)$ i pripadna pogreška su

$$\begin{aligned} f'(\pi/6) = -\sin(\pi/6) = -\frac{1}{2} &= -0.5000000000, \\ f'(\pi/6) - p_3'(\pi/6) = &\quad 0.0086834569 = 8.6834569 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

3.5 Numeričko deriviranje iz općeg interpolacijskog polinoma

Zajednički dio zadatka za sve grupe (konkretno zadani brojevi $\alpha, \beta \neq 0$ i $\alpha \neq \beta$).

Zadatak 3.5.1. (NM 2016, 1. kolokvij, 5. zadatak, sve grupe — zajednički dio)

U čvorovima x_0, $x_1 = x_0 + \alpha h$, $x_2 = x_0 + \beta h$, gdje je $h > 0$, zadani su sljedeći podaci o funkciji f

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),$$

tj. x_0 je dvostruki čvor. Neka je p_3 polinom stupnja najviše 3, koji interpolira ove zadane podatke.

(a) Ukratko argumentirajte postoji li jedinstveni polinom p_3.

Rješenje zajedničkog (a) dijela.

(a) U zadanim podacima nema "preskakanja" derivacija u čvoru x_0, pa sigurno postoji jedinstveni polinom p_3, stupnja najviše 3, koji interpolira zadane podatke (poziv na rezultat s predavanja).

Izravni argument ide zapisom polinoma p_3 u Newtonovoj bazi, s tim da je x_0 dvostruki čvor. Pripadna baza je

$$1, \quad (x - x_0), \quad (x - x_0)^2, \quad (x - x_0)^2(x - x_1).$$

Uzmimo da polinom p_3 ima zapis u obliku

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^2(x - x_1),$$

gdje su a_i nepoznati koeficijenti. Kad napišemo linearni sustav za zadani problem interpolacije, dobivamo sustav s donjom trokutastom matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 1 & (x_1 - x_0) & (x_1 - x_0)^2 & \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)^2 & (x_2 - x_0)^2(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice sustava je različita od nule, jer su čvorovi x_0, x_1, x_2 međusobno različiti (zbog $h > 0$). Dakle, matrica je regularna i postoji jedinstveno rješenje za koeficijente polinoma p_3 u ovako izabranoj bazi.

Dodatno, znamo da su koeficijenti a_i podijeljene razlike, s tim da u dvostrukom čvoru x_0 vrijedi $f[x_0, x_0] = f'(x_0)$.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 (s podijeljenim razlikama) za funkciju f na mreži čvorova x_0, x_0, x_1, x_2 je

$$\begin{aligned} p_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0]\,(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1]\,(x - x_0)^2 \\ + f[x_0, x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)^2(x - x_1). \end{aligned}$$

—— • ——

Zadatak 3.5.2. (NM 2016, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa A)

U čvorovima x_0, $x_1 = x_0 + 3h$, $x_2 = x_0 + 4h$, gdje je $h > 0$, zadani su sljedeći podaci o funkciji f

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),$$

tj. x_0 je dvostruki čvor. Neka je p_3 polinom stupnja najviše 3, koji interpolira ove zadane podatke.

(a) Ukratko argumentirajte postoji li jedinstveni polinom p_3.

(b) Prvu derivaciju $f'(x_1)$ aproksimiramo prvom derivacijom $p_3'(x_1)$. Nađite ovu aproksimaciju i zapišite ju kao linearnu kombinaciju $f'(x_0)$ i **prvih** podijeljenih razlika funkcije f u **susjednim** čvorovima mreže.

(c) Zadana je funkcija
$$f(x) = \sin x.$$
Za početni čvor $x_0 = 0$ i $h = \pi/8$, izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f'(x_1)$ i pripadnu pravu pogrešku.

Rješenje.

(a) Pogledati zajednički dio rješenja za sve grupe.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 (s podijeljenim razlikama) za funkciju f na mreži čvorova x_0, x_0, x_1, x_2 je

$$\begin{aligned} p_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_0]\,(x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1]\,(x-x_0)^2 \\ + f[x_0,x_0,x_1,x_2]\,(x-x_0)^2(x-x_1), \end{aligned}$$

s tim da je $f[x_0,x_0] = f'(x_0)$. Deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned} p_3'(x) &= f[x_0,x_0] + f[x_0,x_0,x_1]\,\big(2(x-x_0)\big) \\ &\quad + f[x_0,x_0,x_1,x_2]\,\big(2(x-x_0)\,(x-x_1) + (x-x_0)^2\big) \\ &= f[x_0,x_0] + f[x_0,x_0,x_1]\cdot 2(x-x_0) \\ &\quad + f[x_0,x_0,x_1,x_2]\,(x-x_0)\big(2(x-x_1) + (x-x_0)\big). \end{aligned}$$

(b) Kad uvrstimo točku x_1, izlazi

$$\begin{aligned} p_3'(x_1) = f[x_0,x_0] + f[x_0,x_0,x_1]\cdot 2(x_1-x_0) \\ + f[x_0,x_0,x_1,x_2]\,(x_1-x_0)^2. \end{aligned}$$

Sad iskoristimo da su poznate udaljenosti čvorova x_1 i x_2 od početnog čvora x_0, pa sve međusobne udaljenosti čvorova izrazimo preko koraka h

$$x_1 - x_0 = 3h, \qquad x_2 - x_0 = 4h, \qquad x_2 - x_1 = h.$$

Onda je

$$\begin{aligned} p_3'(x_1) &= f[x_0,x_0] + f[x_0,x_0,x_1]\cdot 2(3h) + f[x_0,x_0,x_1,x_2]\,(3h)^2 \\ &= f[x_0,x_0] + 6h\,f[x_0,x_0,x_1] + 9h^2\,f[x_0,x_0,x_1,x_2]. \end{aligned}$$

Podijeljene razlike višeg reda možemo izraziti preko podijeljenih razlika **prvog** reda u susjednim čvorovima mreže. Na zadanoj mreži dobivamo

$$f[x_0,x_0,x_1] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_0,x_0]}{x_1-x_0} = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_0,x_0]}{3h},$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{4h},$$

$$\begin{aligned} f[x_0,x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_0,x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{f[x_0,x_1,x_2]-f[x_0,x_0,x_1]}{4h} \\ &= \frac{1}{4h}\cdot\frac{3\,(f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1])-4\,(f[x_0,x_1]-f[x_0,x_0])}{12h} \\ &= \frac{4f[x_0,x_0]-7f[x_0,x_1]+3f[x_1,x_2]}{48h^2}. \end{aligned}$$

Kad to uvrstimo u formulu za $p_3'(x_1)$, izlazi

$$\begin{aligned} p_3'(x_1) &= f[x_0,x_0] + 6h\,\frac{f[x_0,x_1]-f[x_0,x_0]}{3h} \\ &\qquad + 9h^2\,\frac{4f[x_0,x_0]-7f[x_0,x_1]+3f[x_1,x_2]}{48h^2} \\ &= \left(1-2+\frac{3}{4}\right) f[x_0,x_0] + \left(2-\frac{21}{16}\right) f[x_0,x_1] + \frac{9}{16}\,f[x_1,x_2] \\ &= -\frac{1}{4}\,f[x_0,x_0] + \frac{11}{16}\,f[x_0,x_1] + \frac{9}{16}\,f[x_1,x_2]. \end{aligned}$$

Tražena aproksimacija $p_3'(x_1)$ za prvu derivaciju $f'(x_1)$, kao linearna kombinacija $f'(x_0)$ i **prvih** podijeljenih razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže, je

$$p_3'(x_1) = -\frac{1}{4}\,f'(x_0) + \frac{11}{16}\,f[x_0,x_1] + \frac{9}{16}\,f[x_1,x_2].$$

Kontrola: zbroj koeficijenata mora biti jednak 1.

(c) Za zadani početni čvor $x_0 = 0$ i korak $h = \pi/8$, čvorovi mreže su

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = x_0 + 3h = \frac{3\pi}{8}, \qquad x_2 = x_0 + 4h = \frac{\pi}{2}.$$

Tablica podijeljenih razlika za funkciju $f(x) = \sin x$ na zadanoj mreži čvorova (oznake: $t_0 = t_1 = x_0$, $t_2 = x_1$, $t_3 = x_2$), uz $f'(x_0) = \cos 0 = 1$, je

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j,t_{j+1}]$	$f[t_j,t_{j+1},t_{j+2}]$	$f[t_j,t_{j+1},t_{j+2},t_{j+3}]$
0	0.0000000000			
		1.0000000000		
0	0.0000000000		−0.1831654367	
		0.7842133036		−0.1226628818
$\frac{3\pi}{8}$	0.9238795325		−0.3758438410	
		0.1938391787		
$\frac{\pi}{2}$	1.0000000000			

Interpolacijski polinom p_3 u Newtonovom obliku onda glasi

$$p_3(x) = 0 + 1\,x - 0.1831654367\,x^2 - 0.1226628818\,x^2\left(x - \frac{3\pi}{8}\right).$$

Napomena: zadnja dva stupca u prethodnoj tablici i polinom p_3 **ne** treba računati.

Aproksimacija vrijednosti $f'(x_1)$ u točki $x_1 = 3\pi/8$ je

$$\begin{aligned} p_3'(3\pi/8) &= -\frac{1}{4}\,f'(x_0) + \frac{11}{16}\,f[x_0, x_1] + \frac{9}{16}\,f[x_1, x_2] \\ &= -\frac{1}{4}\cdot 1.0000000000 + \frac{11}{16}\cdot 0.7842133036 + \frac{9}{16}\cdot 0.1938391787 \\ &= 0.3981811843. \end{aligned}$$

Prava vrijednost $f'(x_1)$ i pripadna pogreška su

$$\begin{aligned} f'(3\pi/8) &= \cos(3\pi/8) = 0.3826834324, \\ f'(3\pi/8) - p_3'(3\pi/8) &= -0.0154977519 = -1.54977519 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

—— • ——

Zadatak 3.5.3. (NM 2016, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa B)

U čvorovima x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 4h$, gdje je $h > 0$, zadani su sljedeći podaci o funkciji f

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),$$

tj. x_0 je dvostruki čvor. Neka je p_3 polinom stupnja najviše 3, koji interpolira ove zadane podatke.

(a) Ukratko argumentirajte postoji li jedinstveni polinom p_3.

(b) Drugu derivaciju $f''(x_1)$ aproksimiramo drugom derivacijom $p_3''(x_1)$. Nađite ovu aproksimaciju i zapišite ju kao linearnu kombinaciju **drugih** podijeljenih razlika funkcije f u **susjednim** čvorovima mreže.

(c) Zadana je funkcija
$$f(x) = \cos x$$
Za početni čvor $x_0 = 0$ i $h = \pi/8$, izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f''(x_1)$ i pripadnu pravu pogrešku.

Rješenje.

(a) Pogledati zajednički dio rješenja za sve grupe.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 (s podijeljenim razlikama) za funkciju f na mreži čvorova x_0, x_0, x_1, x_2 je

$$\begin{aligned} p_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0]\,(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1]\,(x - x_0)^2 \\ + f[x_0, x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)^2(x - x_1), \end{aligned}$$

s tim da je $f[x_0, x_0] = f'(x_0)$. Deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
p_3'(x) &= f[x_0, x_0] + f[x_0, x_0, x_1] \big(2(x - x_0)\big) \\
&\qquad + f[x_0, x_0, x_1, x_2] \big(2(x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)^2\big) \\
&= f[x_0, x_0] + f[x_0, x_0, x_1] \cdot 2(x - x_0) \\
&\qquad + f[x_0, x_0, x_1, x_2] (x - x_0)\big(2(x - x_1) + (x - x_0)\big).
\end{aligned}$$

Za drugu derivaciju dobivamo

$$\begin{aligned}
p_3''(x) &= 2\, f[x_0, x_0, x_1] + f[x_0, x_0, x_1, x_2] \big(2(x - x_1) + (x - x_0) + 3(x - x_0)\big) \\
&= 2\, f[x_0, x_0, x_1] + 2\, f[x_0, x_0, x_1, x_2] \big(2(x - x_0) + (x - x_1)\big).
\end{aligned}$$

(b) Kad uvrstimo točku x_1, izlazi

$$p_3''(x_1) = 2\, f[x_0, x_0, x_1] + 4\, f[x_0, x_0, x_1, x_2] (x_1 - x_0).$$

Sad iskoristimo da su poznate udaljenosti čvorova x_1 i x_2 od početnog čvora x_0, pa sve međusobne udaljenosti čvorova izrazimo preko koraka h

$$x_1 - x_0 = h, \qquad x_2 - x_0 = 4h, \qquad x_2 - x_1 = 3h.$$

Onda je

$$\begin{aligned}
p_3''(x_1) &= 2\, f[x_0, x_0, x_1] + 4\, f[x_0, x_0, x_1, x_2] (h) \\
&= 2\, f[x_0, x_0, x_1] + 4h\, f[x_0, x_0, x_1, x_2].
\end{aligned}$$

Podijeljenu razliku trećeg reda možemo izraziti preko podijeljenih razlika **drugog** reda u susjednim čvorovima mreže. Na zadanoj mreži dobivamo

$$f[x_0, x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_0, x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_0, x_0, x_1]}{4h}.$$

Kad to uvrstimo u formulu za $p_3''(x_1)$, izlazi

$$\begin{aligned}
p_3''(x_1) &= 2\, f[x_0, x_0, x_1] + 4h\, \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_0, x_0, x_1]}{4h} \\
&= f[x_0, x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2].
\end{aligned}$$

Tražena aproksimacija $p_3''(x_1)$ za drugu derivaciju $f''(x_1)$, kao linearna kombinacija **drugih** podijeljenih razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže, je

$$p_3''(x_1) = f[x_0, x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2].$$

Kontrola: zbroj koeficijenata mora biti jednak 2.

(b1) Napomena: Ako netko računa izravno iz tablice podijeljenih razlika, dobit će zapis preko **prvih** podijeljenih razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže.

Podijeljene razlike višeg reda možemo izraziti preko podijeljenih razlika **prvog** reda u susjednim čvorovima mreže. Na zadanoj mreži dobivamo

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_0, x_1] &= \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{h}, \\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{4h}, \\
f[x_0, x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_0, x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_0, x_0, x_1]}{4h} \\
&= \frac{1}{4h} \cdot \frac{(f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]) - 4\,(f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0])}{4h} \\
&= \frac{4f[x_0, x_0] - 5f[x_0, x_1] + f[x_1, x_2]}{16h^2}.
\end{aligned}$$

Kad to uvrstimo u početnu formulu za $p_3''(x_1)$, izlazi

$$\begin{aligned}
p_3''(x_1) &= 2\,f[x_0, x_0, x_1] + 4h\,f[x_0, x_0, x_1, x_2] \\
&= 2\,\frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{h} + 4h\,\frac{4f[x_0, x_0] - 5f[x_0, x_1] + f[x_1, x_2]}{16h^2} \\
&= \left(-\frac{2}{h} + \frac{1}{h}\right) f[x_0, x_0] + \left(\frac{2}{h} - \frac{5}{4h}\right) f[x_0, x_1] + \frac{1}{4h}\,f[x_1, x_2] \\
&= \frac{1}{h}\left(-f[x_0, x_0] + \frac{3}{4}\,f[x_0, x_1] + \frac{1}{4}\,f[x_1, x_2]\right).
\end{aligned}$$

Kontrola: zbroj koeficijenata mora biti jednak 0.

(c) Za zadani početni čvor $x_0 = 0$ i korak $h = \pi/8$, čvorovi mreže su

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = x_0 + h = \frac{\pi}{8}, \qquad x_2 = x_0 + 4h = \frac{\pi}{2}.$$

Tablica podijeljenih razlika za funkciju $f(x) = \cos x$ na zadanoj mreži čvorova (oznake: $t_0 = t_1 = x_0$, $t_2 = x_1$, $t_3 = x_2$), uz $f'(x_0) = -\sin 0 = 0$, je

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, t_{j+3}]$
0	1.0000000000			
		0.0000000000		
0	1.0000000000		−0.4936074154	
		−0.1938391787		0.0749706199
$\frac{\pi}{8}$	0.9238795325		−0.3758438410	
		−0.7842133036		
$\frac{\pi}{2}$	0.0000000000			

Interpolacijski polinom p_3 u Newtonovom obliku onda glasi

$$p_3(x) = 1 + 0\,x - 0.4936074154\,x^2 + 0.0749706199\,x^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right).$$

Napomena: zadnji stupac u prethodnoj tablici i polinom p_3 **ne** treba računati.

Aproksimacija vrijednosti $f''(x_1)$ u točki $x_1 = \pi/8$ je

$$\begin{aligned} p_3''(\pi/8) &= f[x_0, x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2] \\ &= -0.4936074154 - 0.3758438410 \\ &= -0.8694512563. \end{aligned}$$

Prava vrijednost $f''(x_1)$ i pripadna pogreška su

$$\begin{aligned} f''(\pi/8) &= -\cos(\pi/8) = -0.9238795325, \\ f''(\pi/8) - p_3''(\pi/8) &= -0.0544282762 = -5.44282762 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

4 Po dijelovima polinomna interpolacija

4.1 Po dijelovima linearna interpolacija (linearni splajn)

Zadatak 4.1.1. (NM 2008, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa A)

Funkciju

$$f(x) = (2x+1)e^{-x}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[2, 10]$ tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n+1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε, ako za interpolaciju koristimo

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu $[2, 10]$,

(b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima $[2, 3]$ i $[3, 10]$.

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(3.15)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

Rješenje. Ocjena uniformne pogreške po dijelovima linearne interpolacije na intervalu $[a, b]$, uz ekvidistantnu mrežu s n podintervala, ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{8}\Delta^2 M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|,$$

gdje je $\Delta = h = (b-a)/n$. Iz zahtjeva da je ocjena manja ili jednaka ε, dobivamo ocjenu za broj podintervala n

$$n \geq (b-a)\sqrt{\frac{M_2}{8\varepsilon}}.$$

Derivacije funkcije f su:

$$f'(x) = (-2x+1)e^{-x}, \quad f''(x) = (2x-3)e^{-x}, \quad f'''(x) = (-2x+5)e^{-x},$$

pa f''' ima nultočku u točki $c = 5/2$.

(a) Interval $[2, 10]$. Ovdje je $a = 2$, $b = 10$, $c \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} M_2 &= \max\{|f''(a)|, |f''(c)|, |f''(b)|\} \\ &= \max\{e^{-2}, 2e^{-5/2}, 17e^{-10}\} = 2e^{-5/2} = 0.1641699972. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo $n = 115$. Točka $x = 3.15$ nalazi se u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ za $k = 17$. Pripadna tablica podijeljenih razlika je

x_j	$f[x_j]$	$f[x_j, x_{j+1}]$
$x_{16} = 3.1130434783$	0.3213109890	
		−0.2274350396
$x_{17} = 3.1826086957$	0.3054894210	

pa za $x = 3.15$ dobivamo

$$\varphi(x) = 0.3129057810, \quad f(x) = 0.3128205261, \quad f(x) - \varphi(x) = -0.0000852549.$$

Ukupan broj čvorova je $n + 1 = 116$.

(b1) Podinterval $[2, 3]$. Ovdje je $a = 2$, $b = 3$, $c \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} M_2 &= \max\{|f''(a)|, |f''(c)|, |f''(b)|\} \\ &= \max\{e^{-2}, 2e^{-5/2}, 3e^{-3}\} = 2e^{-5/2} = 0.1641699972. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo $n_1 = 15$.

(b2) Podinterval $[3, 10]$. Ovdje je $a = 3$, $b = 10$, $c \notin [a, b]$.

$$\begin{aligned} M_2 &= \max\{|f''(a)|, |f''(b)|\} \\ &= \max\{3e^{-3}, 17e^{-10}\} = 3e^{-3} = 0.1493612051. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo $n_2 = 96$. Točka $x = 3.15$ nalazi se u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ za $k = 3$. Pripadna tablica podijeljenih razlika je

x_j	$f[x_j]$	$f[x_j, x_{j+1}]$
$x_2 = 3.1458333333$	0.3137680721	
		-0.2225915915
$x_3 = 3.2187500000$	0.2975374353	

pa za $x = 3.15$ dobivamo

$$\varphi(x) = 0.3128406072, \quad f(x) = 0.3128205261, \quad f(x) - \varphi(x) = -0.0000200810.$$

Ukupan broj čvorova je $n_1 + n_2 + 1 = 112$.

—— • ——

Zadatak 4.1.2. (NM 2011, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa A)

Funkciju

$$f(x) = \sqrt{3x + 2}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[a, b]$, koristeći ekvidistantnu mrežu s n podintervala.

(a) Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na intervalu $[0, 2]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimaciju za $f(0.45)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

(b) Nađite točku $c > 2$ za koju vrijedi da su ocjene uniformne pogreške po dijelovima linearne interpolacije s n podintervala na $[0, 2]$ i $[2, c]$ jednake (obje mreže su ekvidistantne).

Rješenje. Ocjena uniformne pogreške po dijelovima linearne interpolacije na intervalu $[a, b]$, uz ekvidistantnu mrežu s n podintervala, ima oblik

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \le \frac{1}{8} \Delta^2 M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|,$$

gdje je $\Delta = h = (b - a)/n$. Iz zahtjeva da je ocjena manja ili jednaka ε, dobivamo ocjenu za broj podintervala n

$$n \ge (b - a) \sqrt{\frac{M_2}{8\varepsilon}}.$$

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3x+2} \\ f'(x) &= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \\ f''(x) &= -\frac{9}{4(3x+2)^{3/2}} \\ f'''(x) &= \frac{81}{8(3x+2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Za M_2 u obzir dolaze rubovi intervala a, b, i nultočke treće derivacije f''' unutar intervala $[a,b]$. No, očito je da f''' nema nultočaka na $\mathbb{R}$, pa ostaju samo rubovi intervala. Nadalje, $|f''(x)|$ je monotono **padajuća** funkcija za sve $x > -2/3$. Odavde slijedi da se M_2 na intervalu $[a,b]$ dostiže uvijek u **lijevom** rubu a, čim je f dobro definirana. Dakle,

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| = |f''(a)|.$$

(a) Interval $[0,2]$. Ovdje je $a = 0$ i $b = 2$, pa je

$$M_2 = |f''(0)| = \frac{9\sqrt{2}}{16} = 0.7954951288.$$

Uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, za broj podintervala n mora vrijediti

$$n \geq 2\sqrt{\frac{M_2}{8\cdot 10^{-4}}} = \frac{75}{\sqrt[4]{2}} = 63.0672311440.$$

Izlazi da trebamo $n = 64$ podintervala, odnosno, 65 čvorova.

Tražena ekvidistantna mreža na $[0,2]$ ima korak $h = 1/32$. Točka $x = 0.45$ nalazi se u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ za $k = 15$. Pripadna tablica podijeljenih razlika za polinom prvog stupnja na tom podintervalu je

x_j	$f[x_j]$	$f[x_j, x_{j+1}]$
$x_{14} = 0.4375000000$	1.8200274723	
		0.8184131267
$x_{15} = 0.4687500000$	1.8456028825	

Za $x = 0.45$ dobivamo

$$\begin{aligned} \varphi(0.45) &= 1.8302576364, \\ f(0.45) &= 1.8303005218, \\ f(0.45) - \varphi(0.45) &= 0.0000428854 = 4.28854\cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

(b) Neka je $c > 2$ i gledamo podinterval $[2,c]$. Ovdje je $a = 2$, pa je

$$M_{2,1} = \max_{x\in[2,c]} |f''(x)| = |f''(2)| = \frac{9\sqrt{2}}{128} = 0.0994368911.$$

Iz zahtjeva da su **ocjene** uniformne pogreške po dijelovima linearne interpolacije s n ekvidistantnih podintervala na $[0,2]$ i $[2,c]$ jednake, dobivamo jednadžbu

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2-0}{n}\right)^2 M_2 = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{c-2}{n}\right)^2 M_{2,1}.$$

Kraćenjem vidimo da rezultat ne ovisi o n, jer izlazi

$$2^2 M_2 = (c-2)^2 M_{2,1}.$$

Osim toga, $M_{2,1}$ **ne ovisi** o c, pa se rješenje lako nalazi. Ovu jednadžbu smijemo korijenovati, jer znamo da je $c > 2$, a sve ostale veličine su sigurno pozitivne. Tako dobivamo linearnu jednadžbu za c, s rješenjem

$$c = 2 + 2\sqrt{\frac{M_2}{M_{2,1}}} = 2 + 4\sqrt{2} = 7.6568542495.$$

4.2 Po dijelovima kubna Hermiteova interpolacija

Zadatak 4.2.1. (NM 2018, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa A)

Funkciju

$$f(x) = (2x+1)e^{-x}$$

aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ na intervalu $[1, 5]$, koristeći ekvidistantnu mrežu čvorova s n podintervala. Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na tom intervalu ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimacije za f i f' u točki $x = 2.15$ i pripadne prave pogreške.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \le \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

Rješenje. Ekvidistantna mreža s n podintervala u intervalu $[a, b]$ ima korak $h = (b-a)/n$. Ocjena uniformne pogreške po dijelovima kubne Hermiteove interpolacije na intervalu $[a, b]$, uz ekvidistantnu mrežu s n podintervala, ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \le \frac{(b-a)^4}{384n^4} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Iz zahtjeva da je ocjena manja ili jednaka ε, dobivamo ocjenu za broj podintervala n

$$n \ge (b-a)\sqrt[4]{\frac{M_4}{384\,\varepsilon}}.$$

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned}
f(x) &= (2x+1)e^{-x} \\
f'(x) &= 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = (1-2x)e^{-x} \\
f''(x) &= -2e^{-x} - (1-2x)e^{-x} = (2x-3)e^{-x} \\
f'''(x) &= 2e^{-x} - (2x-3)e^{-x} = (5-2x)e^{-x} \\
f^{(4)}(x) &= -2e^{-x} - (5-2x)e^{-x} = (2x-7)e^{-x} \\
f^{(5)}(x) &= 2e^{-x} - (2x-7)e^{-x} = (9-2x)e^{-x}.
\end{aligned}$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 1, 5, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[1, 5]$. Iz $f^{(5)}(x) = 0$, zbog $e^{-x} \ne 0$, dobivamo

$$9 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{2}.$$

Vidimo da $f^{(5)}$ **ima** nultočku $9/2$ unutar intervala $[1, 5]$. Onda imamo

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(1) &= -5e^{-1} = -1.8393972059, \\
f^{(4)}(5) &= 3e^{-5} = 0.0202138410, \\
f^{(4)}(9/2) &= 2e^{-9/2} = 0.0222179931,
\end{aligned}$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(1)| = 1.8393972059.$$

Uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, za broj podintervala n mora vrijediti

$$n \geq 4 \sqrt[4]{\frac{M_4}{384 \cdot 10^{-4}}} = 40 \sqrt[4]{\frac{5e^{-1}}{384}} = 10.5231573865.$$

Izlazi da je potrebno $n = 11$ podintervala, odnosno, 12 čvorova.

Tražena ekvidistantna mreža na $[1, 5]$ ima korak $h = 4/11$. Točka $x = 2.15$ nalazi se u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ za $k = 4$, a čvorovi su $x_3 = 23/11$ i $x_4 = 27/11$.

Restrikcija po dijelovima kubne Hermiteove interpolacije φ na podinterval $[x_3, x_4]$ je kubni polinom $p_4 \in \mathcal{P}_3$, koji interpolira funkciju f i njezinu derivaciju f' u rubovima tog intervala. Newtonov oblik polinoma p_4 za funkciju f na mreži čvorova x_3, x_3, x_4, x_4 je

$$\begin{aligned} p_4(x) = f[x_3] + f[x_3, x_3]\,(x - x_3) + f[x_3, x_3, x_4]\,(x - x_3)^2 \\ + f[x_3, x_3, x_4, x_4]\,(x - x_3)^2(x - x_4). \end{aligned}$$

U dvostrukom čvoru x_j vrijedi da je $f[x_j, x_j] = f'(x_j) =$ zadani podatak za derivaciju. U tablici podijeljenih razlika, lokalnu mrežu čvorova s multiplicitetima x_3, x_3, x_4, x_4 označavamo s t_0, t_1, t_2, t_3 (tj. $t_0 = t_1 = x_3$ i $t_2 = t_3 = x_4$).

Za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_4 trebamo tablicu podijeljenih razlika za funkciju f u zadanim čvorovima:

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, \ldots, t_{j+3}]$
2.0909090909	0.6403418556			
		−0.3931923675		
2.0909090909	0.6403418556		0.0774497665	
		−0.3650288160		0.0080587990
2.4545454545	0.5076041043		0.0803802389	
		−0.3357996382		
2.4545454545	0.5076041043			

Interpolacijski polinom p_4 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_4(x) = {} & 0.6403418556 \\ & - 0.3931923675\,(x - 2.0909090909) \\ & + 0.0774497665\,(x - 2.0909090909)^2 \\ & + 0.0080587990\,(x - 2.0909090909)^2(x - 2.4545454545). \end{aligned}$$

U standardnoj bazi je

$$p_4(x) = 0.0080587990\,x^3 + 0.0239686457\,x^2 - 0.5991216962\,x + 1.7145948409.$$

U točki $x = 2.15$, za funkcijsku vrijednost dobivamo

$$\begin{aligned} p_4(2.15) &= 0.6173696256, \\ f(2.15) &= 0.6173660362, \\ f(2.15) - p_4(2.15) &= -0.0000035894 = -3.5894 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Za vrijednost derivacije dobivamo

$$\begin{aligned} p_4'(2.15) &= -0.3843011242, \\ f'(2.15) &= -0.3843977207, \\ f'(2.15) - p_4'(2.15) &= -0.0000965964 = -9.65964 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Zadatak 4.2.2. (NM 2018, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa B)

Funkciju

$$f(x) = (3x - 1)e^{-x}$$

aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ na intervalu $[2, 6]$, koristeći ekvidistantnu mrežu čvorova s n podintervala. Nađite najmanji n takav da ocjena uniformne pogreške na tom intervalu ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$. Za taj n, izračunajte aproksimacije za f i f' u točki $x = 5.15$ i pripadne prave pogreške.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

Rješenje. Ekvidistantna mreža s n podintervala u intervalu $[a, b]$ ima korak $h = (b-a)/n$. Ocjena uniformne pogreške po dijelovima kubne Hermiteove interpolacije na intervalu $[a, b]$, uz ekvidistantnu mrežu s n podintervala, ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{(b-a)^4}{384n^4} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Iz zahtjeva da je ocjena manja ili jednaka ε, dobivamo ocjenu za broj podintervala n

$$n \geq (b-a)\sqrt[4]{\frac{M_4}{384\,\varepsilon}}.$$

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned}
f(x) &= (3x-1)e^{-x} \\
f'(x) &= 3e^{-x} - (3x-1)e^{-x} = (4-3x)e^{-x} \\
f''(x) &= -3e^{-x} - (4-3x)e^{-x} = (3x-7)e^{-x} \\
f'''(x) &= 3e^{-x} - (3x-7)e^{-x} = (10-3x)e^{-x} \\
f^{(4)}(x) &= -3e^{-x} - (10-3x)e^{-x} = (3x-13)e^{-x} \\
f^{(5)}(x) &= 3e^{-x} - (3x-13)e^{-x} = (16-3x)e^{-x}.
\end{aligned}$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 2, 6, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[2, 6]$. Iz $f^{(5)}(x) = 0$, zbog $e^{-x} \neq 0$, dobivamo

$$16 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{16}{3}.$$

Vidimo da $f^{(5)}$ **ima** nultočku $16/3$ unutar intervala $[2, 6]$. Onda imamo

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(2) &= -7e^{-2} = -0.9473469827, \\
f^{(4)}(6) &= 5e^{-6} = 0.0123937609, \\
f^{(4)}(16/3) &= 3e^{-16/3} = 0.0144838500,
\end{aligned}$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(2)| = 0.9473469827.$$

Uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, za broj podintervala n mora vrijediti

$$n \geq 4\sqrt[4]{\frac{M_4}{384 \cdot 10^{-4}}} = 40\sqrt[4]{\frac{7e^{-2}}{384}} = 8.9146532303.$$

Izlazi da je potrebno $n = 9$ podintervala, odnosno, 10 čvorova.

Tražena ekvidistantna mreža na $[2, 6]$ ima korak $h = 4/9$. Točka $x = 5.15$ nalazi se u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ za $k = 8$, a čvorovi su $x_7 = 46/9$ i $x_8 = 50/9$.

Restrikcija po dijelovima kubne Hermiteove interpolacije φ na podinterval $[x_7, x_8]$ je kubni polinom $p_8 \in \mathcal{P}_3$, koji interpolira funkciju f i njezinu derivaciju f' u rubovima tog intervala. Newtonov oblik polinoma p_8 za funkciju f na mreži čvorova x_7, x_7, x_8, x_8 je

$$\begin{aligned} p_8(x) = f[x_7] &+ f[x_7, x_7]\,(x - x_7) + f[x_7, x_7, x_8]\,(x - x_7)^2 \\ &+ f[x_7, x_7, x_8, x_8]\,(x - x_7)^2(x - x_8). \end{aligned}$$

U dvostrukom čvoru x_j vrijedi da je $f[x_j, x_j] = f'(x_j) =$ zadani podatak za derivaciju. U tablici podijeljenih razlika, lokalnu mrežu čvorova s multiplicitetima x_7, x_7, x_8, x_8 označavamo s t_0, t_1, t_2, t_3 (tj. $t_0 = t_1 = x_7$ i $t_2 = t_3 = x_8$).

Za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_8 trebamo tablicu podijeljenih razlika za funkciju f u zadanim čvorovima:

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, \ldots, t_{j+3}]$
5.1111111111	0.0864211117			
		−0.0683329721		
5.1111111111	0.0864211117		0.0228581000	
		−0.0581738165		−0.0048279079
5.5555555556	0.0605660822		0.0207123632	
		−0.0489683218		
5.5555555556	0.0605660822			

Interpolacijski polinom p_8 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_8(x) = \;& 0.0864211117 \\ & - 0.0683329721\,(x - 5.1111111111) \\ & + 0.0228581000\,(x - 5.1111111111)^2 \\ & - 0.0048279079\,(x - 5.1111111111)^2(x - 5.5555555556). \end{aligned}$$

U standardnoj bazi je

$$p_8(x) = -0.0048279079\,x^3 + 0.0990317575\,x^2 - 0.7022926765\,x + 1.7334869048.$$

U točki $x = 5.15$, za funkcijsku vrijednost dobivamo

$$\begin{aligned} p_8(5.15) &= 0.0838012489, \\ f(5.15) &= 0.0838013983, \\ f(5.15) - p_8(5.15) &= 0.0000001494 = 1.494 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

Za vrijednost derivacije dobivamo

$$\begin{aligned} p_8'(5.15) &= -0.0664101336, \\ f'(5.15) &= -0.0664031841, \\ f'(5.15) - p_8'(5.15) &= \;\; 0.0000069495 = 6.9495 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

4.3 Po dijelovima kubna kvazihermiteova interpolacija

Zadatak 4.3.1. (NM 2020, dodatni zadatak (nije s kolokvija))

Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{2x+3}$$

na intervalu $[0, 2]$. Po dijelovima kubnom kvazihermiteovom interpolacijom, na mreži čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = 3/4$, $x_2 = 5/4$, $x_3 = 2$, izračunajte aproksimaciju za $f(1)$ i pripadnu grešku, koristeći sljedeće aproksimacije za prvu derivaciju (u potrebnim čvorovima):

(a) podijeljena razlika unaprijed (osim u zadnjem čvoru, gdje je unatrag),

(b) podijeljena razlika unatrag (osim u prvom čvoru, gdje je unaprijed),

(c) simetrična (centralna) podijeljena razlika (osim u prvom i zadnjem čvoru, gdje je unaprijed, odnosno, unatrag),

(d) Besselova aproksimacija za prvu derivaciju (težinska srednja vrijednost podijeljenih razlika unaprijed i unatrag).

Za svaku izračunatu aproksimaciju prve derivacije (samo u potrebnim čvorovima), nađite ocjenu lokalne greške i pravu grešku.

Formula: Ako je p_n interpolacijski polinom za f s čvorovima $x_0, \dots, x_n$, lokalna greška za prvu derivaciju u točki x je

$$e_n'(x) = f'(x) - p_n'(x) = \omega'(x) \, \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} + \omega(x) \, \frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!},$$

gdje je ω polinom čvorova za ovu interpolaciju, a za ξ i ξ_1 vrijedi $\xi, \xi_1 \in (x_{\min}, x_{\max})$, uz $x_{\min} = \min\{x_0, \dots, x_n, x\}$ i $x_{\max} = \max\{x_0, \dots, x_n, x\}$.

Obratite pažnju na stupanj i čvorove interpolacije za odgovarajuću aproksimaciju prve derivacije!

— • —

Uvod u rješenje. Neka je $x_0, \dots, x_n$ zadana mreža čvorova i neka su $f_k = f(x_k)$, za $k = 0, \dots, n$, zadane funkcijske vrijednosti. Kod **po dijelovima kubne** interpolacije, restrikcija interpolacijske funkcije φ na svaki podinterval mreže $[x_{k-1}, x_k]$ je kubni polinom $p_k \in \mathcal{P}_3$, za $k = 1, \dots, n$. Kod po dijelovima kubne **kvazihermiteove** interpolacije, tražena funkcija φ određuje se iz dodatnih zahtjeva interpolacije

$$\varphi'(x_{k-1}) = p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1}, \quad \varphi'(x_k) = p_k'(x_k) = s_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su s_k neke aproksimacije **derivacije** (ili nagiba) funkcije f u čvorovima interpolacije. Interpolacijska funkcija φ je onda klase $C^1[x_0, x_n]$, tj. ima neprekidnu derivaciju u svim čvorovima.

Restrikcija p_k na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ određuje se **lokalno**, kao "obična" Hermiteova interpolacija funkcije i derivacije u dvostrukim čvorovima x_{k-1} i x_k, iz uvjeta

$$p_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, \quad p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1}, \quad p_k(x_k) = f_k, \quad p_k'(x_k) = s_k.$$

Vrijednosti s_{k-1} i s_k uzimamo kao zadane vrijednosti derivacije funkcije f u čvorovima i uvrštavamo ih u tablicu podijeljenih razlika, na mjesto podijeljenih razlika s dvostrukim čvorovima

$$f[x_{k-1}, x_{k-1}] = s_{k-1}, \quad f[x_k, x_k] = s_k.$$

U tablici podijeljenih razlika za nalaženje polinoma p_k, lokalnu mrežu čvorova s multiplicitetima $x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k$ označavamo s t_0, t_1, t_2, t_3 (tj. $t_0 = t_1 = x_{k-1}$ i $t_2 = t_3 = x_k$).

—— • ——

Zajednički dio rješenja za ocjene greške. Za ocjenu lokalne greške raznih aproksimacija prve derivacije, trebat će izračunati maksimume apsolutnih vrijednosti f'' i f''' na **raznim** intervalima oblika $[a, b]$, koji su sadržani u osnovnom intervalu $[x_0, x_3] = [0, 2]$, na kojem se radi interpolacija funkcije f.

Funkcija f i njezine derivacije (do četvrte) su redom

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2x+3} \\ f'(x) &= -\frac{2}{(2x+3)^2} \\ f''(x) &= \frac{8}{(2x+3)^3} \\ f'''(x) &= -\frac{48}{(2x+3)^4} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{384}{(2x+3)^5}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je lijevi rub intervala $a \geq 0$ i $b \geq a$. Treba naći

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \quad M_3 = \max_{x \in [a,b]} |f'''(x)|.$$

Uočimo da sve ove funkcije **nemaju** nultočku. Zato, za M_2 i M_3, u obzir dolaze samo rubovi intervala a, b. Nadalje, zbog $a > -3/2$ (nultočka nazivnika), **apsolutne** vrijednosti funkcije i svih njezinih derivacija su strogo **padajuće** funkcije na $[a, b]$, pa se njihov maksimum dostiže u **lijevom** rubu intervala, tj. u točki a. Dakle, vrijedi

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = |f''(a)|, \quad M_3 = \max_{x \in [a,b]} |f'''(x)| = |f'''(a)|.$$

Ovo ćemo iskoristiti više puta, bez ponavljanja argumenta.

—— • ——

Rješenje. Zadana mreža ima $n = 3$ podintervala. Treba naći aproksimaciju funkcijske vrijednosti u točki $x = 1$, koja se nalazi u podintervalu $[x_1, x_2] = [3/4, 5/4]$. Restrikcija interpolacije φ na podinterval $[x_1, x_2]$ je kubni polinom p_2, kojeg određujemo lokalno, iz uvjeta interpolacije

$$p_2(x_1) = f_1, \quad p_2'(x_1) = s_1, \quad p_2(x_2) = f_2, \quad p_2'(x_2) = s_2.$$

Aproksimacije derivacije s_1 i s_2 računamo na razne načine. Uočimo još da čvor x_1 nije prvi, a x_2 nije zadnji čvor mreže, pa koristimo baš navedene aproksimacije za derivacije.

(a1) U oba čvora koristimo podijeljenu razliku unaprijed,

$$\begin{aligned} s_1 &= f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = -0.0808080808, \\ s_2 &= f[x_2, x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = -0.0519480519. \end{aligned}$$

Tablica podijeljenih razlika za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_2 je

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, \ldots, t_{j+3}]$
0.75	0.2222222222			
		−0.0808080808		
0.75	0.2222222222		0.0000000000	
		−0.0808080808		0.1154401154
1.25	0.1818181818		0.0577200577	
		−0.0519480519		
1.25	0.1818181818			

Interpolacijski polinom p_2 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_2(x) = \quad & 0.2222222222 \\ & - 0.0808080808\,(x - 0.75) \\ & + 0.0000000000\,(x - 0.75)^2 \\ & + 0.1154401154\,(x - 0.75)^2(x - 1.25). \end{aligned}$$

U standardnoj bazi je

$$p_2(x) = 0.1154401154\,x^3 - 0.3174603175\,x^2 + 0.2005772006\,x + 0.2016594517.$$

U točki $x = 1$, za funkcijsku vrijednost dobivamo

$$\begin{aligned} p_2(1) &= \quad 0.2002164502, \\ f(1) &= \quad 0.2000000000, \\ f(1) - p_2(1) &= -0.0002164502 = -2.164502 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Za vrijednost derivacije dobivamo (ovo se **ne traži** u zadatku)

$$\begin{aligned} p_2'(1) &= -0.0880230880, \\ f'(1) &= -0.0800000000, \\ f'(1) - p_2'(1) &= \quad 0.0080230880 = 8.0230880 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

(a2) Derivacija u čvoru x_k (koji nije zadnji čvor mreže) aproksimira se podijeljenom razlikom unaprijed

$$s_k = f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Ovu aproksimaciju dobivamo tako da povučemo linearni interpolacijski polinom za funkciju f s čvorovima x_k i x_{k+1} (ovaj i sljedeći čvor), a zatim ga deriviramo u prvom čvoru x_k. Označimo taj interpolacijski polinom s $p_{1,k}$. U Newtonovom obliku je

$$p_{1,k}(x) = f_k + f[x_k, x_{k+1}]\,(x - x_k)$$

i vrijedi $s_k = p_{1,k}'(x_k)$. Pripadni polinom čvorova ω i njegova derivacija ω' su

$$\omega(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1}), \quad \omega'(x) = 2x - (x_k + x_{k+1}).$$

Zato što deriviramo u **čvoru** $x = x_k$, vrijedi $\omega(x_k) = 0$ i $\omega'(x_k) = x_k - x_{k+1}$. U izrazu za lokalnu grešku prve derivacije ostaje samo **prvi** član (ovdje je stupanj $n = 1$)

$$f'(x_k) - p_{1,k}'(x_k) = \omega'(x_k)\,\frac{f''(\xi)}{2!} = (x_k - x_{k+1})\,\frac{f''(\xi)}{2},$$

za $\xi \in (x_k, x_{k+1})$. Za ocjenu ove greške, nađemo maksimum apsolutne vrijednosti f'' na intervalu za ξ. Dakle, ocjena lokalne greške za aproksimaciju s_k ima oblik

$$|f'(x_k) - s_k| \leq |x_k - x_{k+1}| \, \frac{M_{2,k}}{2}, \quad M_{2,k} = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f''(x)|.$$

Dodatno, za zadanu funkciju f, $M_{2,k}$ se uvijek dostiže u lijevom rubu intervala, tj. vrijedi $M_{2,k} = |f''(x_k)|$.

Treba naći ocjenu lokalne greške i pravu grešku za aproksimacije derivacija s_1 i s_2. Za aproksimaciju s_1 u točki $x_1 = 3/4$ dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned} |f'(x_1) - s_1| &\leq |x_1 - x_2| \, \frac{|f''(x_1)|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0.0877914952}{2} \\ &= 0.0219478738 = 2.19478738 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Izračunata vrijednost za s_1, egzaktna derivacija i prava greška su

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.0808080808, \\ f'(3/4) &= -0.0987654321, \\ f'(3/4) - s_1 &= -0.0179573513 = -1.79573513 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Za aproksimaciju s_2 u točki $x_2 = 5/4$ dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned} |f'(x_2) - s_2| &\leq |x_2 - x_3| \, \frac{|f''(x_2)|}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{0.0480841473}{2} \\ &= 0.0180315552 = 1.80315552 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Izračunata vrijednost za s_2, egzaktna derivacija i prava greška su

$$\begin{aligned} s_2 &= -0.0519480519, \\ f'(5/4) &= -0.0661157025, \\ f'(5/4) - s_2 &= -0.0141676505 = -1.41676505 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

(b1) U oba čvora koristimo podijeljenu razliku unatrag,

$$\begin{aligned} s_1 &= f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = -0.1481481481, \\ s_2 &= f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = -0.0808080808. \end{aligned}$$

Tablica podijeljenih razlika za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_2 je

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, \ldots, t_{j+3}]$
0.75	0.2222222222			
		-0.1481481481		
0.75	0.2222222222		0.1346801347	
		-0.0808080808		-0.2693602694
1.25	0.1818181818		0.0000000000	
		-0.0808080808		
1.25	0.1818181818			

Interpolacijski polinom p_2 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_2(x) = {} & \ \ 0.2222222222 \\ & - 0.1481481481\,(x - 0.75) \\ & + 0.1346801347\,(x - 0.75)^2 \\ & - 0.2693602694\,(x - 0.75)^2(x - 1.25). \end{aligned}$$

U standardnoj bazi je

$$p_2(x) = -0.2693602694\,x^3 + 0.8754208754\,x^2 - 1.0067340067\,x + 0.5984848485.$$

U točki $x = 1$, za funkcijsku vrijednost dobivamo

$$\begin{aligned} p_2(1) = {} & \ \ 0.1978114478, \\ f(1) = {} & \ \ 0.2000000000, \\ f(1) - p_2(1) = {} & \ \ 0.0021885522 = 2.1885522 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Za vrijednost derivacije dobivamo (ovo se **ne traži** u zadatku)

$$\begin{aligned} p_2'(1) &= -0.0639730640, \\ f'(1) &= -0.0800000000, \\ f'(1) - p_2'(1) &= -0.0160269360 = -1.60269360 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

(b2) Derivacija u čvoru x_k (koji nije prvi čvor mreže) aproksimira se podijeljenom razlikom unatrag

$$s_k = f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}.$$

Ovu aproksimaciju dobivamo tako da povučemo linearni interpolacijski polinom za funkciju f s čvorovima x_{k-1} i x_k (prethodni i ovaj čvor), a zatim ga deriviramo u drugom čvoru x_k. Označimo taj interpolacijski polinom s $p_{1,k}$. U Newtonovom obliku je

$$p_{1,k}(x) = f_{k-1} + f[x_{k-1}, x_k]\,(x - x_{k-1})$$

i vrijedi $s_k = p_{1,k}'(x_k)$. Pripadni polinom čvorova ω i njegova derivacija ω' su

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad \omega'(x) = 2x - (x_{k-1} + x_k).$$

Zato što deriviramo u **čvoru** $x = x_k$, vrijedi $\omega(x_k) = 0$ i $\omega'(x_k) = x_k - x_{k-1}$. U izrazu za lokalnu grešku prve derivacije ostaje samo **prvi** član (ovdje je stupanj $n = 1$)

$$f'(x_k) - p_{1,k}'(x_k) = \omega'(x_k)\,\frac{f''(\xi)}{2!} = (x_k - x_{k-1})\,\frac{f''(\xi)}{2},$$

za $\xi \in (x_{k-1}, x_k)$. Za ocjenu ove greške, nađemo maksimum apsolutne vrijednosti f'' na intervalu za ξ. Dakle, ocjena lokalne greške za aproksimaciju s_k ima oblik

$$|f'(x_k) - s_k| \le |x_k - x_{k-1}|\,\frac{M_{2,k}}{2}, \quad M_{2,k} = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|.$$

Dodatno, za zadanu funkciju f, $M_{2,k}$ se uvijek dostiže u lijevom rubu intervala, tj. vrijedi $M_{2,k} = |f''(x_{k-1})|$.

Treba naći ocjenu lokalne greške i pravu grešku za aproksimacije derivacija s_1 i s_2.

Za aproksimaciju s_1 u točki $x_1 = 3/4$ dobivamo ocjenu

$$
\begin{aligned}
|f'(x_1) - s_1| \leq |x_1 - x_0| \, \frac{|f''(x_0)|}{2} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{0.2962962963}{2} \\
&= 0.1111111111 = 1.111111111 \cdot 10^{-1}.
\end{aligned}
$$

Izračunata vrijednost za s_1, egzaktna derivacija i prava greška su

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -0.1481481481, \\
f'(3/4) &= -0.0987654321, \\
f'(3/4) - s_1 &= 0.0493827160 = 4.93827160 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

Za aproksimaciju s_2 u točki $x_2 = 5/4$ dobivamo ocjenu

$$
\begin{aligned}
|f'(x_2) - s_2| \leq |x_2 - x_1| \, \frac{|f''(x_1)|}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{0.0877914952}{2} \\
&= 0.0219478738 = 2.19478738 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

Izračunata vrijednost za s_2, egzaktna derivacija i prava greška su

$$
\begin{aligned}
s_2 &= -0.0808080808, \\
f'(5/4) &= -0.0661157025, \\
f'(5/4) - s_2 &= 0.0146923783 = 1.46923783 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

(c1) U oba čvora koristimo simetričnu (centralnu) podijeljenu razliku,

$$
\begin{aligned}
s_1 &= f[x_0, x_2] = \frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} = -0.1212121212, \\
s_2 &= f[x_1, x_3] = \frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} = -0.0634920635.
\end{aligned}
$$

Tablica podijeljenih razlika za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_2 je

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, \ldots, t_{j+3}]$
0.75	0.2222222222			
		-0.1212121212		
0.75	0.2222222222		0.0808080808	
		-0.0808080808		-0.0923520924
1.25	0.1818181818		0.0346320346	
		-0.0634920635		
1.25	0.1818181818			

Interpolacijski polinom p_2 u Newtonovom obliku onda glasi

$$
\begin{aligned}
p_2(x) = {} & 0.2222222222 \\
& - 0.1212121212\,(x - 0.75) \\
& + 0.0808080808\,(x - 0.75)^2 \\
& - 0.0923520924\,(x - 0.75)^2 (x - 1.25).
\end{aligned}
$$

U standardnoj bazi je

$$p_2(x) = -0.0923520924\,x^3 + 0.3347763348\,x^2 - 0.4675324675\,x + 0.4235209235.$$

U točki $x = 1$, za funkcijsku vrijednost dobivamo

$$\begin{aligned} p_2(1) &= \quad 0.1984126984, \\ f(1) &= \quad 0.2000000000, \\ f(1) - p_2(1) &= \quad 0.0015873016 = 1.5873016 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Za vrijednost derivacije dobivamo (ovo se **ne traži** u zadatku)

$$\begin{aligned} p_2'(1) &= -0.0750360750, \\ f'(1) &= -0.0800000000, \\ f'(1) - p_2'(1) &= -0.0049639250 = -4.9639250 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

(c2) Derivacija u čvoru x_k (koji nije prvi ili zadnji čvor mreže) aproksimira se simetričnom (centralnom) podijeljenom razlikom

$$s_k = f[x_{k-1}, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}}.$$

Ovu aproksimaciju dobivamo tako da povučemo linearni interpolacijski polinom za funkciju f s čvorovima x_{k-1} i x_{k+1} (prethodni i sljedeći čvor), a zatim ga deriviramo u točki $x = x_k$, koja je čvor za "globalnu" interpolaciju funkcijom φ, ali **nije** čvor za ovu "lokalnu" linearnu interpolaciju. Označimo taj interpolacijski polinom s $p_{1,k}$. U Newtonovom obliku je

$$p_{1,k}(x) = f_{k-1} + f[x_{k-1}, x_{k+1}]\,(x - x_{k-1})$$

i vrijedi $s_k = p_{1,k}'(x_k)$. Pripadni polinom čvorova ω i njegova derivacija ω' su

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}), \quad \omega'(x) = 2x - (x_{k-1} + x_{k+1}).$$

Zato što deriviramo u točki $x = x_k$ koja **nije** čvor, sigurno vrijedi $\omega(x_k) \neq 0$. U izrazu za lokalnu grešku prve derivacije sigurno se javlja **drugi** član (ovdje je stupanj $n = 1$)

$$\omega(x_k)\,\frac{f'''(\xi_1)}{3!} = (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\,\frac{f'''(\xi_1)}{6}.$$

Pogledajmo što je s **prvim** članom. Za derivaciju polinoma čvorova vrijedi

$$\omega'(x_k) = 2x_k - (x_{k-1} + x_{k+1}) = 2\left(x_k - \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2}\right).$$

Ako (i samo ako) je točka x_k **polovište** između prethodnog i sljedećeg čvora, onda je $\omega'(x_k) = 0$ i tada **nema** prvog člana

$$\omega'(x_k)\,\frac{f''(\xi)}{2!}.$$

U slučaju ekvidistantne "globalne" mreže (za φ), to se događa u svim točkama x_k (osim prve i zadnje) — tada simetrična (ili centralna) razlika zaista ima simetrične čvorove. Međutim, u ovom primjeru, “globalna” mreža **nije** ekvidistantna. U izrazu za lokalnu grešku prve derivacije ostaju **oba** člana, tj. vrijedi

$$
\begin{aligned}
f'(x_k) - p'_{1,k}(x_k) &= \omega'(x_k)\,\frac{f''(\xi)}{2!} + \omega(x_k)\,\frac{f'''(\xi_1)}{3!}, \\
&= (2x_k - (x_{k-1} + x_{k+1}))\,\frac{f''(\xi)}{2} + (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\,\frac{f'''(\xi_1)}{6},
\end{aligned}
$$

za $\xi, \xi_1 \in (x_{k-1}, x_{k+1})$. Za ocjenu ove greške, nađemo maksimume apsolutnih vrijednosti f'' i f''' na intervalu za ξ i ξ_1. Dakle, ocjena lokalne greške za aproksimaciju s_k ima oblik

$$
|f'(x_k) - s_k| \leq |2x_k - (x_{k-1} + x_{k+1})|\,\frac{M_{2,k}}{2} + |(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})|\,\frac{M_{3,k}}{6},
$$

gdje je

$$
M_{2,k} = \max_{x \in [x_{k-1}, x_{k+1}]} |f''(x)|, \quad M_{3,k} = \max_{x \in [x_{k-1}, x_{k+1}]} |f'''(x)|.
$$

Dodatno, za zadanu funkciju f, $M_{2,k}$ i $M_{3,k}$ se uvijek dostižu u lijevom rubu intervala, tj. vrijedi $M_{2,k} = |f''(x_{k-1})|$ i $M_{3,k} = |f'''(x_{k-1})|$.

Treba naći ocjenu lokalne greške i pravu grešku za aproksimacije derivacija s_1 i s_2.

Za aproksimaciju s_1 u točki $x_1 = 3/4$ dobivamo ocjenu

$$
\begin{aligned}
|f'(x_1) - s_1| &\leq |2x_1 - (x_0 + x_2)|\,\frac{|f''(x_0)|}{2} + |(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)|\,\frac{|f'''(x_0)|}{6} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{0.2962962963}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{0.5925925926}{6} \\
&= 0.0740740741 = 7.40740741 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

Izračunata vrijednost za s_1, egzaktna derivacija i prava greška su

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -0.1212121212, \\
f'(3/4) &= -0.0987654321, \\
f'(3/4) - s_1 &= 0.0224466891 = 2.24466891 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

Za aproksimaciju s_2 u točki $x_2 = 5/4$ dobivamo ocjenu

$$
\begin{aligned}
|f'(x_2) - s_2| &\leq |2x_2 - (x_1 + x_3)|\,\frac{|f''(x_1)|}{2} + |(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)|\,\frac{|f'''(x_1)|}{6} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{0.0877914952}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{0.1170553269}{6} \\
&= 0.0182898948 = 1.82898948 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

Izračunata vrijednost za s_2, egzaktna derivacija i prava greška su

$$
\begin{aligned}
s_2 &= -0.0634920635, \\
f'(5/4) &= -0.0661157025, \\
f'(5/4) - s_2 &= -0.0026236390 = -2.6236390 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}
$$

(d1) U oba čvora koristimo Besselovu aproksimaciju derivacija, uz $h_k = x_k - x_{k-1}$,

$$s_1 = \frac{h_2\, f[x_0, x_1] + h_1\, f[x_1, x_2]}{h_1 + h_2} = -0.1077441077,$$

$$s_2 = \frac{h_3\, f[x_1, x_2] + h_2\, f[x_2, x_3]}{h_2 + h_3} = -0.0692640693.$$

Tablica podijeljenih razlika za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_2 je

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, \ldots, t_{j+3}]$
0.75	0.2222222222			
		−0.1077441077		
0.75	0.2222222222		0.0538720539	
		−0.0808080808		−0.0615680616
1.25	0.1818181818		0.0230880231	
		−0.0692640693		
1.25	0.1818181818			

Interpolacijski polinom p_2 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_2(x) = {} & 0.2222222222 \\ & - 0.1077441077\,(x - 0.75) \\ & + 0.0538720539\,(x - 0.75)^2 \\ & - 0.0615680616\,(x - 0.75)^2 (x - 1.25). \end{aligned}$$

U standardnoj bazi je

$$p_2(x) = -0.0615680616\,x^3 + 0.2231842232\,x^2 - 0.3386243386\,x + 0.3766233766.$$

U točki $x = 1$, za funkcijsku vrijednost dobivamo

$$\begin{aligned} p_2(1) &= 0.1996151996, \\ f(1) &= 0.2000000000, \\ f(1) - p_2(1) &= 0.0003848004 = 3.848004 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Za vrijednost derivacije dobivamo (ovo se **ne traži** u zadatku)

$$\begin{aligned} p_2'(1) &= -0.0769600770, \\ f'(1) &= -0.0800000000, \\ f'(1) - p_2'(1) &= -0.0030399230 = -3.0399230 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

(d2) Derivacija u čvoru x_k aproksimira se Besselovom aproksimacijom, koju dobivamo derivacijom "lokalne" kvadratne interpolacije kroz 3 najbliža čvora "globalne" mreže za φ. U unutrašnjem čvoru x_k (nije prvi ili zadnji čvor mreže, tj. vrijedi $1 \leq k \leq n-1$) Besselova aproksimacija derivacije je

$$s_k = \frac{h_{k+1}\, f[x_{k-1}, x_k] + h_k\, f[x_k, x_{k+1}]}{h_k + h_{k+1}},$$

gdje je $h_k = x_k - x_{k-1}$ razmak susjednih čvorova mreže. Aproksimacija s_k je **težinska** srednja vrijednost podijeljene razlike unatrag i unaprijed, s pozitivnim težinama h_{k+1} i h_k.

Ovu aproksimaciju dobivamo tako da povučemo kvadratni interpolacijski polinom za funkciju f s čvorovima x_{k-1}, x_k i x_{k+1} (prethodni, ovaj i sljedeći čvor), a zatim ga deriviramo u srednjem čvoru x_k. Označimo taj interpolacijski polinom s $p_{2,k}$. U Newtonovom obliku je

$$p_{2,k}(x) = f_{k-1} + f[x_{k-1}, x_k]\,(x - x_{k-1}) + f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]\,(x - x_{k-1})(x - x_k)$$

i vrijedi $s_k = p'_{2,k}(x_k)$. Pripadni polinom čvorova ω i njegova derivacija ω' su

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= (x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1}), \\
\omega'(x) &= (x - x_k)(x - x_{k+1}) + (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) + (x - x_{k-1})(x - x_k).
\end{aligned}$$

Zato što deriviramo u **čvoru** $x = x_k$, vrijedi $\omega(x_k) = 0$ i

$$\omega'(x_k) = (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}).$$

U izrazu za lokalnu grešku prve derivacije ostaje samo **prvi** član (ovdje je stupanj $n = 2$)

$$f'(x_k) - p'_{2,k}(x_k) = \omega'(x_k)\,\frac{f'''(\xi)}{3!} = (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\,\frac{f'''(\xi)}{6},$$

za $\xi \in (x_{k-1}, x_{k+1})$. Za ocjenu ove greške, nađemo maksimum apsolutne vrijednosti f''' na intervalu za ξ. Dakle, ocjena lokalne greške za aproksimaciju s_k ima oblik

$$|f'(x_k) - s_k| \le |(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})|\,\frac{M_{3,k}}{6}, \quad M_{3,k} = \max_{x \in [x_{k-1}, x_{k+1}]} |f'''(x)|.$$

Dodatno, za zadanu funkciju f, $M_{3,k}$ se uvijek dostiže u lijevom rubu intervala, tj. vrijedi $M_{3,k} = |f'''(x_{k-1})|$.

Treba naći ocjenu lokalne greške i pravu grešku za aproksimacije derivacija s_1 i s_2.

Za aproksimaciju s_1 u točki $x_1 = 3/4$ dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned}
|f'(x_1) - s_1| &\le |(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)|\,\frac{|f'''(x_0)|}{6} = \frac{3}{8} \cdot \frac{0.5925925926}{6} \\
&= 0.0370370370 = 3.70370370 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}$$

Izračunata vrijednost za s_1, egzaktna derivacija i prava greška su

$$\begin{aligned}
s_1 &= -0.1077441077, \\
f'(3/4) &= -0.0987654321, \\
f'(3/4) - s_1 &= 0.0089786756 = 8.9786756 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Za aproksimaciju s_2 u točki $x_2 = 5/4$ dobivamo ocjenu

$$\begin{aligned}
|f'(x_2) - s_2| &\le |(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)|\,\frac{|f'''(x_1)|}{6} = \frac{3}{8} \cdot \frac{0.1170553269}{6} \\
&= 0.0073159579 = 7.3159579 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Izračunata vrijednost za s_2, egzaktna derivacija i prava greška su

$$\begin{aligned}
s_2 &= -0.0692640693, \\
f'(5/4) &= -0.0661157025, \\
f'(5/4) - s_2 &= 0.0031483668 = 3.1483668 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

4.4 Kubna splajn interpolacija, rubni uvjeti na 1. ili 2. derivaciju

Opći tip zadatka. Nađite parametre s_k kubičnog splajna s koji interpolira funkciju

$$f(x) = \dots \text{ (konkretna funkcija)}$$

na zadanoj (ekvidistantnoj) mreži s n podintervala na intervalu $[a, b]$ (konkretno zadani interval). Rubni uvjeti za splajn su

(a) potpuni splajn ($s' = f'$ u rubovima intervala), ili

(b) $s'' = f''$ u rubovima intervala.

Izračunajte vrijednosti tog splajna, njegove prve i druge derivacije u točki $x = \dots$ (konkretno zadana točka) i pripadne prave pogreške.

—— • ——

Uvod u rješenje. Neka je $x_0, \dots, x_n$ zadana mreža čvorova i neka su $f_k = f(x_k)$, za $k = 0, \dots, n$, zadane funkcijske vrijednosti. Razmak susjednih čvorova mreže označavamo s $h_k := x_k - x_{k-1}$, za $k = 1, \dots, n$.

Kod **po dijelovima kubne** interpolacije, restrikcija interpolacijske funkcije φ na svaki podinterval mreže $[x_{k-1}, x_k]$ je kubni polinom $p_k \in \mathcal{P}_3$, za $k = 1, \dots, n$. Osim interpolacije funkcijskih vrijednosti u čvorovima, funkcija φ i polinomi p_k zadovoljavaju još i sljedeće uvjete interpolacije

$$\varphi'(x_{k-1}) = p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1}, \quad \varphi'(x_k) = p_k'(x_k) = s_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

gdje su s_k neki **parametri** (obično ih interpretiramo kao neke aproksimacije derivacije funkcije f u čvorovima). Interpolacijska funkcija φ je onda klase $C^1[x_0, x_n]$, tj. ima neprekidnu prvu derivaciju u svim čvorovima.

Kod **kubne splajn** interpolacije želimo veću globalnu glatkoću i tražimo da interpolacijska funkcija $s = \varphi$ bude klase $C^2[x_0, x_n]$, tj. tražimo da splajn s ima neprekidnu **drugu** derivaciju u svim **unutarnjim** čvorovima mreže. Iz zahtjeva

$$p_k''(x_k) = p_{k+1}''(x_k), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

dobivamo sustav linearnih jednadžbi za parametre $s_k := s'(x_k)$ interpolacijskog splajna s

$$h_{k+1}s_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})s_k + h_k s_{k+1} = 3(h_{k+1}f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]),$$

za $k = 1, \dots, n-1$.

Ovim jednadžbama treba dodati još **dvije** "rubne" jednadžbe (za $k = 0$ i $k = n$). Te jednadžbe se dobivaju iz tzv. **rubnih uvjeta** na splajn.

(a) Po definiciji, **potpuni** splajn s zadovoljava rubne uvjete iz **prve** derivacije funkcije f, tj. vrijedi $s' = f'$ u rubovima intervala (čvorovima x_0 i x_n). Jednadžbe

$$s'(x_0) = s_0 = f'(x_0), \quad s'(x_n) = s_n = f'(x_n),$$

možemo dodati u linearni sustav (sustav je onda reda $n+1$), ili naprosto eliminiramo poznate vrijednosti s_0 i s_n iz prve i zadnje jednadžbe (prebacimo pripadne članove na desnu stranu), pa preostaje sustav reda $n - 1$.

(b) Rubni uvjet iz **druge** derivacije funkcije f, tj. za splajn s vrijedi $s'' = f''$ u rubovima intervala (čvorovima x_0 i x_n). Kad rubne uvjete

$$s''(x_0) = f''(x_0), \quad s''(x_n) = f''(x_n),$$

izrazimo preko parametara splajna (s_0 i s_1, odnosno, s_{n-1} i s_n), dobivamo jednadžbe

$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h_1}{2} f''(x_0),$$

$$s_{n-1} + 2s_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_n}{2} f''(x_n).$$

Dodavanjem ovih jednadžbi u sustav, dobivamo sustav reda $n + 1$.

Spajanjem svih jednadžbi dobivamo tridijagonalni linearni sustav (reda $n - 1$ ili $n + 1$) za nepoznate parametre splajna (nagibe). Matrica tog sustava je strogo dijagonalno dominantna po recima, pa se sustav može (stabilno) riješiti Gaussovim eliminacijama ili LR faktorizacijom **bez** pivotiranja.

Kad nađemo parametre splajna, restrikcija p_k na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ određuje se **lokalno**, kao "obična" Hermiteova interpolacija funkcije i derivacije u dvostrukim čvorovima x_{k-1} i x_k, iz uvjeta

$$p_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, \quad p'_k(x_{k-1}) = s_{k-1}, \quad p_k(x_k) = f_k, \quad p'_k(x_k) = s_k.$$

Vrijednosti s_{k-1} i s_k uzimamo kao zadane vrijednosti derivacije funkcije f u čvorovima i uvrštavamo ih u tablicu podijeljenih razlika, na mjesto podijeljenih razlika s dvostrukim čvorovima

$$f[x_{k-1}, x_{k-1}] = s_{k-1}, \quad f[x_k, x_k] = s_k.$$

U tablici podijeljenih razlika za nalaženje polinoma p_k, lokalnu mrežu čvorova s multiplicitetima $x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k$ označavamo s t_0, t_1, t_2, t_3 (tj. $t_0 = t_1 = x_{k-1}$ i $t_2 = t_3 = x_k$).

Umjesto eksplicitnog računanja Newtonovog oblika polinoma p_k (iz tablice podijeljenih razlika), možemo postupiti i drugačije. Polinom p_k napišemo u bazi potencija, relativno obzirom na početnu točku x_{k-1} pripadnog intervala,

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) + c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3.$$

Za koeficijente onda vrijede formule (pogledati predavanja)

$$\begin{aligned}
c_{0,k} &= f_{k-1}, \\
c_{1,k} &= s_{k-1}, \\
c_{2,k} &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} - h_k c_{3,k} = \frac{3f[x_{k-1}, x_k] - 2s_{k-1} - s_k}{h_k}, \\
c_{3,k} &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 4.4.1. (NM 2010, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Nađite parametre s_i potpunog kubičnog splajna s koji interpolira funkciju

$$f(x) = (x + 1)\sin x$$

na ekvidistantnoj mreži s $n = 4$ podintervala na intervalu $[0, \pi/2]$. Izračunajte vrijednosti tog splajna, njegove prve i druge derivacije u točki $x = \pi/6$ i pripadne prave pogreške.

Rješenje. Ekvidistantna mreža s $n = 4$ podintervala na intervalu $[0, \pi/2]$ ima korak $h = \pi/8$. Čvorovi interpolacije su $x_k = kh$, a parametri splajna s su $s_k = s'(x_k)$, za $k = 0, \dots, 4$.

Iz zahtjeva neprekidnosti druge derivacije splajna s u **unutarnjim** čvorovima mreže dobivamo jednadžbe

$$h_{k+1}s_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})s_k + h_k s_{k+1} = 3(h_{k+1}f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]),$$

za $k = 1, 2, 3$. Svi koraci su jednaki h. Za račun "na ruke" možemo ih skratiti, pa izlazi

$$s_{k-1} + 4s_k + s_{k+1} = 3(f[x_{k-1}, x_k] + f[x_k, x_{k+1}]), \quad k = 1, 2, 3.$$

Po definiciji, za potpuni splajn vrijedi $s' = f'$ u rubovima intervala, tj. dvije **dodatne** jednadžbe za rubne uvjete su

$$s'(x_0) = s_0 = f'(x_0), \qquad s'(x_4) = s_4 = f'(x_4).$$

Eliminiramo s_0 iz jednadžbe za $k = 1$ i s_4 iz jednadžbe za $k = 3$, tako da prebacimo pripadne članove na desnu stranu. Sustav jednadžbi za nepoznate parametre s_1, s_2 i s_3 je

$$\begin{aligned} 4s_1 + s_2 &= 3(f[x_0, x_1] + f[x_1, x_2]) - s_0, \\ s_1 + 4s_2 + s_3 &= 3(f[x_1, x_2] + f[x_2, x_3]), \\ s_2 + 4s_3 &= 3(f[x_2, x_3] + f[x_3, x_4]) - s_4. \end{aligned}$$

Funkcija f i prve dvije derivacije su

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 1)\sin x, \\ f'(x) &= \sin x + (x + 1)\cos x, \\ f''(x) &= 2\cos x - (x + 1)\sin x. \end{aligned}$$

Rubni uvjeti su

$$s_0 = f'(0) = 1, \qquad s_4 = f'(\pi/2) = 1.$$

Tablica zadanih podataka i prvih podijeljenih razlika za desnu stranu sustava je

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$
0	0.0000000000	
		1.3571787908
$\pi/8$	0.5329628648	
		1.8576674039
$\pi/4$	1.2624671485	
		1.9094323136
$3\pi/8$	2.0122994646	
		1.4222005812
$\pi/2$	2.5707963268	

Linearni sustav (reda 3) za parametre s_1, s_2, s_3 ima oblik

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & \\ 1 & 4 & 1 \\ & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6445385841 \\ 11.3012991525 \\ 8.9948986843 \end{bmatrix}.$$

Nakon Gaussovih eliminacija (bez pivotiranja) dobivamo gornjetrokutasti sustav

$$\begin{bmatrix} 4.0000000000 & 1 & \\ & 3.7500000000 & 1 \\ & & 3.7333333333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.6445385841 \\ 9.1401645065 \\ 6.5575214826 \end{bmatrix}.$$

Supstitucijom unatrag izlazi

$$\begin{aligned} s_1 &= 1.6688889435, \\ s_2 &= 1.9689828101, \\ s_3 &= 1.7564789686. \end{aligned}$$

Ovim parametrima još treba dodati rubne uvjete $s_0 = 1$ i $s_4 = 1$.

Zadana točka $x = \pi/6$ nalazi se u podintervalu $[x_1, x_2] = [\pi/8, \pi/4]$. Restrikcija splajna s na taj podinterval je kubni polinom p_2. Tablica podijeljenih razlika za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_2 je

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, \ldots, t_{j+3}]$
$\pi/8$	0.5329628648			
		1.6688889435		
$\pi/8$	0.5329628648		0.4807204020	
		1.8576674039		−0.5023134940
$\pi/4$	1.2624671485		0.2834623542	
		1.9689828101		
$\pi/4$	1.2624671485			

Interpolacijski polinom p_2 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_2(x) = 0.5329628648 &+ 1.6688889435\,(x - \pi/8) \\ &+ 0.4807204020\,(x - \pi/8)^2 \\ &- 0.5023134940\,(x - \pi/8)^2(x - \pi/4). \end{aligned}$$

U bazi potencija oko početne točke $x_1 = \pi/8$, polinom p_2 ima oblik

$$\begin{aligned} p_2(x) = 0.5329628648 &+ 1.6688889435\,(x - \pi/8) \\ &+ 0.6779784499\,(x - \pi/8)^2 \\ &- 0.5023134940\,(x - \pi/8)^3. \end{aligned}$$

U točki $x = \pi/6$, dobivamo sljedeću tablicu aproksimacija funkcije, prve i druge derivacije, s pripadnim pogreškama

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$s^{(j)}(x)$	0.7619102398	1.8205622685	0.9614408041
$f^{(j)}(x)$	0.7617993878	1.8194752448	0.9702514198
greška	−0.0001108520	−0.0010870237	0.0088106157

Zadatak 4.4.2. (NM 2010, 1. kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Nađite parametre s_i kubičnog splajna s koji interpolira funkciju

$$f(x) = xe^{x-1}$$

na ekvidistantnoj mreži s $n = 2$ podintervala na intervalu $[0, 1]$. Rubni uvjeti za splajn su $s'' = f''$ u rubovima intervala. Izračunajte vrijednosti tog splajna, njegove prve i druge derivacije u točki $x = 2/3$ i pripadne prave pogreške.

Rješenje. Ekvidistantna mreža s $n = 2$ podintervala na intervalu $[0, 1]$ ima korak $h = 1/2$. Čvorovi interpolacije su $x_k = kh$, a parametri splajna s su $s_k = s'(x_k)$, za $k = 0, \ldots, 2$.

Iz zahtjeva neprekidnosti druge derivacije splajna s u **unutarnjim** čvorovima mreže dobivamo jednadžbu

$$h_{k+1}s_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})s_k + h_k s_{k+1} = 3(h_{k+1}f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]),$$

za $k = 1$. Svi koraci su jednaki h. Za račun "na ruke" možemo ih skratiti, pa izlazi

$$s_{k-1} + 4s_k + s_{k+1} = 3(f[x_{k-1}, x_k] + f[x_k, x_{k+1}]), \quad k = 1.$$

Rubni uvjeti za splajn su $s'' = f''$ u rubovima intervala,

$$s''(x_0) = f''(x_0), \qquad s''(x_2) = f''(x_2).$$

Iz ovih rubnih uvjeta dobivamo dvije **dodatne** jednadžbe za parametre

$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h}{2}f''(x_0), \qquad s_1 + 2s_2 = 3f[x_1, x_2] + \frac{h}{2}f''(x_2).$$

Sustav jednadžbi za nepoznate parametre s_0, s_1 i s_2 je

$$\begin{aligned} 2s_0 + s_1 &= 3f[x_0, x_1] - \frac{h}{2}f''(x_0), \\ s_0 + 4s_1 + s_2 &= 3(f[x_0, x_1] + f[x_1, x_2]), \\ s_1 + 2s_2 &= 3f[x_1, x_2] + \frac{h}{2}f''(x_2). \end{aligned}$$

Funkcija f i prve dvije derivacije su

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{x-1}, \\ f'(x) &= (x + 1)e^{x-1}, \\ f''(x) &= (x + 2)e^{x-1}. \end{aligned}$$

Rubni uvjeti su

$$f''(x_0) = f''(0) = 2e^{-1} = 0.7357588823, \qquad f''(x_2) = f''(1) = 3.$$

Tablica zadanih podataka i prvih podijeljenih razlika za desnu stranu sustava je

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$
0	0.0000000000	
		0.6065306597
1/2	0.3032653299	
		1.3934693403
1	1.0000000000	

Linearni sustav (reda 3) za parametre s_0, s_1, s_2 ima oblik

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 4 & 1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6356522586 \\ 6.0000000000 \\ 4.9304080209 \end{bmatrix}.$$

Nakon Gaussovih eliminacija (bez pivotiranja) dobivamo gornjetrokutasti sustav

$$\begin{bmatrix} 2.0000000000 & 1 & \\ & 3.5000000000 & 1 \\ & & 1.7142857143 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6356522586 \\ 5.1821738707 \\ 3.4497869149 \end{bmatrix}.$$

Supstitucijom unatrag izlazi

$$\begin{aligned} s_0 &= 0.3649978192, \\ s_1 &= 0.9056566201, \\ s_2 &= 2.0123757004. \end{aligned}$$

Zadana točka $x = 2/3$ nalazi se u podintervalu $[x_1, x_2] = [1/2, 1]$. Restrikcija splajna s na taj podinterval je kubni polinom p_2. Tablica podijeljenih razlika za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_2 je

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, \ldots, t_{j+3}]$
1/2	0.3032653299			
		0.9056566201		
1/2	0.3032653299		0.9756254404	
		1.3934693403		0.5243745596
1	1.0000000000		1.2378127202	
		2.0123757004		
1	1.0000000000			

Interpolacijski polinom p_2 u Newtonovom obliku onda glasi

$$\begin{aligned} p_2(x) = 0.3032653299 &+ 0.9056566201\,(x - 1/2) \\ &+ 0.9756254404\,(x - 1/2)^2 \\ &+ 0.5243745596\,(x - 1/2)^2(x - 1). \end{aligned}$$

U bazi potencija oko početne točke $x_1 = 1/2$, polinom p_2 ima oblik

$$\begin{aligned} p_2(x) = 0.3032653299 &+ 0.9056566201\,(x - 1/2) \\ &+ 0.7134381606\,(x - 1/2)^2 \\ &+ 0.5243745596\,(x - 1/2)^3. \end{aligned}$$

U točki $x = 2/3$, dobivamo sljedeću tablicu aproksimacija funkcije, prve i druge derivacije, s pripadnim pogreškama

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$
$s^{(j)}(x)$	0.4764534866	1.1871672203	1.9512508808
$f^{(j)}(x)$	0.4776875404	1.1942188510	1.9107501615
greška	0.0012340538	0.0070516307	−0.0405007192

4.5 Kubna splajn interpolacija, “not-a-knot”

Zadatak 4.5.1. (NM 2011, popravni kolokvij, 3. zadatak, grupa B)

Nađite kubični splajn s koji interpolira sljedeći skup podataka (točaka):

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} x_i & -3 & -2 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \quad .$$

Za nalaženje splajna iskoristite “not-a-knot” (nije čvor) rubni uvjet. Izračunajte vrijednost interpolacijskog splajna u točki $x = 0$.

Rješenje. Neka je $x_0, \ldots, x_n$ mreža čvorova za kubični splajn s, i neka je p_k kubični polinom koji je restrikcija splajna s na podinterval $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$. Rubni uvjet “not-a-knot” (nije čvor) kaže da su prva dva i posljednja dva polinoma jednaka, tj. da vrijedi $p_1 = p_2$ i $p_{n-1} = p_n$ (lijepljenje i treće derivacije splajna s u čvorovima x_1 i x_{n-1}).

U zadatku imamo samo $n = 3$ podintervala, pa slijedi da mora biti

$$p_1 = p_2 = p_3,$$

tj. splajn s je **isti** polinom na svim podintervalima mreže. Dakle, s je obični interpolacijski polinom za zadane 4 točke. Možemo ga izračunati, na primjer, u Newtonovom obliku.

Tablica podijeljenih razlika za zadane podatke $y_k = f(x_k)$ je:

$$\begin{array}{r|cccc} x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] \\ \hline -3 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ -2 & 2 & & -\frac{1}{5} & \\ & & 0 & & 0 \\ 2 & 2 & & -\frac{1}{5} & \\ & & -1 & & \\ 3 & 1 & & & \end{array}$$

Interpolacijski polinom $s = p_1 = p_2 = p_3$ u Newtonovom obliku glasi

$$s(x) = 1 + (x+3) - \frac{1}{5}(x+3)(x+2) + 0 \cdot (x+3)(x+2)(x-2).$$

U standardnoj bazi je

$$s(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{14}{5}.$$

U točki $x = 0$ dobivamo

$$s(0) = \frac{14}{5} = 2.8000000000.$$

Rješenje preko linearnog sustava za splajn.

Koristimo standardne oznake $h_k := x_k - x_{k-1}$ za razmak susjednih čvorova mreže, za $k = 1, \ldots, n$, i $s_k := s'(x_k)$ za derivacije ili nagibe splajna u čvorovima, za $k = 0, \ldots, n$. Iz zahtjeva neprekidnosti druge derivacije splajna s u **unutarnjim** čvorovima mreže dobivamo jednadžbe

$$h_{k+1}s_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})s_k + h_k s_{k+1} = 3(h_{k+1}f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]),$$

za $k = 1, \ldots, n-1$.

Ovim jednadžbama dodajemo jednadžbe za rubni uvjet "not-a-knot" (nije čvor) u čvorovima x_1 i x_{n-1}, koje se svode na neprekidnost treće derivacije splajna u tim čvorovima. Te jednadžbe su, redom, za $k = 0$ i $k = n$,

$$h_2 s_0 + (h_1 + h_2) s_1 = \frac{(h_1 + 2(h_1 + h_2)) h_2 \, f[x_0, x_1] + h_1^2 \, f[x_1, x_2]}{h_1 + h_2},$$

$$(h_{n-1} + h_n) s_{n-1} + h_{n-1} s_n = \frac{(h_n + 2(h_{n-1} + h_n)) h_{n-1} \, f[x_{n-1}, x_n] + h_n^2 \, f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{h_{n-1} + h_n}.$$

Spajanjem svih jednadžbi dobivamo tridijagonalni linearni sustav reda $n + 1$ za nepoznate nagibe $s_0, \ldots, s_n$. Matrica tog sustava može se (jednostavno) transformirati u strogo dijagonalno dominantnu po recima, pa se sustav može (stabilno) riješiti Gaussovim eliminacijama ili LR faktorizacijom **bez** pivotiranja.

Tablica zadanih podataka, koraka h_k i podijeljenih razlika je:

x_k	$f[x_k]$	h_k	$f[x_k, x_{k+1}]$
-3	1		
		1	1
-2	2		
		4	0
2	2		
		1	-1
3	1		

Linearni sustav (reda 4) za nagibe s_0, s_1, s_2, s_3 ima oblik

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & & \\ 4 & 10 & 1 & \\ & 1 & 10 & 4 \\ & & 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{5} \\ 12 \\ -12 \\ -\frac{44}{5} \end{bmatrix}.$$

Nakon Gaussovih eliminacija dobivamo gornjetrokutasti linearni sustav

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & & \\ & 5 & 1 & \\ & & \frac{49}{5} & 4 \\ & & & \frac{96}{49} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{44}{5} \\ \frac{16}{5} \\ -\frac{316}{25} \\ -\frac{576}{245} \end{bmatrix}.$$

Supstitucijom unatrag izlazi rješenje

$$s_0 = \frac{6}{5}, \quad s_1 = \frac{4}{5}, \quad s_2 = -\frac{4}{5}, \quad s_3 = -\frac{6}{5},$$

tj. $s_k = -\frac{2}{5} x_k$.

Zadana točka $x = 0$ nalazi se u intervalu $[x_1, x_2]$. Restrikcija splajna s na taj interval je kubni polinom p_2, kojeg računamo iz tablice podijeljenih razlika. Lokalnu mrežu čvorova s multiplicitetima x_1, x_1, x_2, x_2 označavamo s t_0, t_1, t_2, t_3 (tj. $t_0 = t_1 = x_1$ i $t_2 = t_3 = x_2$).

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, t_{j+3}]$
-2	2			
		$\frac{4}{5}$		
-2	2		$-\frac{1}{5}$	
		0		0
2	2		$-\frac{1}{5}$	
		$-\frac{4}{5}$		
2	2			

Polinom p_2 u Newtonovom obliku glasi

$$p_2(x) = 2 + \frac{4}{5}\,(x+2) - \frac{1}{5}\,(x+2)^2 + 0\cdot(x+2)^2(x-2).$$

U standardnoj bazi je

$$p_2(x) = -\frac{1}{5}\,x^2 + \frac{14}{5}.$$

U točki $x = 0$ dobivamo

$$p_2(0) = \frac{14}{5} = 2.8000000000.$$

——— • ———

Zadatak 4.5.2. (NM 2011, popravni kolokvij, 3. zadatak, grupa A)

Nađite kubični splajn s koji interpolira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	-3	-1	1	3
y_i	2	1	1	2

.

Za nalaženje splajna iskoristite "not-a-knot" (nije čvor) rubni uvjet. Izračunajte vrijednost interpolacijskog splajna u točki $x = 0$.

Rješenje. Neka je $x_0, \ldots, x_n$ mreža čvorova za kubični splajn s, i neka je p_k kubični polinom koji je restrikcija splajna s na podinterval $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$. Rubni uvjet "not-a-knot" (nije čvor) kaže da su prva dva i posljednja dva polinoma jednaka, tj. da vrijedi $p_1 = p_2$ i $p_{n-1} = p_n$ (lijepljenje i treće derivacije splajna s u čvorovima x_1 i x_{n-1}).

U zadatku imamo samo $n = 3$ podintervala, pa slijedi da mora biti

$$p_1 = p_2 = p_3,$$

tj. splajn s je **isti** polinom na svim podintervalima mreže. Dakle, s je obični interpolacijski polinom za zadane 4 točke. Možemo ga izračunati, na primjer, u Newtonovom obliku.

Tablica podijeljenih razlika za zadane podatke $y_k = f(x_k)$ je:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
-3	2			
		$-\frac{1}{2}$		
-1	1		$\frac{1}{8}$	
		0		0
1	1		$\frac{1}{8}$	
		$\frac{1}{2}$		
3	2			

Interpolacijski polinom $s = p_1 = p_2 = p_3$ u Newtonovom obliku glasi

$$s(x) = 2 - \frac{1}{2}\,(x+3) + \frac{1}{8}\,(x+3)(x+1) + 0\cdot(x+3)(x+1)(x-1).$$

U standardnoj bazi je

$$s(x) = \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{7}{8}.$$

U točki $x = 0$ dobivamo

$$s(0) = \frac{7}{8} = 0.8750000000.$$

5 Diskretna metoda najmanjih kvadrata

5.1 Konstrukcija jednostavnog modela i rješenje

Zadatak 5.1.1. (NM 2015, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Bačve za odlaganje otrovnih tvari imaju oblik valjka, kojemu je visina 3 puta veća od polumjera baze. Poduzeće formira cijenu bačve prema njezinom volumenu. Za bačve odgovarajućih polumjera baze, cijene su sljedeće

polumjer u dm	1.5	2.0	2.5	3.5
cijena u kn	20	47	93	251

.

Napišite oblik funkcije $\varphi(x)$ za cijenu bačve, pri čemu je x polumjer njezine baze. Metodom najmanjih kvadrata odredite parametre te funkcije za zadane podatke. Dobivenom funkcijom φ odredite cijenu bačve polumjera 3.0 dm.

Rješenje. Volumen bačve je

$$V(x) = \pi \cdot x^2 \cdot (3x) = 3\pi x^3.$$

Cijena bačve proporcionalna je njezinom volumenu, pa je "modelna" funkcija

$$\varphi(x) = c \cdot 3\pi x^3,$$

pri čemu je c neki parametar. Da bismo si olakšali posao, možemo pisati i

$$\varphi(x) = ax^3,$$

pri čemu je $a = 3\pi c$. Odredimo a metodom najmanjih kvadrata,

$$S = \sum_{k=0}^{3} \left(f_k - ax_k^3\right)^2 \to \min,$$

pri čemu su x_k polumjeri bačvi, a f_k njihove cijene. Deriviramo po parametru a i tražimo točku lokalnog ekstrema

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{k=0}^{3} \left(f_k - ax_k^3\right)x_k^3 = 0.$$

Odavde izlazi jednadžba

$$a \sum_{k=0}^{3} x_k^6 = \sum_{k=0}^{3} f_k x_k^3.$$

Imamo

$$\sum_{k=0}^{3} x_k^6 = 1.5^6 + 2.0^6 + 2.5^6 + 3.5^6 = 2157.796875,$$

$$\sum_{k=0}^{3} f_k x_k^3 = 20 \cdot 1.5^3 + 47 \cdot 2.0^3 + 93 \cdot 2.5^3 + 251 \cdot 3.5^3 = 12658.25,$$

pa je

$$a = \frac{12658.25}{2157.796875} \approx 5.8662843323.$$

Iz supstitucije $a = 3\pi c$, za paramater c dobivamo

$$c = \frac{a}{3\pi} = \frac{5.8662843323}{9.4247779608} \approx 0.6224320994.$$

Na kraju, cijena bačve polumjera 3.0 dm jednaka je

$$\varphi(3.0) = a \cdot 3^3 = 158.3896769709 \approx 158.39 \text{ kn}.$$

Zadatak 5.1.2. (NM 2015, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Ukrasne ploče za oblaganje podova imaju oblik kvadrata. Proizvođač formira cijenu ukrasne ploče prema njezinoj površini pomnoženoj s koeficijentom težine izrade. Za ploče s odgovarajućom stranicom i koeficijentom težine izrade, cijene su sljedeće

stranica u cm	8	10	12	15
koeficijent težine izrade	1	1.2	1.2	1
cijena u kn	7	13	19	25

.

Napišite oblik funkcije $\varphi(x, t)$ za cijenu ploče, pri čemu je x duljina njezine stranice, a t koeficijent težine izrade. Metodom najmanjih kvadrata odredite parametre te funkcije za zadane podatke. Dobivenom funkcijom φ odredite cijenu ploče sa stranicom 20 cm i koeficijentom težine izrade 1.1.

Rješenje. Površina ukrasne ploče je

$$P(x) = x^2.$$

Cijena ploče proporcionalna je njezinoj površini pomnoženoj s koeficijentom težine izrade, pa je "modelna" funkcija

$$\varphi(x, t) = atx^2,$$

pri čemu je a neki parametar. Odredimo a metodom najmanjih kvadrata,

$$S = \sum_{k=0}^{3} \left(f_k - at_k x_k^2\right)^2 \to \min,$$

pri čemu su x_k duljine stranica kvadrata, t_k težine izrade pločice, a f_k njihove cijene. Deriviramo po parametru a i tražimo točku lokalnog ekstrema

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{k=0}^{3} \left(f_k - at_k x_k^2\right) t_k x_k^2 = 0.$$

Odavde izlazi jednadžba

$$a \sum_{k=0}^{3} t_k^2 x_k^4 = \sum_{k=0}^{3} f_k t_k x_k^2.$$

Imamo

$$\sum_{k=0}^{3} t_k^2 x_k^4 = 1^2 \cdot 8^4 + 1.2^2 \cdot 10^4 + 1.2^2 \cdot 12^4 + 1^2 \cdot 15^4 = 98980.84,$$

$$\sum_{k=0}^{3} f_k t_k x_k^2 = 7 \cdot 1 \cdot 8^2 + 13 \cdot 1.2 \cdot 10^2 + 19 \cdot 1.2 \cdot 12^2 + 25 \cdot 1 \cdot 15^2 = 10916.2,$$

pa je

$$a = \frac{10916.2}{98980.84} \approx 0.1102859907.$$

Na kraju, cijena ploče duljine stranice 20 cm s koeficijentom težine izrade 1.1, jednaka je

$$\varphi(20, 1.1) = a \cdot 1.1 \cdot 20^2 = 48.5258359093 \approx 48.53 \text{ kn}.$$

5.2 Zadani linearni model i tablica, normalne jednadžbe

Zadatak 5.2.1. (NM 2010, 1. kolokvij, 5. zadatak, grupa A)

Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = \frac{a}{x} + b$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2.0	1.4	1.2	1.1	1.0

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S.

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

Rješenje. Diskretna metoda najmanjih kvadrata za zadane podatke

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{5} \Big(y_i - \frac{a}{x_i} - b\Big)^2 \to \min$$

daje sustav normalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} s_0 a + s_1 b &= t_0 \\ s_1 a + s_2 b &= t_1 \end{aligned}$$

s koeficijentima

$$s_0 = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i^2}, \quad s_1 = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i}, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{5} 1^2, \quad t_0 = \sum_{i=1}^{5} y_i \frac{1}{x_i}, \quad t_1 = \sum_{i=1}^{5} y_i.$$

Tablica podataka za linearni sustav:

i	$\frac{1}{x_i^2}$	$\frac{1}{x_i}$	1^2	$y_i \frac{1}{x_i}$	y_i
1	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	2.0000000000	2.0000000000
2	0.2500000000	0.5000000000	1.0000000000	0.7000000000	1.4000000000
3	0.1111111111	0.3333333333	1.0000000000	0.4000000000	1.2000000000
4	0.0625000000	0.2500000000	1.0000000000	0.2750000000	1.1000000000
5	0.0400000000	0.2000000000	1.0000000000	0.2000000000	1.0000000000
$\sum$	1.4636111111	2.2833333333	5.0000000000	3.5750000000	6.7000000000
	s_0	s_1	s_2	t_0	t_1

Linearni sustav za koeficijente je

$$\begin{aligned} 1.4636111111\,a + 2.2833333333\,b &= 3.5750000000 \\ 2.2833333333\,a + 5.0000000000\,b &= 6.7000000000. \end{aligned}$$

Rješenje sustava su koeficijenti aproksimacijske funkcije

$$a = 1.2243928194, \quad b = 0.7808606125.$$

Aproksimacijska funkcija je

$$y(x) = 1.2243928194 \frac{1}{x} + 0.7808606125.$$

Tablica aproksimacija i grešaka u čvorovima:

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$y_i - y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
1	1.0000000000	2.0000000000	2.0052534319	−0.0052534319	0.0000275985
2	2.0000000000	1.4000000000	1.3930570222	0.0069429778	0.0000482049
3	3.0000000000	1.2000000000	1.1889915523	0.0110084477	0.0001211859
4	4.0000000000	1.1000000000	1.0869588173	0.0130411827	0.0001700724
5	5.0000000000	1.0000000000	1.0257391763	−0.0257391763	0.0006625052

Dobivena suma kvadrata apsolutnih grešaka S za zadane podatke je

$$S = 0.0010295671 = 1.0295671 \cdot 10^{-3}.$$

Zadatak 5.2.2. (NM 2008, 2. kolokvij, 2. zadatak, grupa D)

Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = ax + be^{-x}$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y_i	1.2	1.7	2.3	3.0	3.8

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S.

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

Rješenje. Diskretna metoda najmanjih kvadrata za zadane podatke

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{5} \left(y_i - ax_i - be^{-x_i}\right)^2 \to \min$$

daje sustav normalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} s_0 a + s_1 b &= t_0 \\ s_1 a + s_2 b &= t_1 \end{aligned}$$

s koeficijentima

$$s_0 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2, \quad s_1 = \sum_{i=1}^{5} x_i e^{-x_i}, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{5} (e^{-x_i})^2, \quad t_0 = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i, \quad t_1 = \sum_{i=1}^{5} y_i e^{-x_i}.$$

Tablica podataka za linearni sustav:

i	x_i^2	$x_i e^{-x_i}$	$(e^{-x_i})^2$	$y_i x_i$	$y_i e^{-x_i}$
1	1.0000000000	0.3678794412	0.1353352832	1.2000000000	0.4414553294
2	4.0000000000	0.2706705665	0.0183156389	3.4000000000	0.2300699815
3	9.0000000000	0.1493612051	0.0024787522	6.9000000000	0.1145102572
4	16.0000000000	0.0732625556	0.0003354626	12.0000000000	0.0549469167
5	25.0000000000	0.0336897350	0.0000453999	19.0000000000	0.0256041986
$\sum$	55.0000000000	0.8948635033	0.1565105369	42.5000000000	0.8665866834
	s_0	s_1	s_2	t_0	t_1

Linearni sustav za koeficijente je

$$\begin{aligned} 55.0000000000\, a + 0.8948635033\, b &= 42.5000000000 \\ 0.8948635033\, a + 0.1565105369\, b &= 0.8665866834. \end{aligned}$$

Rješenje sustava su koeficijenti aproksimacijske funkcije

$$a = 0.7526573714, \quad b = 1.2335340171.$$

Aproksimacijska funkcija je

$$y(x) = 0.7526573714\, x + 1.2335340171\, e^{-x}.$$

Tablica aproksimacija i grešaka u čvorovima:

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	$y_i - y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
1	1.0000000000	1.2000000000	1.2064491763	−0.0064491763	0.0000415919
2	2.0000000000	1.7000000000	1.6722554184	0.0277445816	0.0007697618
3	3.0000000000	2.3000000000	2.3193861567	−0.0193861567	0.0003758231
4	4.0000000000	3.0000000000	3.0332224493	−0.0332224493	0.0011037311
5	5.0000000000	3.8000000000	3.7715983439	0.0284016561	0.0008066541

Dobivena suma kvadrata apsolutnih grešaka S za zadane podatke je

$$S = 0.0030975620 = 3.0975620 \cdot 10^{-3}.$$

5.3 Linearni model s uvjetom

Zadatak 5.3.1. (NM 2008, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parametre a_2 i a_3 funkcije oblika

$$\varphi(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + x,$$

koja zadovoljava uvjet $\varphi'(-1) = 1$ i aproksimira zadani skup podataka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$.

Rješenje. Prvo treba iskoristiti zadani uvjet u obliku funkcije φ. Iz

$$\varphi'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + 1,$$

i uvjeta $\varphi'(-1) = 1$, dobivamo

$$3a_3 - 2a_2 + 1 = 1,$$

odakle slijedi veza između parametara a_2 i a_3

$$a_2 = \frac{3}{2}\,a_3.$$

Kad to uvrstimo u oblik funkcije φ, dobivamo

$$\varphi(x) = a_3x^3 + \frac{3}{2}\,a_3x^2 + x = a_3\left(x^3 + \frac{3}{2}\,x^2\right) + x.$$

Funkcija φ sad ovisi o jednom parametru a_3, kojeg određujemo po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, tako da φ aproksimira zadani skup podataka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$.

$$S(a_3) = \sum_{k=0}^{n}\Big(f_k - \varphi(x_k)\Big)^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(f_k - a_3\left(x_k^3 + \frac{3}{2}\,x_k^2\right) - x_k\right)^2 \to \min.$$

Nužni (i dovoljni) uvjet minimuma je

$$\frac{dS}{da_3} = 0,$$

odakle slijedi

$$0 = -2\sum_{k=0}^{n}\left(f_k - a_3\left(x_k^3 + \frac{3}{2}\,x_k^2\right) - x_k\right)\left(x_k^3 + \frac{3}{2}\,x_k^2\right).$$

Dijeljenjem s -2 i sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$a_3\sum_{k=0}^{n}\left(x_k^3 + \frac{3}{2}\,x_k^2\right)^2 = \sum_{k=0}^{n}(f_k - x_k)\left(x_k^3 + \frac{3}{2}\,x_k^2\right).$$

Rješenje za a_3 je jedinstveno, ako je koeficijent uz a_3 različit od nule (za zadane podatke). Onda je

$$a_3 = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(f_k - x_k)\left(x_k^3 + \frac{3}{2}\,x_k^2\right)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x_k^3 + \frac{3}{2}\,x_k^2\right)^2}, \qquad a_2 = \frac{3}{2}\,a_3.$$

Zadatak 5.3.2. (NM 2008, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa C)

Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parametre a_0 i a_2 funkcije oblika

$$\varphi(x) = a_2x^2 + x + a_0,$$

koja zadovoljava uvjet $\varphi(2) = 3$ i aproksimira zadani skup podataka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$.

Rješenje. Prvo treba iskoristiti zadani uvjet u obliku funkcije φ. Iz

$$\varphi(x) = a_2x^2 + x + a_0,$$

i uvjeta $\varphi(2) = 3$, dobivamo

$$4a_2 + 2 + a_0 = 3,$$

odakle slijedi veza između parametara a_0 i a_2

$$a_0 = 1 - 4a_2.$$

Kad to uvrstimo u oblik funkcije φ, dobivamo

$$\varphi(x) = a_2x^2 + x + (1 - 4a_2) = a_2(x^2 - 4) + x + 1.$$

Funkcija φ sad ovisi o jednom parametru a_2, kojeg određujemo po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, tako da φ aproksimira zadani skup podataka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$.

$$S(a_2) = \sum_{k=0}^{n} \Big(f_k - \varphi(x_k)\Big)^2 = \sum_{k=0}^{n} \Big(f_k - a_2(x_k^2 - 4) - x_k - 1\Big)^2 \to \min.$$

Nužni (i dovoljni) uvjet minimuma je

$$\frac{dS}{da_2} = 0,$$

odakle slijedi

$$0 = -2\sum_{k=0}^{n} \Big(f_k - a_2(x_k^2 - 4) - x_k - 1\Big)(x_k^2 - 4).$$

Dijeljenjem s -2 i sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$a_2 \sum_{k=0}^{n} (x_k^2 - 4)^2 = \sum_{k=0}^{n} (f_k - x_k - 1)(x_k^2 - 4).$$

Rješenje za a_2 je jedinstveno, ako je koeficijent uz a_2 različit od nule (za zadane podatke). Onda je

$$a_2 = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (f_k - x_k - 1)(x_k^2 - 4)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x_k^2 - 4)^2}, \qquad a_0 = 1 - 4a_2.$$

5.4 Diskretni skalarni produkt i ortogonalni polinomi

Zadatak 5.4.1. (NM 2011, 2. kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Na vektorskom prostoru svih realnih funkcija definiranih na skupu $\{0, 1/3, 1\}$ zadan je "diskretni" skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2}\, f(0)\cdot g(0) + f\Big(\frac{1}{3}\Big)\cdot g\Big(\frac{1}{3}\Big) + f(1)\cdot g(1).$$

Nađite ortogonalne polinome stupnja 0, 1 i 2, s vodećim koeficijentom jednakim 1, obzirom na ovaj skalarni produkt. **Bez računanja** objasnite kako bi izgledao ortogonalni polinom stupnja 3 i kolika je njegova norma u ovom skalarnom produktu.

Rješenje. Uz oznake $n = 3$ i

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 1, \qquad w_1 = \frac{1}{2}, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 1,$$

zadani skalarni produkt je "težinski" diskretni skalarni produkt (u prostoru $\mathbb{R}^n$)

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)\, g(x_i)$$

vektora funkcijskih vrijednosti funkcija f i g u čvorovima x_i, za $i = 1, \ldots, n$.

Ortogonalne polinome niskog stupnja obzirom na ovaj skalarni produkt najlakše je izračunati običnim Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije na bazi potencija x^k, za $k = 0, \ldots, n-1$. Neka je p_k traženi ortogonalni polinom stupnja k, s vodećim koeficijentom jednakim 1, za $k = 0, 1, 2$. Ove polinome možemo zapisati u bazi potencija

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x + a_{10}, \quad p_2(x) = x^2 + a_{21}x + a_{20}.$$

Nepoznate koeficijente tražimo iz uvjeta ortogonalnosti polinoma p_k na sve potencije strogo nižeg stupnja. Za zapis koeficijenata u jednadžbama zgodno je još uvesti oznaku

$$s_k := \langle x^k, 1\rangle = \langle x^{k-j}, x^j\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^k, \quad k \geq 0.$$

Brojevi s_k su diskretni momenti potencija x^k za zadani "diskretni" integracijski funkcional (suma, umjesto integrala). Uočimo da je $s_k = \langle x^{k-j}, x^j\rangle$, za $j = 0, \ldots, k$.

Iz uvjeta ortogonalnosti polinoma p_1 na konstantu 1

$$0 = \langle p_1, 1\rangle = \langle x + a_{10}, 1\rangle = \langle x, 1\rangle + a_{10}\langle 1, 1\rangle,$$

dobivamo jednadžbu $s_0 a_{10} = -s_1$, pa je

$$a_{10} = -\frac{s_1}{s_0}.$$

Analogno, iz uvjeta ortogonalnosti polinoma p_2 na 1 i x

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p_2, 1\rangle = \langle x^2 + a_{21}x + a_{20}, 1\rangle = \langle x^2, 1\rangle + a_{21}\langle x, 1\rangle + a_{20}\langle 1, 1\rangle, \\ 0 &= \langle p_2, x\rangle = \langle x^2 + a_{21}x + a_{20}, x\rangle = \langle x^2, x\rangle + a_{21}\langle x, x\rangle + a_{20}\langle 1, x\rangle, \end{aligned}$$

dobivamo sustav jednadžbi za koeficijente a_{20} i a_{21}

$$\begin{aligned} s_0 a_{20} + s_1 a_{21} &= -s_2 \\ s_1 a_{20} + s_2 a_{21} &= -s_3. \end{aligned}$$

Izračunajmo potrebne koeficijente s_0, s_1, s_2 i s_3. Izlazi

$$\begin{aligned} s_0 &= \sum_{i=1}^{n} w_i = \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2} = 2.5000000000, \\ s_1 &= \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 = \frac{4}{3} = 1.3333333333, \\ s_2 &= \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 \cdot 1 = \frac{10}{9} = 1.1111111111, \\ s_3 &= \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 1 \cdot 1 = \frac{28}{27} = 1.0370370370. \end{aligned}$$

Iz jednadžbe za koeficijent a_{10} dobivamo

$$\frac{5}{2}\, a_{10} = -\frac{4}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad a_{10} = -\frac{8}{15} = -0.5333333333.$$

Sustav jednadžbi za koeficijente a_{20} i a_{21} je

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}\, a_{20} + \frac{4}{3}\, a_{21} &= -\frac{10}{9} \\ \frac{4}{3}\, a_{20} + \frac{10}{9}\, a_{21} &= -\frac{28}{27}, \end{aligned}$$

odakle dobivamo

$$a_{21} = -\frac{10}{9} = -1.1111111111, \qquad a_{20} = \frac{4}{27} = 0.1481481481.$$

Traženi ortogonalni polinomi stupnja 0, 1 i 2, s vodećim koeficijentom jednakim 1, obzirom na zadani skalarni produkt su

$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x - \frac{8}{15}, \qquad p_2(x) = x^2 - \frac{10}{9}\, x + \frac{4}{27}.$$

Sljedeći ortogonalni polinom p_3, stupnja 3, mora imati nultočke u svim čvorovima

$$p_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1) = x^3 - \frac{4}{3}\, x^2 + \frac{1}{3}\, x.$$

Međutim, njegova norma je jednaka nuli, $\|p_3\| = \sqrt{\langle p_3, p_3 \rangle} = 0$.

Rješenje možemo dobiti i korištenjem tročlane rekurzije za monične ortogonalne polinome (vodeći koeficijent jednak je 1)

$$p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k > 0,$$

uz start $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1$. Uz oznaku $\gamma_k := \langle p_k, p_k \rangle$, i dogovor $\gamma_{-1} := 1$, koeficijenti se računaju formulama

$$\beta_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}, \quad \alpha_k = \frac{\langle x \cdot p_k, p_k \rangle}{\gamma_k}, \quad k \geq 0.$$

Za $k = 0$ dobivamo

$$\gamma_0 = \beta_0 = \frac{5}{2} = 2.5000000000, \quad \alpha_0 = \frac{8}{15} = 0.5333333333,$$

pa je

$$p_1(x) = (x - \alpha_0)p_0(x) = x - \alpha_0 = x - \frac{8}{15}.$$

Za $k = 1$ dobivamo

$$\gamma_1 = \frac{2}{5} = 0.4000000000, \quad \beta_1 = \frac{4}{25} = 0.1600000000, \quad \alpha_1 = \frac{26}{45} = 0.5777777778.$$

pa je

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x - \alpha_1)p_1(x) - \beta_1 p_0(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_0) - \beta_1 \\ &= x^2 - (\alpha_0 + \alpha_1)x + (\alpha_0\alpha_1 - \beta_1) \\ &= x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

6 Neprekidna metoda najmanjih kvadrata

6.1 Aproksimacija zadane funkcije pravcem

Zadatak 6.1.1. (NM 2009, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x$$

na intervalu $[0, \pi/2]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte i najveću apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

Rješenje. Neprekidna metoda najmanjih kvadrata za zadanu funkciju

$$S(a_0, a_1) = \int_0^{\pi/2} \big(f(x) - (a_0 + a_1 x)\big)^2 \, dx \to \min$$

daje sustav normalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} s_0 a_0 + s_1 a_1 &= t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 &= t_1 \end{aligned}$$

s koeficijentima

$$s_i = \int_0^{\pi/2} x^i \, dx, \qquad t_i = \int_0^{\pi/2} x^i f(x) \, dx.$$

Integracijom dobivamo sljedeće vrijednosti za koeficijente linearnog sustava:

$$s_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = x\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} = 1.5707963268,$$

$$s_1 = \int_0^{\pi/2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} = 1.2337005501,$$

$$s_2 = \int_0^{\pi/2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} = 1.2919281950,$$

$$t_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\,\Big|_0^{\pi/2} = 1,$$

$$t_1 = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{array}\right\}$$

$$= x\sin x\,\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 0 - 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 = 0.5707963268.$$

Linearni sustav za a_0 i a_1 je

$$\begin{aligned} 1.5707963268\,a_0 + 1.2337005501\,a_1 &= 1.0000000000 \\ 1.2337005501\,a_0 + 1.2919281950\,a_1 &= 0.5707963268. \end{aligned}$$

Rješenje sustava su koeficijenti aproksimacijske funkcije

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4(6-\pi)}{\pi^2} = 1.1584688627, \\ a_1 &= \frac{24(\pi-4)}{\pi^3} = -0.6644388982. \end{aligned}$$

Aproksimacijska funkcija je

$$\varphi(x) = 1.1584688627 - 0.6644388982\,x.$$

Neka je $e(x) := f(x) - \varphi(x)$ funkcija greške ove aproksimacije funkcije f na intervalu $[a,b] = [0,\pi/2]$. Najveća apsolutna greška

$$\|e\|_\infty := \max_{x\in[0,\pi/2]} |e(x)|$$

može se dostići samo u rubovima intervala a, b, ili u nultočkama $x^{(1)}$ prve derivacije greške na otvorenom intervalu (a,b).

Za $e(x) = \cos x - (a_0 + a_1 x)$, prva derivacija greške je

$$e'(x) = f'(x) - a_1 = -\sin x - a_1.$$

Iz jednadžbe $e'(x) = 0$ dobivamo

$$\sin x = -a_1 \quad \Rightarrow \quad x = \arcsin(-a_1).$$

Jedina nultočka od e' u intervalu $[0, \pi/2]$ je

$$x^{(1)} = \arcsin(0.6644388982) = 0.7267427712.$$

Onda imamo

$$\begin{aligned} e(0) &= -0.1584688627 \\ e(x^{(1)}) &= 0.0717498960 \\ e(\pi/2) &= -0.1147706821, \end{aligned}$$

pa je najveća apsolutna pogreška aproksimacije jednaka

$$\|e\|_\infty = \max\{\, |e(0)|, |e(x^{(1)})|, |e(\pi/2)| \,\} = |e(0)| = 0.1584688627.$$

—— • ——

Zadatak 6.1.2. (NM 2009, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Zadana je funkcija

$$f(x) = \operatorname{ch} x$$

na intervalu $[0, 1]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte i najveću apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

Rješenje. Neprekidna metoda najmanjih kvadrata za zadanu funkciju

$$S(a_0, a_1) = \int_0^1 \bigl(f(x) - (a_0 + a_1 x)\bigr)^2 \, dx \to \min$$

daje sustav normalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} s_0 a_0 + s_1 a_1 &= t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 &= t_1 \end{aligned}$$

s koeficijentima

$$s_i = \int_0^1 x^i \, dx, \qquad t_i = \int_0^1 x^i f(x) \, dx.$$

Integracijom dobivamo sljedeće vrijednosti za koeficijente linearnog sustava:

$$s_0 = \int_0^1 1\,dx = x\,\Big|_0^1 = 1,$$

$$s_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$s_2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{3} = 0.3333333333,$$

$$t_0 = \int_0^1 \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x\,\Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 = 1.1752011936,$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_0^1 x \operatorname{ch} x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \operatorname{ch} x\,dx & v = \operatorname{sh} x \end{matrix} \right\} \\ &= x \operatorname{sh} x\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{sh} 1 - 0 - \operatorname{ch} x\,\Big|_0^1 \\ &= \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1 = 0.6321205588. \end{aligned}$$

Linearni sustav za a_0 i a_1 je

$$\begin{aligned} 1.0000000000\,a_0 + 0.5000000000\,a_1 &= 1.1752011936 \\ 0.5000000000\,a_0 + 0.3333333333\,a_1 &= 0.6321205588. \end{aligned}$$

Rješenje sustava su koeficijenti aproksimacijske funkcije

$$\begin{aligned} a_0 &= 6 \operatorname{ch} 1 - 2 \operatorname{sh} 1 - 6 = 0.9080814216, \\ a_1 &= 6 \operatorname{sh} 1 - 12 \operatorname{ch} 1 + 12 = 0.5342395441. \end{aligned}$$

Aproksimacijska funkcija je

$$\varphi(x) = 0.9080814216 + 0.5342395441\,x.$$

Neka je $e(x) := f(x) - \varphi(x)$ funkcija greške ove aproksimacije funkcije f na intervalu $[a, b] = [0, 1]$. Najveća apsolutna greška

$$\|e\|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |e(x)|$$

može se dostići samo u rubovima intervala a, b, ili u nultočkama $x^{(1)}$ prve derivacije greške na otvorenom intervalu (a, b).

Za $e(x) = \operatorname{ch} x - (a_0 + a_1 x)$, prva derivacija greške je

$$e'(x) = f'(x) - a_1 = \operatorname{sh} x - a_1.$$

Iz jednadžbe $e'(x) = 0$ dobivamo

$$\operatorname{sh} x = a_1 \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{Arsh}(a_1).$$

Jedina nultočka od e' u intervalu $[0, 1]$ je

$$x^{(1)} = \operatorname{Arsh}(0.5342395441) = 0.5116250710.$$

Onda imamo

$$\begin{aligned} e(0) &= 0.0919185784 \\ e(x^{(1)}) &= -0.0476516989 \\ e(1) &= 0.1007596691, \end{aligned}$$

pa je najveća apsolutna pogreška aproksimacije jednaka

$$\|e\|_\infty = \max\{\, |e(0)|, |e(x^{(1)})|, |e(1)| \,\} = |e(1)| = 0.1007596691.$$

—— • ——

Zadatak 6.1.3. (NM 2012, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{3x + 2}$$

na intervalu $[0, 2]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte i najveću apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

Rješenje. Neprekidna metoda najmanjih kvadrata za zadanu funkciju

$$S(a_0, a_1) = \int_0^2 \big(f(x) - (a_0 + a_1 x)\big)^2 \, dx \to \min$$

daje sustav normalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} s_0 a_0 + s_1 a_1 &= t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 &= t_1 \end{aligned}$$

s koeficijentima

$$s_i = \int_0^2 x^i \, dx, \qquad t_i = \int_0^2 x^i f(x) \, dx.$$

Integracijom dobivamo sljedeće vrijednosti za koeficijente linearnog sustava:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= \int_0^2 1\,dx = x\,\Big|_0^2 = 2,\\
s_1 &= \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} = 2,\\
s_2 &= \int_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\,\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} = 2.6666666667,\\
t_0 &= \int_0^2 \sqrt{3x+2}\,dx = \frac{2}{3}\,(3x+2)^{3/2}\cdot\frac{1}{3}\,\Big|_0^2 = \frac{2}{9}\,(3x+2)^{3/2}\,\Big|_0^2\\
&= \frac{2}{9}\left(8^{3/2} - 2^{3/2}\right) = \frac{2}{9}\left(16\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right)\\
&= \frac{28}{9}\,\sqrt{2} = 4.3997755274.
\end{aligned}
$$

Zadnji koeficijent t_1 najlakše se dobiva parcijalnom integracijom, jer smo upravo izračunali integral za t_0. Izlazi

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \int_0^2 x\,\sqrt{3x+2}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sqrt{3x+2}\,dx & v = \dfrac{2}{9}\,(3x+2)^{3/2} \end{array}\right\}\\
&= x\cdot\frac{2}{9}\,(3x+2)^{3/2}\,\Big|_0^2 - \frac{2}{9}\int_0^2 (3x+2)^{3/2}\,dx\\
&= \frac{2}{9}\left(x\,(3x+2)^{3/2} - \frac{2}{5}\,(3x+2)^{5/2}\cdot\frac{1}{3}\right)\Big|_0^2\\
&= \frac{2}{9}\,(3x+2)^{3/2}\left(x - \frac{2}{15}\,(3x+2)\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{9}\,(3x+2)^{3/2}\cdot\frac{1}{15}\left(15x - 2(3x+2)\right)\Big|_0^2\\
&= \frac{2}{135}\,(3x+2)^{3/2}\,(9x-4)\,\Big|_0^2\\
&= \frac{2}{135}\left(8^{3/2}\cdot 14 - 2^{3/2}\cdot(-4)\right) = \frac{2}{135}\left(14\cdot 16\sqrt{2} + 4\cdot 2\sqrt{2}\right) = \frac{2}{135}\left(224\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right)\\
&= \frac{464}{135}\,\sqrt{2} = 4.8607043922.
\end{aligned}
$$

Linearni sustav za a_0 i a_1 je

$$
\begin{aligned}
2\,a_0 + 2\,a_1 &= \frac{28}{9}\,\sqrt{2}\\
2\,a_0 + \frac{8}{3}\,a_1 &= \frac{464}{135}\,\sqrt{2},
\end{aligned}
$$

ili, u decimalnim brojevima,

$$
\begin{aligned}
2.0000000000\, a_0 + 2.0000000000\, a_1 &= 4.3997755274 \\
2.0000000000\, a_0 + 2.6666666667\, a_1 &= 4.8607043922.
\end{aligned}
$$

Rješenje ovog sustava su koeficijenti aproksimacijske funkcije. U terminima desne strane, tj. koeficijenata t_0 i t_1, rješenja su

$$
a_0 = \frac{1}{2}\,(4t_0 - 3t_1) = 2t_0 - \frac{3}{2}\,t_1, \qquad a_1 = \frac{3}{2}\,(t_1 - t_0) = \frac{3}{2}\,t_1 - \frac{3}{2}\,t_0.
$$

Konačna rješenja za koeficijente su

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{16}{15}\,\sqrt{2} = 1.5084944665, \\
a_1 &= \frac{22}{45}\,\sqrt{2} = 0.6913932972.
\end{aligned}
$$

Aproksimacijska funkcija je

$$
\varphi(x) = 1.5084944665 + 0.6913932972\, x.
$$

Neka je $e(x) := f(x) - \varphi(x)$ funkcija greške ove aproksimacije funkcije f na intervalu $[a, b] = [0, 2]$. Najveća apsolutna greška

$$
\|e\|_\infty := \max_{x \in [0,2]} |e(x)|
$$

može se dostići samo u rubovima intervala a, b, ili u nultočkama $x^{(1)}$ prve derivacije greške na otvorenom intervalu (a, b).

Za funkciju greške

$$
e(x) = \sqrt{3x + 2} - (a_0 + a_1 x),
$$

prva derivacija greške je

$$
e'(x) = f'(x) - a_1 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}} - a_1.
$$

Iz jednadžbe $e'(x) = 0$ dobivamo

$$
\frac{3}{2\sqrt{3x + 2}} = a_1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{3}{4a_1^2} - \frac{2}{3} = \frac{9 - 8a_1^2}{12a_1^2}.
$$

Jedina nultočka od e' u intervalu $[0, 2]$ je

$$
x^{(1)} = \frac{10481}{11616} = 0.9022899449.
$$

Onda imamo

$$
\begin{aligned}
e(0) &= -\frac{1}{15}\,\sqrt{2} = -0.0942809042 \\
e(x^{(1)}) &= \frac{125}{4752}\,\sqrt{2} = 0.0372004830 \\
e(2) &= -\frac{2}{45}\,\sqrt{2} = -0.0628539361,
\end{aligned}
$$

pa je najveća apsolutna pogreška aproksimacije jednaka

$$
\begin{aligned}
\|e\|_\infty &= \max\{\, |e(0)|, |e(x^{(1)})|, |e(2)|\,\} \\
&= |e(0)| = \frac{1}{15}\,\sqrt{2} = 0.0942809042.
\end{aligned}
$$

6.2 Aproksimacija parametarski zadane funkcije

Zadatak 6.2.1. (NM 2011, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Zadana je funkcija

$$f(x) = \operatorname{sh}(px)$$

na intervalu $[-1, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

Rješenje. Aproksimacijska funkcija φ je polinom stupnja 2. Zato zadatak možemo riješiti na dva načina: direktnom minimizacijom greške po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, ili razvojem funkcije f po odgovarajućim ortogonalnim polinomima. Dodatno, zbog **neparnosti** zadane funkcije $f(x) = \operatorname{sh}(px)$ na intervalu $[-1, 1]$, za svaki $p > 0$, očekujemo bitno pojednostavljenje rješenja.

Za zadanu funkciju f i zadanu težinsku funkciju w, nepoznate koeficijente ili parametre aproksimacijske funkcije φ određujemo po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata tako da tražimo rješenje minimizacijskog problema

$$S(a_0, a_1, a_2) = \int_{-1}^{1} w(x)\Big(f(x) - \big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\big)\Big)^2 \, dx \to \min .$$

Iz nužnih uvjeta za minimum

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

dobivamo sustav normalnih jednadžbi za parametre a_0, a_1 i a_2

$$\begin{aligned} s_0 a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 &= t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 &= t_1 \\ s_2 a_0 + s_3 a_1 + s_4 a_2 &= t_2 \end{aligned}$$

s koeficijentima

$$s_i = \int_{-1}^{1} w(x)\, x^i \, dx, \qquad t_i = \int_{-1}^{1} w(x)\, x^i f(x)\, dx.$$

Za Legendreovu težinsku funkciju $w(x) = 1$ i zadanu funkciju $f(x) = \operatorname{sh}(px)$, koeficijenti linearnog sustava su

$$s_i = \int_{-1}^{1} x^i \, dx, \qquad t_i = \int_{-1}^{1} x^i \operatorname{sh}(px)\, dx.$$

Integracijom, za $i \geq 0$, dobivamo

$$s_i = \int_{-1}^{1} x^i \, dx = \frac{1}{i+1} x^{i+1} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{i+1}\big(1 - (-1)^{i+1}\big) = \begin{cases} \dfrac{2}{i+1}, & i \text{ paran}, \\ 0, & i \text{ neparan}. \end{cases}$$

Treba još izračunati koeficijente t_i na desnoj strani sustava. Prvog dobivamo odmah

$$t_0 = \int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(px)\,dx = \frac{\operatorname{ch}(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{p}\big(\operatorname{ch} p - \operatorname{ch}(-p)\big) = \{\operatorname{ch}(-p) = \operatorname{ch} p\} = 0,$$

jer je ch parna funkcija. Zaključak $t_0 = 0$ izlazi i direktno, kao integral neparne funkcije $\operatorname{sh}(px)$. Preostala dva koeficijenta računamo parcijalnom integracijom. Redom, izlazi

$$\begin{aligned}
t_1 &= \int_{-1}^{1} x \operatorname{sh}(px)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \operatorname{sh}(px)\,dx & v = \dfrac{\operatorname{ch}(px)}{p} \end{matrix}\right\} \\
&= x\,\frac{\operatorname{ch}(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{p}\int_{-1}^{1} \operatorname{ch}(px)\,dx \\
&= \frac{1}{p}\big(1 \cdot \operatorname{ch} p - (-1)\cdot \operatorname{ch}(-p)\big) - \frac{\operatorname{sh}(px)}{p^2}\Bigg|_{-1}^{1} = \{\operatorname{ch}(-p) = \operatorname{ch} p\} \\
&= 2\,\frac{\operatorname{ch} p}{p} - \frac{1}{p^2}\big(\operatorname{sh} p - \operatorname{sh}(-p)\big) = \{\operatorname{sh}(-p) = -\operatorname{sh} p\} \\
&= 2\left(\frac{\operatorname{ch} p}{p} - \frac{\operatorname{sh} p}{p^2}\right) = \frac{2(p\operatorname{ch} p - \operatorname{sh} p)}{p^2}.
\end{aligned}$$

Za zadnji koeficijent t_2 dobivamo

$$\begin{aligned}
t_2 &= \int_{-1}^{1} x^2 \operatorname{sh}(px)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = \operatorname{sh}(px)\,dx & v = \dfrac{\operatorname{ch}(px)}{p} \end{matrix}\right\} \\
&= x^2\,\frac{\operatorname{ch}(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{2}{p}\int_{-1}^{1} x\operatorname{ch}(px)\,dx \\
&= \frac{1}{p}\big(1^2 \cdot \operatorname{ch} p - (-1)^2 \cdot \operatorname{ch}(-p)\big) - \frac{2}{p}\int_{-1}^{1} x\operatorname{ch}(px)\,dx = \{\operatorname{ch}(-p) = \operatorname{ch} p\} \\
&= -\frac{2}{p}\int_{-1}^{1} x\operatorname{ch}(px)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \operatorname{ch}(px)\,dx & v = \dfrac{\operatorname{sh}(px)}{p} \end{matrix}\right\} \\
&= -\frac{2}{p}\left(x\,\frac{\operatorname{sh}(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{p}\int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(px)\,dx\right) \\
&= -\frac{2}{p^2}\left(\big(1\cdot \operatorname{sh} p - (-1)\cdot \operatorname{sh}(-p)\big) - \frac{\operatorname{ch}(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = \{\operatorname{sh}(-p) = -\operatorname{sh} p\} \\
&= \frac{2}{p^3}\big(\operatorname{ch} p - \operatorname{ch}(-p)\big) = \{\operatorname{ch}(-p) = \operatorname{ch} p\} = 0.
\end{aligned}$$

Zaključak $t_2 = 0$ izlazi i direktno, kao integral neparne funkcije $x^2 \operatorname{sh}(px)$.

Linearni sustav za koeficijente a_0, a_1 i a_2 je

$$\begin{aligned} 2\,a_0 + 0\,a_1 + \frac{2}{3}\,a_2 &= 0 \\ 0\,a_0 + \frac{2}{3}\,a_1 + 0\,a_2 &= 2\left(\frac{\operatorname{ch} p}{p} - \frac{\operatorname{sh} p}{p^2}\right) \\ \frac{2}{3}\,a_0 + 0\,a_1 + \frac{2}{5}\,a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Odavde vidimo da se linearni sustav za koeficijente "**raspada**" na dva manja **nezavisna** sustava — za koeficijente s parnim, odnosno, neparnim indeksima,

$$\begin{aligned} s_0a_0 + s_2a_2 &= t_0 \\ s_2a_0 + s_4a_2 &= t_2 \end{aligned}\,, \qquad s_2a_1 = t_1.$$

To je posljedica parnosti/neparnosti baze potencija x^i na intervalu $[-1, 1]$ (simetričnost intervala oko nule).

Sustav za parne koeficijente a_0 i a_2

$$\begin{aligned} 2\,a_0 + \frac{2}{3}\,a_2 &= 0 \\ \frac{2}{3}\,a_0 + \frac{2}{5}\,a_2 &= 0 \end{aligned}$$

je regularan i **homogen**, pa je njegovo rješenje

$$a_0 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Sustav (jednadžba) za neparni koeficijent a_1 je

$$\frac{2}{3}\,a_1 = 2\left(\frac{\operatorname{ch} p}{p} - \frac{\operatorname{sh} p}{p^2}\right),$$

odakle dobivamo

$$a_1 = 3\left(\frac{\operatorname{ch} p}{p} - \frac{\operatorname{sh} p}{p^2}\right).$$

Dakle, prema očekivanju, zbog **neparnosti** funkcije $\operatorname{sh}(px)$, aproksimacijska funkcija φ ima samo **neparni** dio

$$\varphi(x) = 3\left(\frac{\operatorname{ch} p}{p} - \frac{\operatorname{sh} p}{p^2}\right) x.$$

Rješenje preko ortogonalnih polinoma.

Aproksimaciju φ možemo napisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma φ_k na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1$

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

s tim da za koeficijente c_k vrijedi

$$c_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2}, \quad k \geq 0,$$

u odgovarajućem (integralnom) skalarnom produktu. Drugim riječima, tražena aproksimacija polinomom, po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, je **početni** komad razvoja zadane funkcije f po tim ortogonalnim polinomima.

Prva tri polinoma φ_k, s vodećim koeficijentom jednakim 1, možemo izračunati direktno Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije na bazi potencija $\{1, x, x^2\}$. Dobivamo

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = x, \qquad \varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

a pripadni kvadrati normi su

$$\|\varphi_0(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$

$$\|\varphi_1(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3},$$

$$\|\varphi_2(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} \Big(x^2 - \frac{1}{3}\Big)^2 dx = 2\bigg(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cdot 1\bigg) = \frac{8}{45}.$$

Koeficijente c_k u razvoju funkcije $\operatorname{sh}(px)$ po ovim ortogonalnim polinomima dobivamo računanjem integrala kao u prvom dijelu rješenja. Koristeći neparnost funkcije $\operatorname{sh}(px)$, dobivamo

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(px)\, dx = \frac{1}{2}\, t_0 = 0,$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x\operatorname{sh}(px)\, dx = \frac{3}{2}\, t_1 = 3\bigg(\frac{\operatorname{ch} p}{p} - \frac{\operatorname{sh} p}{p^2}\bigg),$$

$$c_2 = \frac{45}{8}\int_{-1}^{1} \Big(x^2 - \frac{1}{3}\Big)\operatorname{sh}(px)\, dx = \frac{45}{8}\Big(t_2 - \frac{1}{3}\, t_0\Big) = 0,$$

pa je

$$\varphi(x) = 3\bigg(\frac{\operatorname{ch} p}{p} - \frac{\operatorname{sh} p}{p^2}\bigg)\, x.$$

Na kraju, primijetimo da pripadne ortogonalne polinome φ_k **ne treba** računati, jer možemo uzeti i standardne **Legendreove** polinome P_k (samo je normalizacija drugačija). Prva tri Legendreova polinoma su

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Tražena aproksimacija polinomom drugog stupnja onda ima oblik

$$\varphi(x) = c_0' P_0(x) + c_1' P_1(x) + c_2' P_2(x),$$

s tim da za koeficijente c_k vrijedi

$$c_k' = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} P_k(x)\operatorname{sh}(px)\, dx, \quad k \geq 0,$$

a ove integrale računamo kao i ranije.

Zadatak 6.2.2. (NM 2011, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin(px)$$

na intervalu $[-1, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

Rješenje. Aproksimacijska funkcija φ je polinom stupnja 2. Zato zadatak možemo riješiti na dva načina: direktnom minimizacijom greške po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, ili razvojem funkcije f po odgovarajućim ortogonalnim polinomima. Dodatno, zbog **neparnosti** zadane funkcije $f(x) = \sin(px)$ na intervalu $[-1, 1]$, za svaki $p > 0$, očekujemo bitno pojednostavljenje rješenja.

Za zadanu funkciju f i zadanu težinsku funkciju w, nepoznate koeficijente ili parametre aproksimacijske funkcije φ određujemo po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata tako da tražimo rješenje minimizacijskog problema

$$S(a_0, a_1, a_2) = \int_{-1}^{1} w(x)\Big(f(x) - \big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\big)\Big)^2 \, dx \to \min .$$

Iz nužnih uvjeta za minimum

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

dobivamo sustav normalnih jednadžbi za parametre a_0, a_1 i a_2

$$\begin{aligned} s_0 a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 &= t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 &= t_1 \\ s_2 a_0 + s_3 a_1 + s_4 a_2 &= t_2 \end{aligned}$$

s koeficijentima

$$s_i = \int_{-1}^{1} w(x)\, x^i \, dx, \qquad t_i = \int_{-1}^{1} w(x)\, x^i f(x) \, dx.$$

Za Legendreovu težinsku funkciju $w(x) = 1$ i zadanu funkciju $f(x) = \sin(px)$, koeficijenti linearnog sustava su

$$s_i = \int_{-1}^{1} x^i \, dx, \qquad t_i = \int_{-1}^{1} x^i \sin(px) \, dx.$$

Integracijom, za $i \geq 0$, dobivamo

$$s_i = \int_{-1}^{1} x^i \, dx = \frac{1}{i+1} x^{i+1} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{i+1}\big(1 - (-1)^{i+1}\big) = \begin{cases} \dfrac{2}{i+1}, & i \text{ paran}, \\ 0, & i \text{ neparan}. \end{cases}$$

Treba još izračunati koeficijente t_i na desnoj strani sustava. Prvog dobivamo odmah

$$t_0 = \int_{-1}^{1} \sin(px)\,dx = -\frac{\cos(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{p}\big(\cos p - \cos(-p)\big) = \{\cos(-p) = \cos p\} = 0,$$

jer je cos parna funkcija. Zaključak $t_0 = 0$ izlazi i direktno, kao integral neparne funkcije $\sin(px)$. Preostala dva koeficijenta računamo parcijalnom integracijom. Redom, izlazi

$$\begin{aligned}
t_1 &= \int_{-1}^{1} x\sin(px)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin(px)\,dx & v = -\dfrac{\cos(px)}{p} \end{array}\right\} \\
&= -x\,\frac{\cos(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{p}\int_{-1}^{1} \cos(px)\,dx \\
&= -\frac{1}{p}\big(1\cdot\cos p - (-1)\cdot\cos(-p)\big) + \frac{\sin(px)}{p^2}\Bigg|_{-1}^{1} = \{\cos(-p) = \cos p\} \\
&= -2\,\frac{\cos p}{p} + \frac{1}{p^2}\big(\sin p - \sin(-p)\big) = \{\sin(-p) = -\sin p\} \\
&= 2\left(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\right) = \frac{2(\sin p - p\cos p)}{p^2}.
\end{aligned}$$

Za zadnji koeficijent t_2 dobivamo

$$\begin{aligned}
t_2 &= \int_{-1}^{1} x^2\sin(px)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = \sin(px)\,dx & v = -\dfrac{\cos(px)}{p} \end{array}\right\} \\
&= -x^2\,\frac{\cos(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1} + \frac{2}{p}\int_{-1}^{1} x\cos(px)\,dx \\
&= -\frac{1}{p}\big(1^2\cdot\cos p - (-1)^2\cdot\cos(-p)\big) + \frac{2}{p}\int_{-1}^{1} x\cos(px)\,dx = \{\cos(-p) = \cos p\} \\
&= \frac{2}{p}\int_{-1}^{1} x\cos(px)\,dx = \left\{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos(px)\,dx & v = \dfrac{\sin(px)}{p} \end{array}\right\} \\
&= \frac{2}{p}\left(x\,\frac{\sin(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{p}\int_{-1}^{1} \sin(px)\,dx\right) \\
&= \frac{2}{p^2}\left(\big(1\cdot\sin p - (-1)\cdot\sin(-p)\big) + \frac{\cos(px)}{p}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = \{\sin(-p) = -\sin p\} \\
&= \frac{2}{p^3}\big(\cos p - \cos(-p)\big) = \{\cos(-p) = \cos p\} = 0.
\end{aligned}$$

Zaključak $t_2 = 0$ izlazi i direktno, kao integral neparne funkcije $x^2 \sin(px)$.

Linearni sustav za koeficijente a_0, a_1 i a_2 je

$$\begin{aligned} 2\,a_0 + 0\,a_1 + \frac{2}{3}\,a_2 &= 0 \\ 0\,a_0 + \frac{2}{3}\,a_1 + 0\,a_2 &= 2\biggl(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\biggr) \\ \frac{2}{3}\,a_0 + 0\,a_1 + \frac{2}{5}\,a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Odavde vidimo da se linearni sustav za koeficijente "**raspada**" na dva manja **nezavisna** sustava — za koeficijente s parnim, odnosno, neparnim indeksima,

$$\begin{aligned} s_0a_0 + s_2a_2 &= t_0 \\ s_2a_0 + s_4a_2 &= t_2 \end{aligned}\,, \qquad s_2a_1 = t_1.$$

To je posljedica parnosti/neparnosti baze potencija x^i na intervalu $[-1, 1]$ (simetričnost intervala oko nule).

Sustav za parne koeficijente a_0 i a_2

$$\begin{aligned} 2\,a_0 + \frac{2}{3}\,a_2 &= 0 \\ \frac{2}{3}\,a_0 + \frac{2}{5}\,a_2 &= 0 \end{aligned}$$

je regularan i **homogen**, pa je njegovo rješenje

$$a_0 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Sustav (jednadžba) za neparni koeficijent a_1 je

$$\frac{2}{3}\,a_1 = 2\biggl(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\biggr),$$

odakle dobivamo

$$a_1 = 3\biggl(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\biggr).$$

Dakle, prema očekivanju, zbog **neparnosti** funkcije $\sin(px)$, aproksimacijska funkcija φ ima samo **neparni** dio

$$\varphi(x) = 3\biggl(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\biggr)\,x.$$

Rješenje preko ortogonalnih polinoma.

Aproksimaciju φ možemo napisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma φ_k na intervalu $[-1, 1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1$

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

s tim da za koeficijente c_k vrijedi

$$c_k = \frac{\langle f, \varphi_k\rangle}{\|\varphi_k\|^2}, \quad k \geq 0,$$

u odgovarajućem (integralnom) skalarnom produktu. Drugim riječima, tražena aproksimacija polinomom, po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, je **početni** komad razvoja zadane funkcije f po tim ortogonalnim polinomima.

Prva tri polinoma φ_k, s vodećim koeficijentom jednakim 1, možemo izračunati direktno Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije na bazi potencija $\{1, x, x^2\}$. Dobivamo

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = x, \qquad \varphi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

a pripadni kvadrati normi su

$$\|\varphi_0(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$

$$\|\varphi_1(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3},$$

$$\|\varphi_2(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} \Big(x^2 - \frac{1}{3}\Big)^2 dx = 2\bigg(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot 1\bigg) = \frac{8}{45}.$$

Koeficijente c_k u razvoju funkcije $\sin(px)$ po ovim ortogonalnim polinomima dobivamo računanjem integrala kao u prvom dijelu rješenja. Koristeći neparnost funkcije $\sin(px)$, dobivamo

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sin(px)\, dx = \frac{1}{2}\, t_0 = 0,$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x \sin(px)\, dx = \frac{3}{2}\, t_1 = 3\bigg(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\bigg),$$

$$c_2 = \frac{45}{8} \int_{-1}^{1} \Big(x^2 - \frac{1}{3}\Big) \sin(px)\, dx = \frac{45}{8}\Big(t_2 - \frac{1}{3}\, t_0\Big) = 0,$$

pa je

$$\varphi(x) = 3\bigg(\frac{\sin p}{p^2} - \frac{\cos p}{p}\bigg)\, x.$$

Na kraju, primijetimo da pripadne ortogonalne polinome φ_k **ne treba** računati, jer možemo uzeti i standardne **Legendreove** polinome P_k (samo je normalizacija drugačija). Prva tri Legendreova polinoma su

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Tražena aproksimacija polinomom drugog stupnja onda ima oblik

$$\varphi(x) = c_0' P_0(x) + c_1' P_1(x) + c_2' P_2(x),$$

s tim da za koeficijente c_k vrijedi

$$c_k' = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} P_k(x) \sin(px)\, dx, \quad k \geq 0,$$

a ove integrale računamo kao i ranije.

6.3 Dodatni uvjeti na aproksimaciju

Zadatak 6.3.1. (NM 2015, 2. kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p$$

na intervalu $[0, 3]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite kvadratni polinom φ koji zadovoljava uvjete

$$\varphi(2) = 4, \quad \varphi'(2) = 4,$$

i aproksimira funkciju f na zadanom intervalu, s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

Rješenje. Aproksimacijska funkcija φ je kvadratni polinom oblika

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdje su a, b i c nepoznati parametri. **Prvo** treba iskoristiti zadane **uvjete** u ovom obliku funkcije φ. Iz $\varphi(2) = 4$ i $\varphi'(2) = 4$, koristeći $\varphi'(x) = 2ax + b$, dobivamo dvije jednadžbe

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 4, \\ 4a + b &= 4. \end{aligned}$$

Iz ove dvije jednadžbe izrazimo neke dvije nepoznanice preko treće, tako da ostaje samo **jedna**. Tu imamo 3 mogućnosti — koju nepoznanicu ćemo ostaviti u obliku funkcije φ.

1. Ostaje a. Iz druge jednadžbe izlazi $b = 4(1 - a)$. Uvrštavanjem u prvu dobivamo

$$4a + 8(1 - a) + c = -4a + 8 + c = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = 4(a - 1) = -b.$$

Dakle, kad jednom nađemo a, preostala dva parametra izračunamo iz relacija

$$b = 4(1 - a), \qquad c = 4(a - 1) = -b.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u oblik funkcije φ, dobivamo kvadratni polinom $p_{2,a}$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = p_{2,a}(x) &= ax^2 + 4(1 - a)x + 4(a - 1) = a(x^2 - 4x + 4) + 4x - 4 \\ &= a(x - 2)^2 + 4(x - 1). \end{aligned}$$

Funkcija φ sad ovisi o **jednom** parametru a. Taj parametar određujemo po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, tako da φ aproksimira zadanu funkciju f,

$$S(a) = \int_0^3 \big(f(x) - p_{2,a}(x)\big)^2 \, dx \to \min.$$

Iz nužnog uvjeta ekstrema izlazi jednadžba

$$0 = \frac{dS(a)}{da} = -2 \int_0^3 \Big(x^p - 4(x - 1) - a(x - 2)^2\Big) \cdot (x - 2)^2 \, dx.$$

Ovu jednadžbu možemo napisati u standardnom obliku

$$s_a a = t_a,$$

s koeficijentima

$$s_a = \int_0^3 (x-2)^4 \, dx, \qquad t_a = \int_0^3 \big(x^p - 4(x-1)\big) \cdot (x-2)^2 \, dx.$$

Integracijom dobivamo

$$s_a = \int_0^3 (x-2)^4 \, dx = \frac{1}{5}\,(x-2)^5 \,\bigg|_0^3 = \frac{1}{5}\big(1-(-32)\big) = \frac{33}{5}.$$

Radi jednostavnosti, koeficijent t_a računamo kao zbroj dva integrala

$$\begin{aligned} t_{a,1} &= \int_0^3 x^p\,(x-2)^2 \, dx = \int_0^3 \big(x^{p+2} - 4x^{p+1} + 4x^p\big)\, dx \\ &= \left(\frac{x^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{x^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)\bigg|_0^3 = \frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{a,2} &= -4\int_0^3 (x-1)\,(x-2)^2 \, dx = -4\int_0^3 \big(x^3 - 5x^2 + 8x - 4\big)\, dx \\ &= -4\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x\right)\bigg|_0^3 = -4\left(\frac{81}{4} - 45 + 36 - 12\right) = 3, \end{aligned}$$

pa je

$$t_a = t_{a,1} + t_{a,2} = \frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1} + 3.$$

Za parametar a dobivamo

$$a = \frac{t_a}{s_a} = \frac{5}{33}\left(\frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1} + 3\right).$$

Traženi kvadratni polinom je (bez sređivanja)

$$\varphi(x) = p_{2,a}(x) = \frac{5}{33}\left(\frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1} + 3\right) \cdot (x-2)^2 + 4(x-1).$$

2. Ostaje b. Iz druge jednadžbe izlazi $a = 1 - b/4$. Uvrštavanjem u prvu dobivamo

$$(4-b) + 2b + c = 4 + b + c = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = -b.$$

Dakle, kad jednom nađemo b, preostala dva parametra izračunamo iz relacija

$$a = 1 - \frac{b}{4}, \qquad c = -b.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u oblik funkcije φ, dobivamo kvadratni polinom $p_{2,b}$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = p_{2,b}(x) &= \Big(1 - \frac{b}{4}\Big)x^2 + bx - b = b\left(-\frac{1}{4}x^2 + x - 1\right) + x^2 \\ &= b\left[-\frac{1}{4}(x-2)^2\right] + x^2. \end{aligned}$$

Funkcija φ sad ovisi o **jednom** parametru b. Taj parametar određujemo po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, tako da φ aproksimira zadanu funkciju f,

$$S(b) = \int_0^3 \big(f(x) - p_{2,b}(x)\big)^2 \, dx \to \min .$$

Iz nužnog uvjeta ekstrema izlazi jednadžba

$$0 = \frac{dS(b)}{db} = -2 \int_0^3 \left(x^p - x^2 - b\left[-\frac{1}{4}(x-2)^2\right]\right) \cdot \left[-\frac{1}{4}(x-2)^2\right] dx.$$

Ovu jednadžbu možemo napisati u standardnom obliku

$$s_b b = t_b,$$

s koeficijentima

$$s_b = \frac{1}{16} \int_0^3 (x-2)^4 \, dx, \qquad t_b = -\frac{1}{4} \int_0^3 \big(x^p - x^2\big) \cdot (x-2)^2 \, dx.$$

Integracijom dobivamo

$$s_b = \frac{1}{16} \int_0^3 (x-2)^4 \, dx = \frac{1}{80} \, (x-2)^5 \, \Big|_0^3 = \frac{1}{80} \big(1 - (-32)\big) = \frac{33}{80}.$$

Radi jednostavnosti, koeficijent t_b računamo kao zbroj dva integrala

$$\begin{aligned} t_{b,1} &= -\frac{1}{4} \int_0^3 x^p \, (x-2)^2 \, dx = -\frac{1}{4} \int_0^3 \big(x^{p+2} - 4x^{p+1} + 4x^p\big) \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{x^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{x^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{x^{p+1}}{p+1}\right) \Bigg|_0^3 = -\frac{1}{4} \left(\frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{b,2} &= \frac{1}{4} \int_0^3 x^2 \, (x-2)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int_0^3 \big(x^4 - 4x^3 + 4x^2\big) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right) \Bigg|_0^3 = \frac{1}{4} \left(\frac{243}{5} - 81 + 36 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{18}{5} = \frac{9}{10}, \end{aligned}$$

pa je

$$t_b = t_{b,1} + t_{b,2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1} - \frac{18}{5} \right).$$

Za parametar b dobivamo

$$b = \frac{t_b}{s_b} = -\frac{20}{33} \left(\frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1} - \frac{18}{5} \right).$$

Traženi kvadratni polinom je (bez sređivanja)

$$\varphi(x) = p_{2,b}(x) = \frac{5}{33}\left(\frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1} - \frac{18}{5}\right) \cdot (x-2)^2 + x^2.$$

Uočimo još da je $x^2 = (x-2)^2 + 4(x-1)$, pa je koeficijent uz x^2 ili $(x-2)^2$ jednak

$$\begin{aligned}\frac{5}{33}\left(\frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1} - \frac{18}{5}\right) + 1 &= \frac{5}{33}\left(\frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1} - \frac{18}{5} + \frac{33}{5}\right) \\ &= \frac{5}{33}\left(\frac{3^{p+3}}{p+3} - 4\,\frac{3^{p+2}}{p+2} + 4\,\frac{3^{p+1}}{p+1} + 3\right),\end{aligned}$$

što je isto kao kod prethodnog polinoma $p_{2,a}$ (kako i treba biti).

3. Ostaje c. Iz druge jednadžbe izlazi $a = 1 - b/4$. Uvrštavanjem u prvu dobivamo

$$(4-b) + 2b + c = 4 + b + c = 4 \quad\Longrightarrow\quad b = -c.$$

Dakle, kad jednom nađemo c, preostala dva parametra izračunamo iz relacija

$$a = 1 + \frac{c}{4}, \qquad b = -c.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u oblik funkcije φ, dobivamo kvadratni polinom $p_{2,c}$

$$\begin{aligned}\varphi(x) = p_{2,c}(x) &= \left(1 + \frac{c}{4}\right)x^2 - cx + c = c\left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right) + x^2 \\ &= c\left[\frac{1}{4}(x-2)^2\right] + x^2.\end{aligned}$$

Funkcija φ sad ovisi o **jednom** parametru c. Taj parametar određujemo po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, tako da φ aproksimira zadanu funkciju f,

$$S(c) = \int_0^3 \big(f(x) - p_{2,c}(x)\big)^2\,dx \to \min.$$

Iz nužnog uvjeta ekstrema izlazi jednadžba

$$0 = \frac{dS(c)}{dc} = -2\int_0^3 \left(x^p - x^2 - c\left[\frac{1}{4}(x-2)^2\right]\right) \cdot \left[\frac{1}{4}(x-2)^2\right] dx.$$

Ovu jednadžbu možemo napisati u standardnom obliku

$$s_c c = t_c,$$

s koeficijentima

$$s_c = \frac{1}{16}\int_0^3 (x-2)^4\,dx, \qquad t_c = \frac{1}{4}\int_0^3 \left(x^p - x^2\right) \cdot (x-2)^2\,dx.$$

Očito je $s_c = s_b$ i $t_c = -t_b$, pa ove integrale nećemo ponovno računati. Na kraju dobijemo $c = t_c/s_c = -b$ (prema očekivanju).

6.4 Razvoj po ortogonalnim polinomima

Zadatak 6.4.1. (NM 2019, popravni kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Nađite razvoj funkcije

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3$$

po Čebiševljevim polinomima prve vrste T_n. Koristeći taj razvoj, izračunajte polinom p_3, stupnja najviše 3, koji aproksimira funkciju f na intervalu $[-1,1]$, u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata, s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Kolika je najveća apsolutna greška te aproksimacije na $[-1,1]$?

——— • ———

Uvod u rješenje. Čebiševljevi polinomi prve vrste T_k, za $k \geq 0$, su ortogonalni na intervalu $[-1,1]$ s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$. Relacije ortogonalnosti su

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)\, T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ \pi, & k = \ell = 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & k = \ell > 0. \end{cases}$$

Razvoj funkcije f po Čebiševljevim polinomima prve vrste ima oblik

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x),$$

a za koeficijente c_k vrijedi

$$c_k = \frac{\langle f, T_k \rangle}{\|T_k\|^2}, \quad k \geq 0,$$

u odgovarajućem integralnom skalarnom produktu. Zbog $\|T_0\|^2 = 2\|T_k\|^2$, za $k \geq 1$, razvoj se obično piše kao i kod Fourierovih redova — s "polovičnim" prvim koeficijentom,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x),$$

tako da za sve koeficijente vrijedi ista formula

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad k \geq 0.$$

Ovaj integral obično se računa standardnom supstitucijom $x = \cos\varphi$, koristeći "definicijsku" relaciju za Čebiševljeve polinome prve vrste

$$T_k(\cos\varphi) = \cos k\varphi, \quad k \geq 0.$$

Za granice integracije vrijedi $-1 = \cos\pi$ i $1 = \cos 0$. Nakon supstitucije dobivamo

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{0} \frac{f(\cos\varphi) \cdot \cos k\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\, (-\sin\varphi)\, d\varphi = \left\{ \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sin\varphi, \text{za } \varphi \in [0,\pi] \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\cos\varphi) \cdot \cos k\varphi\, d\varphi. \end{aligned}$$

Polinom p_m, stupnja m, koji aproksimira funkciju f na intervalu $[-1,1]$, u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata, s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, dobiva se "rezanjem" razvoja po Čebiševljevim polinomima prve vrste, tj. vrijedi

$$p_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k T_k(x),$$

a greška je odrezani ostatak razvoja

$$e(x) = f(x) - p_m(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k T_k(x).$$

U specijalnom slučaju, kad je funkcija f **polinom** stupnja n, onda razvoj ima samo članove do T_n, pa je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k T_k(x).$$

Za **male** stupnjeve n, **ne** isplati se računati koeficijente preko integrala. Puno **lakše** je uvrstiti eksplicitne izraze za T_k u standardnoj bazi potencija — dobivaju se iz rekurzije

$$T_{k+1}(x) - 2xT_k(x) + T_{k-1}(x) = 0, \quad k \geq 1,$$

uz početak $T_0(x) = 1$ i $T_1(x) = x$.

Konkretno, kad je f polinom stupnja 4, dovoljno je naći izraze za T_2, T_3 i T_4:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \qquad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Kad to uvrstimo u razvoj i izjednačimo koeficijente uz iste potencije, dobijemo trokutasti linearni sustav jednadžbi za koeficijente, koji se lako rješava.

Aproksimacija p_3 onda ima članove do T_3, a greška ima posebno jednostavan oblik

$$e(x) = f(x) - p_3(x) = a_4 T_4(x).$$

Odavde se lako nalazi maksimalna apsolutna vrijednost greške na intervalu $[-1,1]$. Iz oblika $T_k(\cos\varphi) = \cos k\varphi$ odmah slijedi

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_k(x)| = 1, \quad k \geq 0,$$

pa je

$$\max_{x\in[-1,1]} |e(x)| = |a_4| \max_{x\in[-1,1]} |T_4(x)| = |a_4|.$$

——— • ———

Rješenje. Razvoj funkcije f po Čebiševljevim polinomima prve vrste ima oblike

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x).$$

U pripadnom integralnom skalarnom produktu, koeficijenti c_k i a_k dani su formulama

$$c_k = \frac{\langle f, T_k\rangle}{\|T_k\|^2}, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad k \geq 0.$$

Zadana funkcija f je polinom stupnja 4, a Čebiševljev polinom T_k je ortogonalan na **sve** polinome stupnja strogo manjeg od k, odakle slijedi da je

$$c_k = a_k = 0, \quad \text{za } k > 4,$$

tj. u razvoju preostaju **samo** članovi do uključivo T_4.

Kad uvrstimo f u formulu za koeficijente a_k, nakon supstitucije $x = \cos\varphi$, izlazi

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3)\, T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \big(2\cos^4\varphi - \cos^3\varphi + 2\cos^2\varphi - 3\big) \cos k\varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Računanje ovih integrala za $k = 0, \ldots, 4$ zahtijeva dosta posla. Međutim, postoji i puno brži način za nalaženje koeficijenata. Iskoristimo prvi oblik razvoja

$$f(x) = \sum_{k=0}^{4} c_k T_k(x)$$

i uvrstimo eksplicitne izraze za $T_0, \ldots, T_4$ u standardnoj bazi potencija

$$T_0(x) = 1, \;\; T_1(x) = x, \;\; T_2(x) = 2x^2 - 1, \;\; T_3(x) = 4x^3 - 3x, \;\; T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Onda je

$$\begin{aligned} 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 &= c_0 + c_1 x + c_2(2x^2 - 1) + c_3(4x^3 - 3x) + c_4(8x^4 - 8x^2 + 1) \\ &= 8c_4 x^4 + 4c_3 x^3 + (2c_2 - 8c_4)x^2 + (c_1 - 3c_3)x + (c_0 - c_2 + c_4). \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 8c_4 &= 2 \\ 4c_3 &= -1 \\ 2c_2 - 8c_4 &= 2 \\ c_1 - 3c_3 &= 0 \\ c_0 - c_2 + c_4 &= -3. \end{aligned}$$

Supstitucijom unaprijed izlazi

$$c_4 = \frac{1}{4}, \quad c_3 = -\frac{1}{4}, \quad c_2 = 2, \quad c_1 = -\frac{3}{4}, \quad c_0 = -\frac{5}{4}.$$

Razvoj funkcije f po Čebiševljevim polinomima prve vrste je

$$f(x) = \frac{1}{4}\, T_4(x) - \frac{1}{4}\, T_3(x) + 2\, T_2(x) - \frac{3}{4}\, T_1(x) - \frac{5}{4}\, T_0(x).$$

Polinom p_3, stupnja najviše 3, koji aproksimira funkciju f na intervalu $[-1, 1]$, u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata, s težinskom funkcijom $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, dobiva se "rezanjem" ovog razvoja do uključivo polinoma T_3,

$$p_3(x) = \sum_{k=0}^{3} c_k T_k(x),$$

a pripadna greška je odrezani ostatak razvoja

$$e(x) = f(x) - p_3(x) = c_4 T_4(x).$$

Dobivamo

$$p_3(x) = -\frac{1}{4}\, T_3(x) + 2\, T_2(x) - \frac{3}{4}\, T_1(x) - \frac{5}{4}\, T_0(x) = -x^3 + 4x^2 - \frac{13}{4},$$

s greškom

$$e(x) = f(x) - p_3(x) = \frac{1}{4}\, T_4(x).$$

Za Čebiševljeve polinome vrijedi

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_k(x)| = 1, \quad k \geq 0,$$

pa je maksimalna apsolutna vrijednost greške na intervalu $[-1, 1]$ jednaka

$$\max_{x\in[-1,1]} |e(x)| = |c_4| = \frac{1}{4}.$$

6.5 Aproksimacija trigonometrijskim polinomom, Fourierov red

Zadatak 6.5.1. (NM 2009, 2. kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Zadana je funkcija
$$f(x) = 2x - 4$$
na intervalu $[0, 4]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente b_n, $n \in \mathbb{N}$, u aproksimaciji funkcije f funkcijom oblika
$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin \frac{n\pi x}{2},$$
za bilo koji $N \in \mathbb{N}$.

Uputa: Skup funkcija $\{\varphi_n(x) := \sin(n\pi x/2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonalan sustav funkcija obzirom na skalarni produkt definiran formulom
$$\langle f, g \rangle := \int_0^4 f(x) g(x)\, dx,$$
pa koeficijenti u aproksimaciji ne ovise o N.

Rješenje. Zato što su funkcije "baze" $\{\varphi_n(x) := \sin(n\pi x/2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ međusobno ortogonalne,
$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 0, \quad \text{za} \quad j \neq k,$$
za koeficijente b_n u aproksimaciji φ, funkcije f po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, vrijedi formula
$$b_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|_2^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$
neovisno o tome je li φ konačna ili beskonačna suma, tj. koeficijenti b_n ne ovise o N.

Kvadrat norme u nazivniku koeficijenta b_n je
$$\|\varphi_n\|_2^2 = \int_0^4 \sin^2 \frac{n\pi x}{2}\, dx.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, primjenom formule $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha)$, za $\alpha = n\pi x/2$, dobivamo
$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_2^2 &= \frac{1}{2} \int_0^4 \Big(1 - \cos(n\pi x)\Big)\, dx = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x)\Big) \Big|_0^4 \\ &= \frac{1}{2}\Big(4 - \frac{1}{n\pi} \sin(4n\pi) - 0 + \frac{1}{n\pi} \sin 0\Big) = 2. \end{aligned}$$

Skalarni produkt u brojniku koeficijenta b_n je
$$\langle f, \varphi_n \rangle = \int_0^4 (2x - 4) \cdot \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, parcijalnom integracijom dobivamo

$$
\begin{aligned}
\langle f, \varphi_n \rangle &= \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x - 4 & du = 2\,dx \\ dv = \sin \dfrac{n\pi x}{2}\,dx & v = -\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2} \end{array} \right\} \\
&= -(2x-4)\cdot \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^4 + \frac{4}{n\pi}\int_0^4 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= -\frac{8}{n\pi}\cos(2n\pi) - \frac{8}{n\pi}\cos 0 + \frac{8}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^4 \\
&= -\frac{16}{n\pi} + \frac{8}{(n\pi)^2}\big(\sin(2n\pi) - \sin 0\big) = -\frac{16}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Dijeljenjem s $\|\varphi_n\|_2^2$, izlazi

$$
b_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{16}{n\pi}\right) = -\frac{8}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.
$$

Uočimo još da je funkcija $f(x) = 2x - 4$ “neparna” oko polovišta $x_0 = 2$ intervala $[0,4]$, tj. vrijedi

$$
f(2-y) = -f(2+y), \quad \text{za} \quad 0 \le y \le 2,
$$

pa je aproksimacija φ, ujedno, i konačni komad Fourierovog reda funkcije f na $[0,4]$.

—— • ——

Zadatak 6.5.2. (NM 2009, 2. kolokvij, 2. zadatak, grupa B)

Zadana je funkcija

$$
f(x) = |2x - 3|
$$

na intervalu $[0,3]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente a_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, u aproksimaciji funkcije f funkcijom oblika

$$
\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos\frac{2n\pi x}{3},
$$

za bilo koji $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Uputa: Skup funkcija $\{\varphi_n(x) := \cos(2n\pi x/3) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ je ortogonalan sustav funkcija obzirom na skalarni produkt definiran formulom

$$
\langle f, g \rangle := \int_0^3 f(x) g(x)\,dx,
$$

pa koeficijenti u aproksimaciji ne ovise o N.

Rješenje. Zato što su funkcije “baze” $\{\varphi_n(x) := \cos(2n\pi x/3) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ međusobno ortogonalne,

$$
\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = 0, \quad \text{za} \quad j \neq k,
$$

za koeficijente a_n u aproksimaciji φ, funkcije f po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata, vrijedi formula

$$a_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|_2^2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

neovisno o tome je li φ konačna ili beskonačna suma, tj. koeficijenti a_n ne ovise o N.

Kvadrat norme u nazivniku koeficijenta a_n je

$$\|\varphi_n\|_2^2 = \int\limits_0^3 \cos^2 \frac{2n\pi x}{3}\, dx.$$

Za $n = 0$ izlazi

$$\|\varphi_0\|_2^2 = \int\limits_0^3 1\, dx = x \Big|_0^3 = 3.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, primjenom formule $2\cos^2\alpha = 1 + \cos(2\alpha)$, za $\alpha = 2n\pi x/3$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n\|_2^2 &= \frac{1}{2} \int\limits_0^3 \left(1 + \cos \frac{4n\pi x}{3}\right) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{4n\pi} \sin \frac{4n\pi x}{3}\right) \Bigg|_0^3 \\
&= \frac{1}{2}\left(3 + \frac{3}{4n\pi}\sin(4n\pi) - 0 - \frac{3}{4n\pi}\sin 0\right) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Skalarni produkt u brojniku koeficijenta a_n je

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \int\limits_0^3 |2x - 3| \cdot \cos \frac{2n\pi x}{3}\, dx.$$

Eliminacijom apsolutne vrijednosti, ovaj integral možemo izračunati kao sumu integrala na $[0, 3/2]$ i $[3/2, 3]$.

Umjesto toga, uočimo da su funkcija f i sve funkcije φ_n "parne", tj. simetrične obzirom na polovište $x_0 = 3/2$ intervala $[0, 3]$. Zato uvodimo supstituciju $y = x - 3/2$, odnosno, $x = y + 3/2$, s tim da je $y \in [-3/2, 3/2]$. Onda je

$$f(y + 3/2) = |2(y + 3/2) - 3| = 2|y|.$$

Primjenom adicione formule $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ izlazi

$$\begin{aligned}
\varphi_n(y + 3/2) &= \cos \frac{2n\pi(y + 3/2)}{3} = \cos\left(\frac{2n\pi y}{3} + n\pi\right) \\
&= \cos \frac{2n\pi y}{3} \cdot \cos(n\pi) - \sin \frac{2n\pi y}{3} \cdot \sin(n\pi).
\end{aligned}$$

Za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $\cos(n\pi) = (-1)^n$ i $\sin(n\pi) = 0$, pa je

$$\varphi_n(y + 3/2) = (-1)^n \cos \frac{2n\pi y}{3}.$$

Nakon supstitucije, zbog očite parnosti podintegralne funkcije, dobivamo

$$\langle f, \varphi_n \rangle = (-1)^n \int\limits_{-3/2}^{3/2} 2|y| \cdot \cos \frac{2n\pi y}{3}\, dy = (-1)^n \cdot 4 \int\limits_0^{3/2} y \cdot \cos \frac{2n\pi y}{3}\, dy.$$

Za $n = 0$ izlazi

$$\langle f, \varphi_0 \rangle = 4 \int\limits_0^{3/2} y \cdot 1 \, dy = 4 \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{3/2} = 4 \left(\frac{9}{8} - 0 \right) = \frac{9}{2}.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, parcijalnom integracijom dobivamo

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} u = y & du = dy \\ dv = \cos \dfrac{2n\pi x}{3} \, dy & v = \dfrac{3}{2n\pi} \sin \dfrac{2n\pi x}{3} \end{array} \right\}$$

$$= (-1)^n \cdot 4 \left(y \cdot \frac{3}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} \Big|_0^{3/2} - \frac{3}{2n\pi} \int\limits_0^{3/2} \sin \frac{2n\pi x}{3} \, dy \right)$$

$$= (-1)^n \cdot 4 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2n\pi} \sin(n\pi) - 0 \cdot \frac{3}{2n\pi} \sin 0 + \frac{9}{(2n\pi)^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \Big|_0^{3/2} \right)$$

$$= (-1)^n \frac{9}{(n\pi)^2} \big(\cos(n\pi) - \cos 0 \big) = (-1)^n \frac{9}{(n\pi)^2} \big((-1)^n - 1 \big)$$

$$= \frac{9}{(n\pi)^2} \big(1 + (-1)^{n+1} \big).$$

Dijeljenjem s $\|\varphi_n\|_2^2$, izlazi

$$a_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{(n\pi)^2} \big(1 + (-1)^{n+1} \big) = \frac{6}{(n\pi)^2} \big(1 + (-1)^{n+1} \big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Drugim riječima, za parne koeficijente vrijedi

$$a_0 = \frac{3}{2}, \qquad a_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

a za neparne vrijedi

$$a_{2k-1} = \frac{12}{((2k-1)\pi)^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Već smo vidjeli da je funkcija $f(x) = |2x - 3|$ "parna" oko polovišta $x_0 = 3/2$ intervala $[0, 3]$, tj. vrijedi

$$f(3/2 - y) = f(3/2 + y) = 2|y|, \quad \text{za} \quad 0 \leq y \leq 3/2,$$

pa je aproksimacija φ, ujedno, i konačni komad Fourierovog reda funkcije f na $[0, 3]$.

Zadatak 6.5.3. (NM 2019, 2. kolokvij, 2. zadatak, grupa A)

Zadana je funkcija
$$f(x) = p|x| - 2$$
na intervalu $[-\pi, \pi]$, gdje je $p \in \mathbb{R}$ zadani realni parametar. Nađite koeficijente u Fourierovom razvoju funkcije f
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$
Konvergira li Fourierov red prema $f(x)$, za svaki $x \in [-\pi, \pi]$? Argumentirajte odgovor.

Rješenje. Koeficijenti u Fourierovom razvoju funkcije f
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$
dani su formulama (može za $n \geq 0$, uz $b_0 = 0$)
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Treba izračunati ove integrale za $f(x) = p|x| - 2$. Prije računa, uočimo dvije stvari koje **skraćuju** račun. Funkcija f je **parna** na intervalu $[-\pi, \pi]$, tj. vrijedi
$$f(-x) = p|-x| - 2 = p|x| - 2 = f(x), \quad x \in [-\pi, \pi].$$
Kako je $\sin(nx)$ neparna funkcija na $[-\pi, \pi]$, za svaki $n > 0$, u izrazu za b_n
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (p|x| - 2) \sin(nx)\, dx,$$
imamo integral **neparne** funkcije na intervalu simetričnom oko nule, pa je
$$b_n = 0, \quad \text{za } n > 0.$$

Dakle, u Fourierovom razvoju ostaju samo koeficijenti a_n (parni dio razvoja). Zbog **parnosti** podintegralne funkcije na $[-\pi, \pi]$, vrijedi
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (p|x| - 2) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (px - 2) \cos(nx)\, dx.$$
Ovaj integral se računa parcijalnom integracijom (derivirati prvi faktor, integrirati drugi), što ide samo za $n > 0$. Za $n = 0$, integral se računa posebno i dobivamo
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (px - 2)\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{p}{2} x^2 - 2x \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{p}{2} \pi^2 - 2\pi \right) = p\pi - 4.$$

Za $n > 0$, funkcija $\cos(nx)$ je ortogonalna na konstante. Zato možemo zanemariti -2 u prvom faktoru. Onda dobivamo

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2p}{\pi} \int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos(nx)\,dx & v = \dfrac{1}{n}\sin(nx) \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{2p}{\pi} \left(\frac{x}{n}\sin(nx) \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin(nx)\,dx \right) = \big\{ \text{granice: } \sin(n\pi) = \sin 0 = 0 \big\} \\
&= -\frac{2p}{n\pi} \int_0^\pi \sin(nx)\,dx \\
&= -\frac{2p}{n\pi} \left(-\frac{1}{n}\cos(nx) \Big|_0^\pi \right) = \big\{ \text{granice: } \cos(n\pi) = (-1)^n,\ \cos 0 = 1 \big\} \\
&= \frac{2p}{n^2\pi} \big((-1)^n - 1\big).
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ paran}, \\ -\dfrac{4p}{n^2\pi}, & n \text{ neparan}. \end{cases}$$

Zbog parnosti funkcije f, u rubovima intervala vrijedi $f(-\pi) = f(\pi)$. Zato je periodičko proširenje od f na cijeli $\mathbb{R}$ **neprekidna** funkcija (nema skokova). Prema Dirichletovom teoremu, Fourierov red **konvergira** prema $f(x)$, za svaki $x \in [-\pi, \pi]$.

—— • ——

Zadatak 6.5.4. (NM 2019, 2. kolokvij, 2. zadatak, grupa B)

Zadana je funkcija

$$f(x) = px^2 - 3$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$, gdje je $p \in \mathbb{R}$ zadani realni parametar. Nađite koeficijente u Fourierovom razvoju funkcije f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big).$$

Konvergira li Fourierov red prema $f(x)$, za svaki $x \in [-\pi, \pi]$? Argumentirajte odgovor.

Rješenje. Koeficijenti u Fourierovom razvoju funkcije f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big).$$

dani su formulama (može za $n \geq 0$, uz $b_0 = 0$)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Treba izračunati ove integrale za $f(x) = px^2 - 3$. Prije računa, uočimo dvije stvari koje **skraćuju** račun. Funkcija f je **parna** na intervalu $[-\pi, \pi]$, tj. vrijedi

$$f(-x) = p(-x)^2 - 3 = px^2 - 3 = f(x), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Kako je $\sin(nx)$ neparna funkcija na $[-\pi, \pi]$, za svaki $n > 0$, u izrazu za b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (px^2 - 3) \sin(nx)\, dx,$$

imamo integral **neparne** funkcije na intervalu simetričnom oko nule, pa je

$$b_n = 0, \quad \text{za } n > 0.$$

Dakle, u Fourierovom razvoju ostaju samo koeficijenti a_n (parni dio razvoja). Zbog **parnosti** podintegralne funkcije na $[-\pi, \pi]$, vrijedi

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (px^2 - 3) \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (px^2 - 3) \cos(nx)\, dx.$$

Ovaj integral se računa parcijalnom integracijom (derivirati prvi faktor, integrirati drugi), što ide samo za $n > 0$. Za $n = 0$, integral se računa posebno i dobivamo

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} (px^2 - 3)\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{p}{3} x^3 - 3x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{p}{3} \pi^3 - 3\pi \right) = \frac{2}{3} p\pi^2 - 6.$$

Za $n > 0$, funkcija $\cos(nx)$ je ortogonalna na konstante. Zato možemo zanemariti -3 u prvom faktoru. Onda dobivamo

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2p}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\, dx \\ dv = \cos(nx)\, dx & v = \dfrac{1}{n} \sin(nx) \end{matrix} \right\} \\
&= \frac{2p}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{0}^{\pi} x \sin(nx)\, dx \right) = \left\{ \text{granice: } \sin(n\pi) = \sin 0 = 0 \right\} \\
&= -\frac{4p}{n\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin(nx)\, dx & v = -\dfrac{1}{n} \cos(nx) \end{matrix} \right\} \\
&= -\frac{4p}{n\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\, dx \right) = \left\{ \text{gornja granica: } \cos(n\pi) = (-1)^n \right\} \\
&= \frac{4p}{n^2\pi} \left((-1)^n \pi - \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\, dx \right) \\
&= \frac{4p}{n^2\pi} \left((-1)^n \pi - \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} \right) = \left\{ \text{granice: } \sin(n\pi) = \sin 0 = 0 \right\} \\
&= \frac{(-1)^n \cdot 4p}{n^2}.
\end{aligned}$$

Konačni rezultat je

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot 4p}{n^2}.$$

Zbog parnosti funkcije f, u rubovima intervala vrijedi $f(-\pi) = f(\pi)$. Zato je periodičko proširenje od f na cijeli $\mathbb{R}$ **neprekidna** funkcija (nema skokova). Prema Dirichletovom teoremu, Fourierov red **konvergira** prema $f(x)$, za svaki $x \in [-\pi, \pi]$.

7 Numeričko integriranje funkcija

7.1 Produljena trapezna i produljena Simpsonova formula

Zadatak 7.1.1. (NM 2012, 2. kolokvij, 3. zadatak, grupa C)

Zadan je integral (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$\int_0^1 (x-4)\,\exp\left(\frac{4}{3}x+1\right)\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

—— • ——

Uvod u rješenje — derivacije za ocjenu greške, egzaktna vrijednost integrala. Za ocjenu greške i nalaženje broja podintervala treba naći prvih 5 derivacija funkcije f. Uočimo da funkciju f možemo zapisati u obliku produkta $f = g \cdot h$, uz oznake

$$g(x) = ax+b, \quad h(x) = \exp(cx+d) = e^{cx+d},$$

s tim da za $a \neq 0$ i $c \neq 0$, funkcije g i h nisu konstantne.

Bilo koju derivaciju $f^{(n)}$, za $n \geq 1$, najlakše je izračunati Leibnizovim pravilom za derivaciju produkta,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = (g\cdot h)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)\cdot h^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ax+b)^{(k)} \cdot \left(e^{cx+d}\right)^{(n-k)}. \end{aligned}$$

Ako je $a \neq 0$ i $c \neq 0$, u ovoj sumi ostaju samo **prva dva** člana — za $k = 0$ i $k = 1$. Za bilo koji $n \geq 1$, onda dobivamo

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (ax+b)\cdot\left(e^{cx+d}\right)^{(n)} + n\cdot(ax+b)'\cdot\left(e^{cx+d}\right)^{(n-1)} \\ &= (ax+b)\cdot c^n e^{cx+d} + na\cdot c^{n-1}e^{cx+d} \\ &= c^{n-1}\big(c(ax+b)+na\big)\,e^{cx+d} \\ &= c^n\left(ax+b+\frac{na}{c}\right)e^{cx+d}. \end{aligned}$$

Odavde odmah slijedi da jednadžba $f^{(n)}(x) = 0$ ima točno **jedno** realno rješenje

$$x_0^{(n)} = -\frac{1}{a}\left(b+\frac{na}{c}\right) = -\left(\frac{b}{a}+\frac{n}{c}\right).$$

Dakle, za zadane parametre a, b, c, d i $n \geq 1$, kad računamo

$$M_{n-1} = \max_{x\in[0,1]} |f^{(n-1)}(x)|,$$

treba još **provjeriti** je li $x_0^{(n)} \in [0,1]$.

Egzaktnu vrijednost integrala najlakše dobivamo parcijalnom integracijom, tako da deriviramo faktor $(ax+b)$, pa ostaje samo eksponencijalna funkcija od x.

Integracijom, do na aditivnu konstantu, dobivamo

$$\int f(x)\,dx = \int (ax+b)\,e^{cx+d}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = ax+b & du = a \\ dv = e^{cx+d}\,dx & v = \dfrac{1}{c}\,e^{cx+d} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c}\,(ax+b)\,e^{cx+d} - \frac{a}{c}\int e^{cx+d}\,dx \\ &= \frac{1}{c}\,(ax+b)\,e^{cx+d} - a\left(\frac{1}{c}\right)^2 e^{cx+d} \\ &= \frac{1}{c}\left(ax+b-\frac{a}{c}\right)e^{cx+d}. \end{aligned}$$

Egzaktna vrijednost integrala je

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 (ax+b)\,e^{cx+d}\,dx &= \frac{1}{c}\left(ax+b-\frac{a}{c}\right)e^{cx+d}\,\bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{c}\left(a+b-\frac{a}{c}\right)e^{c+d} - \frac{1}{c}\left(b-\frac{a}{c}\right)e^{d}. \end{aligned}$$

——— • ———

Rješenje. Za ocjenu greške i nalaženje broja podintervala treba naći

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|, \quad M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|.$$

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-4)\,\exp\left(\frac{4}{3}x+1\right) = (x-4)\,e^{\frac{4}{3}x+1} \\ f'(x) &= \left(1+(x-4)\cdot\frac{4}{3}\right)e^{\frac{4}{3}x+1} = \frac{4}{3}\left(x-\frac{13}{4}\right)e^{\frac{4}{3}x+1} \\ f''(x) &= \frac{4}{3}\left(1+\left(x-\frac{13}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}\right)e^{\frac{4}{3}x+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)e^{\frac{4}{3}x+1} \\ f'''(x) &= \left(\frac{4}{3}\right)^2\left(1+\left(x-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}\right)e^{\frac{4}{3}x+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^3\left(x-\frac{7}{4}\right)e^{\frac{4}{3}x+1} \\ f^{(4)}(x) &= \left(\frac{4}{3}\right)^3\left(1+\left(x-\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}\right)e^{\frac{4}{3}x+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^4(x-1)\,e^{\frac{4}{3}x+1} \\ f^{(5)}(x) &= \left(\frac{4}{3}\right)^4\left(1+(x-1)\cdot\frac{4}{3}\right)e^{\frac{4}{3}x+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^5\left(x-\frac{1}{4}\right)e^{\frac{4}{3}x+1}. \end{aligned}$$

Za M_2 u obzir dolaze rubovi intervala 0, 1, i nultočke treće derivacije f''' unutar intervala $[0,1]$. Iz $f'''(x)=0$ dobivamo

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3\left(x-\frac{7}{4}\right)e^{\frac{4}{3}x+1} = 0 \quad\Rightarrow\quad x-\frac{7}{4} = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{7}{4}.$$

Vidimo da f''' nema nultočaka unutar intervala $[0, 1]$. Onda imamo

$$f''(0) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(-\frac{5}{2}\right) e^1 = -\frac{40}{9}\, e = -12.0812525709$$

$$f''(1) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{2}\right) e^{\frac{4}{3}+1} = -\frac{8}{3}\, e^{7/3} = -27.4993560035,$$

pa je

$$M_2 = |f''(1)| = 27.4993560035.$$

Za broj podintervala n_T za produljenu trapeznu formulu, uz $b-a = 1$ i $\varepsilon = 10^{-4}$, dobivamo

$$n_T \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}} = 151.3807451526 \quad \Longrightarrow \quad n_T = 152.$$

Produljena trapezna formula s $n_T = 152$ podintervala ima korak $h_T = 1/152$. Približna vrijednost integrala je

$$I_T = \frac{h_T}{2}\left(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{151} + f_{152}\right) = -19.3194171201.$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 0, 1, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[0, 1]$. Iz $f^{(5)}(x) = 0$ dobivamo

$$\left(\frac{4}{3}\right)^5 \left(x - \frac{1}{4}\right) e^{\frac{4}{3}x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

Vidimo da $f^{(5)}$ **ima** nultočku $1/4$ unutar intervala $[0, 1]$. Onda imamo

$$f^{(4)}(0) = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot (-1) \cdot e^1 = -\frac{256}{81}\, e = -8.5911129393$$

$$f^{(4)}(1/4) = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{4} - 1\right) e^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}+1} = -\frac{64}{27}\, e^{4/3} = -8.9923979726$$

$$f^{(4)}(1) = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot 0 \cdot e^{\frac{4}{3}+1} = 0,$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(1/4)| = 8.9923979726.$$

Za broj podintervala n_S za produljenu Simpsonovu formulu, uz $b - a = 1$ i $\varepsilon = 10^{-4}$, dobivamo

$$n_S \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = 4.7277091795 \quad \Longrightarrow \quad n_S = 6.$$

Produljena Simpsonova formula s $n_S = 6$ podintervala ima korak $h_S = 1/6$. Pripadna tablica čvorova i funkcijskih vrijednosti:

i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	0.0000000000	−10.8731273138
1	0.1666666667	−13.0131055505
2	0.3333333333	−15.5448194469
3	0.5000000000	−18.5307151766
4	0.6666666667	−22.0400597049
5	0.8333333333	−26.1484684534
6	1.0000000000	−30.9367755040

Približna vrijednost integrala je

$$I_S = \frac{h_S}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6\right) = -19.3193787691.$$

Egzaktnu vrijednost integrala najlakše dobivamo parcijalnom integracijom, tako da deriviramo faktor $(x+3)$, pa ostaje samo eksponencijalna funkcija od x.

Integracijom, do na aditivnu konstantu, dobivamo

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int (x-4)\,e^{\frac{4}{3}x+1}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x-4 & du = 1 \\ dv = e^{\frac{4}{3}x+1}\,dx & v = \frac{3}{4}\,e^{\frac{4}{3}x+1} \end{matrix}\right\} \\
&= \frac{3}{4}\,(x-4)\,e^{\frac{4}{3}x+1} - \frac{3}{4}\int e^{\frac{4}{3}x+1}\,dx \\
&= \frac{3}{4}\,(x-4)\,e^{\frac{4}{3}x+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 e^{\frac{4}{3}x+1} \\
&= \frac{3}{4}\left(x - \frac{19}{4}\right) e^{\frac{4}{3}x+1}.
\end{aligned}$$

Egzaktna vrijednost integrala je

$$\begin{aligned}
I = \int_0^1 (x-4)\,e^{\frac{4}{3}x+1}\,dx &= \frac{3}{4}\left(x - \frac{19}{4}\right) e^{\frac{4}{3}x+1}\,\Big|_0^1 \\
&= \frac{3}{4}\left(1 - \frac{19}{4}\right) e^{\frac{4}{3}+1} - \frac{3}{4}\left(-\frac{19}{4}\right) e^{1} \\
&= \frac{57}{16}\,e - \frac{45}{16}\,e^{7/3} = -19.3193480211.
\end{aligned}$$

Prave vrijednosti pogrešaka za I_S i I_T su

$$\begin{aligned}
I - I_S &= 0.0000307480 = 3.07480 \cdot 10^{-5}, \\
I - I_T &= 0.0000690990 = 6.90990 \cdot 10^{-5}.
\end{aligned}$$

—— • ——

Zadatak 7.1.2. (NM 2011, popravni kolokvij, 5. zadatak, grupa A)

Zadan je integral

$$\int_2^3 (2x-5)^2 \ln x\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

Rješenje. Za ocjenu greške i nalaženje broja podintervala treba naći

$$M_2 = \max_{x\in[2,3]} |f''(x)|, \quad M_4 = \max_{x\in[2,3]} |f^{(4)}(x)|.$$

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned}
f(x) &= (2x-5)^2 \ln x \\
f'(x) &= 4(2x-5)\ln x + \frac{(2x-5)^2}{x} = 8x\ln x - 20\ln x + 4x - 20 + \frac{25}{x} \\
&= \frac{(2x-5)(4x\ln x + 2x - 5)}{x} \\
f''(x) &= 8(\ln x + 1) - \frac{20}{x} + 4 - \frac{25}{x^2} = 8\ln x + 12 - \frac{20}{x} - \frac{25}{x^2} \\
&= \frac{8x^2\ln x + 12x^2 - 20x - 25}{x^2} \\
f'''(x) &= \frac{8}{x} + \frac{20}{x^2} + \frac{50}{x^3} = 2\left(\frac{4}{x} + \frac{10}{x^2} + \frac{25}{x^3}\right) = 2\,\frac{4x^2+10x+25}{x^3} \\
f^{(4)}(x) &= 2\left(-\frac{4}{x^2} - \frac{20}{x^3} - \frac{75}{x^4}\right) = -2\left(\frac{4}{x^2} + \frac{20}{x^3} + \frac{75}{x^4}\right) = -2\,\frac{4x^2+20x+75}{x^4} \\
f^{(5)}(x) &= 2\left(\frac{8}{x^3} + \frac{60}{x^4} + \frac{300}{x^5}\right) = 8\left(\frac{2}{x^3} + \frac{15}{x^4} + \frac{75}{x^5}\right) = 8\,\frac{2x^2+15x+75}{x^5}.
\end{aligned}$$

Za M_2 u obzir dolaze rubovi intervala 2, 3, i nultočke treće derivacije f''' unutar intervala $[2,3]$. Iz oblika f''' odmah slijedi da za $x \geq 0$ vrijedi $f'''(x) > 0$, pa f''' nema nultočaka unutar intervala $[2,3]$. Onda imamo

$$\begin{aligned}
f''(2) &= 8\ln 2 + 12 - \frac{20}{2} - \frac{25}{4} = 8\ln 2 - \frac{17}{4} = 1.2951774445 \\
f''(3) &= 8\ln 3 + 12 - \frac{20}{3} - \frac{25}{9} = 8\ln 3 + \frac{23}{9} = 11.3444538649,
\end{aligned}$$

pa je

$$M_2 = |f''(3)| = 11.3444538649.$$

Za broj podintervala n_T za produljenu trapeznu formulu, uz $b-a=1$ i $\varepsilon = 10^{-4}$, dobivamo

$$n_T \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}} = 97.2301987763 \quad \Longrightarrow \quad n_T = 98.$$

Produljena trapezna formula s $n_T = 98$ podintervala ima korak $h_T = 1/98$. Približna vrijednost integrala je

$$I_T = \frac{h_T}{2}\left(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{97} + f_{98}\right) = 0.3014326279.$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 2, 3, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[2,3]$. Iz oblika $f^{(5)}$ odmah slijedi da za $x \geq 0$ vrijedi $f^{(5)}(x) > 0$, pa $f^{(5)}$ nema nultočaka unutar intervala $[2, 3]$. Onda imamo

$$f^{(4)}(2) = -2\left(\frac{4}{4} + \frac{20}{8} + \frac{75}{16}\right) = -\frac{131}{8} = -16.3750000000$$

$$f^{(4)}(3) = -2\left(\frac{4}{9} + \frac{20}{27} + \frac{75}{81}\right) = -\frac{38}{9} = -4.2222222222,$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(2)| = 16.375.$$

Za broj podintervala n_S za produljenu Simpsonovu formulu, uz $b - a = 1$ i $\varepsilon = 10^{-4}$, dobivamo

$$n_S \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = 5.4919579191 \quad\Longrightarrow\quad n_S = 6.$$

Produljena Simpsonova formula s $n_S = 6$ podintervala ima korak $h_S = 1/6$. Pripadna tablica čvorova i funkcijskih vrijednosti:

i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	2.0000000000	0.6931471806
1	2.1666666667	0.3436399503
2	2.3333333333	0.0941442067
3	2.5000000000	0.0000000000
4	2.6666666667	0.1089810281
5	2.8333333333	0.4628683888
6	3.0000000000	1.0986122887

Približna vrijednost integrala je

$$I_S = \frac{h_S}{3}\Big(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6\Big) = 0.3013357386.$$

Egzaktnu vrijednost integrala najlakše dobivamo parcijalnom integracijom, tako da deriviramo $\ln x$, pa ostaje racionalna funkcija od x. Ne isplati se "prerano" rastaviti

$$f(x) = (2x-5)^2 \ln x$$

po potencijama od x, jer onda treba integrirati $x^k \ln x$, za $k = 0, 1, 2$.

Integracijom, do na konstantu, dobivamo

$$\int f(x)\,dx = \int (2x-5)^2 \ln x\,dx = \left\{\begin{array}{ll} du = (2x-5)^2\,dx & u = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x-5)^3}{3} \\[2ex] v = \ln x & dv = \dfrac{1}{x}\,dx \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left((2x-5)^3 \ln x - \int \frac{(2x-5)^3}{x}\,dx\right).$$

Sad razvijemo $(2x-5)^3$ po potencijama od x

$$(2x-5)^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$$

i izračunamo integral na desnoj strani

$$\int \frac{(2x-5)^3}{x}\,dx = \int \left(8x^2 - 60x + 150 - \frac{125}{x}\right) dx$$
$$= \frac{8}{3}\,x^3 - \frac{60}{2}\,x^2 + 150x - 125\ln x = \frac{8}{3}\,x^3 - 30x^2 + 150x - 125\ln x.$$

Kad to uvrstimo u traženi integral funkcije f, dobivamo

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{6}\left(\big(8x^3 - 60x^2 + 150x - 125\big)\ln x - \frac{8}{3}\,x^3 + 30x^2 - 150x + 125\ln x\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\big(4x^3 - 30x^2 + 75x\big)\ln x - \frac{4}{3}\,x^3 + 15x^2 - 75x\right).$$

Egzaktna vrijednost integrala je

$$I = \int_2^3 (2x-5)^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}\left(\big(4x^3 - 30x^2 + 75x\big)\ln x - \frac{4}{3}\,x^3 + 15x^2 - 75x\right)\Bigg|_2^3$$
$$= \frac{1}{3}\Bigg(\big(4\cdot 3^3 - 30\cdot 3^2 + 75\cdot 3\big)\ln 3 - \frac{4}{3}\cdot 3^3 + 15\cdot 3^2 - 75\cdot 3$$
$$- \big(4\cdot 2^3 - 30\cdot 2^2 + 75\cdot 2\big)\ln 2 + \frac{4}{3}\cdot 2^3 - 15\cdot 2^2 + 75\cdot 2\Bigg)$$
$$= 21\ln 3 - \frac{62}{3}\ln 2 - \frac{76}{9} = 0.3013718860.$$

Prave vrijednosti pogrešaka za I_S i I_T su

$$\begin{aligned} I - I_S &= 0.0000361474 = 3.61474\cdot 10^{-5}, \\ I - I_T &= -0.0000607419 = -6.07419\cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

—— • ——

Zadatak 7.1.3. (NM 2011, 2. kolokvij, 3. zadatak, grupa B)

Zadan je integral

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x+3}}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

Rješenje. Za ocjenu greške i nalaženje broja podintervala treba naći

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|, \quad M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|.$$

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x+1}{\sqrt{x+3}}\\
f'(x) &= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x+3}} - (2x+1)\cdot\frac{1}{2(x+3)^{3/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+11}{(x+3)^{3/2}}\\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(x+3)^{3/2}} - (2x+11)\cdot\frac{3}{2(x+3)^{5/2}}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2x+21}{(x+3)^{5/2}}\\
f'''(x) &= -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{(x+3)^{5/2}} - (2x+21)\cdot\frac{5}{2(x+3)^{7/2}}\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2x+31}{(x+3)^{7/2}}\\
f^{(4)}(x) &= \frac{3}{8}\left(\frac{2}{(x+3)^{7/2}} - (2x+31)\cdot\frac{7}{2(x+3)^{9/2}}\right) = -\frac{15}{16}\cdot\frac{2x+41}{(x+3)^{9/2}}\\
f^{(5)}(x) &= -\frac{15}{16}\left(\frac{2}{(x+3)^{9/2}} - (2x+41)\cdot\frac{9}{2(x+3)^{11/2}}\right) = \frac{105}{32}\cdot\frac{2x+51}{(x+3)^{11/2}}.
\end{aligned}$$

Za M_2 u obzir dolaze rubovi intervala 0, 1, i nultočke treće derivacije f''' unutar intervala $[0,1]$. Iz $f'''(x)=0$ dobivamo

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2x+31}{(x+3)^{7/2}} = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x+31=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{31}{2}.$$

Vidimo da f''' nema nultočaka unutar intervala $[0,1]$. Onda imamo

$$\begin{aligned}
f''(0) &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{21}{3^{5/2}} = -\frac{7}{36}\sqrt{3} = -0.3367876570\\
f''(1) &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{23}{4^{5/2}} = -\frac{23}{128} = -0.1796875000,
\end{aligned}$$

pa je

$$M_2 = |f''(0)| = 0.3367876570.$$

Za broj podintervala n_T za produljenu trapeznu formulu, uz $b-a=1$ i $\varepsilon=10^{-5}$, dobivamo

$$n_T \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}} = 52.9770120766 \quad\Longrightarrow\quad n_T = 53.$$

Produljena trapezna formula s $n_T = 53$ podintervala ima korak $h_T = 1/53$. Približna vrijednost integrala je

$$I_T = \frac{h_T}{2}\left(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{52} + f_{53}\right) = 1.0589642149.$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 0, 1, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[0,1]$. Iz $f^{(5)}(x)=0$ dobivamo

$$\frac{105}{32}\cdot\frac{2x+51}{(x+3)^{11/2}} = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x+51=0 \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{51}{2}.$$

Vidimo da $f^{(5)}$ nema nultočaka unutar intervala $[0,1]$. Onda imamo

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(0) &= -\frac{15}{16}\cdot\frac{41}{3^{9/2}} = -\frac{205}{1296}\sqrt{3} = -0.2739740861\\
f^{(4)}(1) &= -\frac{15}{16}\cdot\frac{43}{4^{9/2}} = -\frac{645}{8192} = -0.0787353516,
\end{aligned}$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(0)| = 0.2739740861.$$

Za broj podintervala n_S za produljenu Simpsonovu formulu, uz $b - a = 1$ i $\varepsilon = 10^{-5}$, dobivamo

$$n_S \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = 3.5124426782 \quad \Longrightarrow \quad n_S = 4.$$

Produljena Simpsonova formula s $n_S = 4$ podintervala ima korak $h_S = 1/4$. Pripadna tablica čvorova i funkcijskih vrijednosti:

i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	0.00	0.5773502692
1	0.25	0.8320502943
2	0.50	1.0690449676
3	0.75	1.2909944487
4	1.00	1.5000000000

Približna vrijednost integrala je

$$I_S = \frac{h_S}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right) = 1.0589682647.$$

Egzaktnu vrijednost integrala najlakše dobivamo rastavom funkcije f na potencije od $x + 3$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3)-5}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3} - \frac{5}{\sqrt{x+3}}.$$

Integracijom, do na konstantu, dobivamo

$$\int f(x)\,dx = 2 \cdot \frac{2}{3}\,(x+3)^{3/2} - 5 \cdot \frac{2}{1}\,\sqrt{x+3} = 2\left(\frac{2}{3}\,(x+3) - 5\right)\sqrt{x+3}$$
$$= \frac{2}{3}\,(2x-9)\,\sqrt{x+3}.$$

Egzaktna vrijednost integrala je

$$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x+3}}\,dx = \frac{2}{3}\,(2x-9)\,\sqrt{x+3}\,\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(-7\sqrt{4} + 9\sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\left(9\sqrt{3} - 14\right) = 6\sqrt{3} - \frac{28}{3} = 1.0589715121.$$

Prave vrijednosti pogrešaka za I_S i I_T su

$$I - I_S = 0.0000032473 = 3.2473 \cdot 10^{-6},$$
$$I - I_T = 0.0000072972 = 7.2972 \cdot 10^{-6}.$$

—— • ——

Zadatak 7.1.4. (NM 2008, 2. kolokvij, 3. zadatak, grupa C)

Zadan je integral

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-3}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

Rješenje. Za ocjenu greške i nalaženje broja podintervala treba naći

$$M_2 = \max_{x\in[0,\pi/2]} |f''(x)|, \quad M_4 = \max_{x\in[0,\pi/2]} |f^{(4)}(x)|.$$

Funkcija f i njezine derivacije su redom

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \cos x \\
f'(x) &= e^x(\cos x - \sin x) \\
f''(x) &= e^x(\cos x - 2\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x \\
f'''(x) &= -2e^x(\sin x + \cos x) \\
f^{(4)}(x) &= -2e^x(\sin x + 2\cos x - \sin x) = -4e^x \cos x \\
f^{(5)}(x) &= -4e^x(\cos x - \sin x).
\end{aligned}$$

Uočimo da je $f^{(4)}(x) = -4f(x)$, što je zgodno za računanje primitivne funkcije i egzaktne vrijednosti integrala.

Za M_2 u obzir dolaze rubovi intervala 0, $\pi/2$, i nultočke treće derivacije f''' unutar intervala $[0, \pi/2]$. Iz $f'''(x) = 0$, zbog $e^x \neq 0$, dobivamo

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vidimo da f''' nema nultočaka unutar intervala $[0, \pi/2]$. Onda imamo

$$\begin{aligned}
f''(0) &= -2e^0 \sin 0 = 0 \\
f''(\pi/2) &= -2e^{\pi/2} \sin(\pi/2) = -9.6209547619,
\end{aligned}$$

pa je

$$M_2 = |f''(\pi/2)| = 9.6209547619.$$

Za broj podintervala n_T za produljenu trapeznu formulu, uz $b - a = \pi/2$ i $\varepsilon = 10^{-3}$, dobivamo

$$n_T \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}} = 55.7440192305 \quad \Longrightarrow \quad n_T = 56.$$

Produljena trapezna formula s $n_T = 56$ podintervala ima korak $h_T = \pi/112$. Približna vrijednost integrala je

$$I_T = \frac{h_T}{2}\left(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{55} + f_{56}\right) = 1.9048577240.$$

Za M_4 u obzir dolaze rubovi intervala 0, $\pi/2$, i nultočke pete derivacije $f^{(5)}$ unutar intervala $[0, \pi/2]$. Iz $f^{(5)}(x) = 0$, zbog $e^x \neq 0$, dobivamo

$$\cos x - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vidimo da je $x^{(5)} = \pi/4$ jedina nultočka od $f^{(5)}$ unutar intervala $[0, \pi/2]$. Onda imamo

$$\begin{aligned} f^{(4)}(0) &= -4e^0 \cos 0 = -4 \\ f^{(4)}(\pi/4) &= -4e^{\pi/4} \cos(\pi/4) = -6.2035327877 \\ f^{(4)}(\pi/2) &= -4e^{\pi/2} \cos(\pi/2) = 0, \end{aligned}$$

pa je

$$M_4 = |f^{(4)}(\pi/4)| = 6.2035327877.$$

Za broj podintervala n_S za produljenu Simpsonovu formulu, uz $b - a = \pi/2$ i $\varepsilon = 10^{-3}$, dobivamo

$$n_S \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = 4.2608033495 \quad \Longrightarrow \quad n_S = 6.$$

Produljena Simpsonova formula s $n_S = 6$ podintervala ima korak $h_S = \pi/12$. Pripadna tablica čvorova i funkcijskih vrijednosti:

i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	0.0000000000	1.0000000000
1	0.2617993878	1.2549944568
2	0.5235987756	1.4619303784
3	0.7853981634	1.5508831969
4	1.0471975512	1.4248269541
5	1.3089969390	0.9582666590
6	1.5707963268	0.0000000000

Približna vrijednost integrala je

$$I_S = \frac{h_S}{3} \bigg(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6 \bigg) = 1.9050348997.$$

Egzaktnu vrijednost integrala najlakše dobivamo na sljedeći način. Iz $f^{(4)}(x) = -4f(x)$ integracijom slijedi da je

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\,f^{(3)}(x) = \frac{1}{2}\,e^x(\sin x + \cos x),$$

do na konstantu. Ovo izlazi i dvostrukom parcijalnom integracijom.

Egzaktna vrijednost integrala je

$$\begin{aligned} I = \int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx &= \frac{1}{2}\,e^x(\sin x + \cos x)\,\bigg|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\bigg(e^{\pi/2}(\sin(\pi/2) + \cos(\pi/2)) - e^0(\sin 0 + \cos 0) \bigg) \\ &= \frac{1}{2}\bigg(e^{\pi/2} - 1 \bigg) = 1.9052386905. \end{aligned}$$

Prave vrijednosti pogrešaka za I_S i I_T su

$$\begin{aligned} I - I_S &= 0.0002037907 = 2.037907 \cdot 10^{-4}, \\ I - I_T &= 0.0003809665 = 3.809665 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

8 Razne težinske integracijske formule

8.1 Težinske Newton–Cotesove i Gaussove formule s 2 parametra

Zadatak 8.1.1. (NM 2009, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa C)

Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{1/3} f(x)\,dx \approx w_0 f(1/4) + w_1 f(3/4),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 x^{1/3} f(x)\,dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{2/3}$ i nađite prave greške.

Rješenje. Označimo s $I_{NC}(f)$ traženu težinsku Newton–Cotesovu integracijsku formulu

$$\int_0^1 x^{1/3} f(x)\,dx \approx I_{NC}(f) := w_0 f\Big(\frac{1}{4}\Big) + w_1 f\Big(\frac{3}{4}\Big),$$

a s $I_G(f)$ traženu Gaussovu integracijsku formulu reda 1

$$\int_0^1 x^{1/3} f(x)\,dx \approx I_G(f) := \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Obje formule imaju po 2 nepoznata parametra. Njih je najlakše odrediti izravno iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1. To vrijedi i za Gaussovu formulu reda 1 — **nema** smisla tražiti ortogonalni polinom p_1, stupnja 1, obzirom na zadanu težinsku funkciju w. Izravni put je bitno **lakši**.

Za računanje je najlakše uzeti standardnu bazu potencija u prostoru polinoma

$$s_n(x) = x^n, \quad n \geq 0.$$

Prednost te baze je da se poništava u lijevom rubu intervala.

Za uvjete egzaktnosti i provjeru polinomnog stupnja egzaktnosti, trebamo izračunati pripadne egzaktne težinske integrale

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^1 x^{1/3} s_n(x)\,dx = \int_0^1 x^{1/3} x^n\,dx = \int_0^1 x^{n+1/3}\,dx = \frac{1}{n+4/3}\, x^{n+4/3}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{n+4/3} = \frac{3}{3n+4}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Potrebne vrijednosti su

$$I_0 = \frac{3}{4} = 0.7500000000, \quad I_1 = \frac{3}{7} = 0.4285714286, \quad I_2 = \frac{3}{10} = 0.3000000000,$$

Zadnji integral I_2 služi samo za provjeru polinomnog stupnja egzaktnosti.

Za Newton–Cotesovu formulu, iz uvjeta egzaktnosti $I_{NC}(s_n) = I_n$, za $n = 0, 1$, dobivamo linearni sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} w_0 + \quad w_1 &= I_0 = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\, w_0 + \frac{3}{4}\, w_1 &= I_1 = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Eliminacijom w_0 iz druge jednadžbe i sređivanjem, izlazi

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) w_1 &= \frac{3}{7} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \\ \frac{3-1}{4} w_1 &= \frac{48-21}{7 \cdot 16} \\ w_1 &= \frac{27}{56} = 0.4821428571. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe dobivamo težinu w_0

$$w_0 = \frac{3}{4} - \frac{27}{56} = \frac{42-27}{56} = \frac{15}{56} = 0.2678571429.$$

Tražena Newton–Cotesova integracijska formula ima oblik

$$I_{NC}(f) = \frac{15}{56}\, f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{27}{56}\, f\left(\frac{3}{4}\right).$$

U decimalnim brojevima je

$$I_{NC}(f) = 0.2678571429 \cdot f(0.2500000000) + 0.4821428571 \cdot f(0.7500000000).$$

Znamo da je formula $I_{NC}(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1. Provjerimo još egzaktnost formule za $s_2(x) = x^2$. Egzaktna vrijednost integrala je

$$I_2 = \frac{3}{10}.$$

U decimalnim brojevima, egzaktna vrijednost, aproksimacija i greška su

$$I_2 = 0.3000000000, \quad I_{NC}(s_2) = 0.2879464286, \quad I_2 - I_{NC}(s_2) = 0.0120535714 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I_{NC}(f)$ je $d = 1$.

Za Gaussovu formulu, iz uvjeta egzaktnosti $I_G(s_n) = I_n$, za $n = 0, 1$, dobivamo nelinearni sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_1 \quad &= I_0 = \frac{3}{4} \\ \widetilde{w}_1 x_1 &= I_1 = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe odmah čitamo težinu

$$\widetilde{w}_1 = \frac{3}{4} = 0.7500000000,$$

a dijeljenjem druge jednadžbe s prvom **lako** dobivamo čvor

$$x_1 = \frac{4}{7} = 0.5714285714.$$

Tražena Gaussova integracijska formula ima oblik

$$I_G(f) = \frac{3}{4}\, f\left(\frac{4}{7}\right).$$

U decimalnim brojevima je

$$I_G(f) = 0.7500000000 \cdot f(0.5714285714).$$

Znamo da je Gaussova formula $I_G(f)$, reda 1, egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1. Provjerimo još egzaktnost formule za $s_2(x) = x^2$. U decimalnim brojevima, egzaktna vrijednost, aproksimacija i greška su

$$I_2 = 0.3000000000, \quad I_G(s_2) = 0.2448979592, \quad I_2 - I_G(s_2) = 0.0551020408 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I_G(f)$ je $d = 1$.

Za $f(x) = x^{2/3}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \int_0^1 x^{1/3}\, f(x)\, dx = \int_0^1 x^{1/3}\, x^{2/3}\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Približna vrijednost i pripadna greška po Newton–Cotesovoj formuli su

$$I_{NC}(f) = 0.5042993371, \quad I_f - I_{NC}(f) = -0.0042993371 = -4.2993371 \cdot 10^{-3},$$

a po Gaussovoj formuli su

$$I_G(f) = 0.5164590566, \quad I_f - I_G(f) = -0.0164590566 = -1.64590566 \cdot 10^{-2}.$$

—— • ——

Zadatak 8.1.2. (NM 2010, popravni kolokvij, 5. zadatak, grupa C)

Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 e^{-x}\, f(x)\, dx \approx w_0 f(1/5) + w_1 f(2/3),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 e^{-x}\, f(x)\, dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \cos(\pi x/2)$ i nađite prave greške.

Rješenje. Označimo s $I_{NC}(f)$ traženu težinsku Newton–Cotesovu integracijsku formulu

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)\, dx \approx I_{NC}(f) := w_0 f\Big(\frac{1}{5}\Big) + w_1 f\Big(\frac{2}{3}\Big),$$

a s $I_G(f)$ traženu Gaussovu integracijsku formulu reda 1

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)\, dx \approx I_G(f) := \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Obje formule imaju po 2 nepoznata parametra. Njih je najlakše odrediti izravno iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1. To vrijedi i za Gaussovu formulu reda 1 — **nema** smisla tražiti ortogonalni polinom p_1, stupnja 1, obzirom na zadanu težinsku funkciju w. Izravni put je bitno **lakši**.

Za računanje je najlakše uzeti standardnu bazu potencija u prostoru polinoma

$$s_n(x) = x^n, \quad n \geq 0.$$

Prednost te baze je da se poništava u lijevom rubu intervala.

Za uvjete egzaktnosti i provjeru polinomnog stupnja egzaktnosti, trebamo izračunati pripadne egzaktne težinske integrale

$$I_n := \int_0^1 e^{-x} s_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2.$$

Prvi je

$$I_0 = \int_0^1 e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - e^{-1} = 0.6321205588.$$

Ostale integrale računamo parcijalnom integracijom, koristeći već izračunate integrale.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x e^{-x}\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, dx \\ &= -e^{-1} + I_0 = 1 - 2e^{-1} = 0.2642411177. \end{aligned}$$

Zadnji integral, koji služi za provjeru polinomnog stupnja egzaktnosti, je

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\, dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} = -x^2 e^{-x} \Big|_0^1 + 2\int_0^1 x e^{-x}\, dx \\ &= -e^{-1} + 2I_1 = 2 - 5e^{-1} = 0.1606027941. \end{aligned}$$

Za Newton–Cotesovu formulu, iz uvjeta egzaktnosti $I_{NC}(s_n) = I_n$, za $n = 0, 1$, dobivamo linearni sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} w_0 + \quad w_1 &= I_0 = 1 - e^{-1} \\ \frac{1}{5}\, w_0 + \frac{2}{3}\, w_1 &= I_1 = 1 - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

Eliminacijom w_0 iz druge jednadžbe i sređivanjem, izlazi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)w_1 &= \left(1-2e^{-1}\right)-\frac{1}{5}\left(1-e^{-1}\right)\\
\frac{10-3}{15}w_1 &= \frac{4}{5}-\frac{9}{5}e^{-1}\\
w_1 &= \frac{12}{7}-\frac{27}{7}e^{-1} = 0.2953221555.
\end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe dobivamo težinu w_0

$$w_0 = 1-e^{-1}-\left(\frac{12}{7}-\frac{27}{7}e^{-1}\right) = -\frac{5}{7}+\frac{20}{7}e^{-1} = 0.3367984033.$$

Tražena Newton–Cotesova integracijska formula ima oblik

$$I_{NC}(f) = \left(-\frac{5}{7}+\frac{20}{7}e^{-1}\right)f\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{12}{7}-\frac{27}{7}e^{-1}\right)f\left(\frac{2}{3}\right).$$

U decimalnim brojevima je

$$I_{NC}(f) = 0.3367984033\cdot f(0.2000000000)+0.2953221555\cdot f(0.6666666667).$$

Znamo da je formula $I_{NC}(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1. Provjerimo još egzaktnost formule za $s_2(x)=x^2$. Egzaktna vrijednost integrala je

$$I_2 = 2-5e^{-1}.$$

U decimalnim brojevima, egzaktna vrijednost, aproksimacija i greška su

$$I_2 = 0.1606027941,\quad I_{NC}(s_2) = 0.1447262275,\quad I_2-I_{NC}(s_2) = 0.0158765667\neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I_{NC}(f)$ je $d=1$.

Za Gaussovu formulu, iz uvjeta egzaktnosti $I_G(s_n)=I_n$, za $n=0,1$, dobivamo nelinearni sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_1 \quad &= I_0 = 1-e^{-1}\\
\widetilde{w}_1 x_1 &= I_1 = 1-2e^{-1}.
\end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe odmah čitamo težinu

$$\widetilde{w}_1 = 1-e^{-1} = 0.6321205588,$$

a dijeljenjem druge jednadžbe s prvom **lako** dobivamo čvor

$$x_1 = \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}} = 0.4180232931.$$

Tražena Gaussova integracijska formula ima oblik

$$I_G(f) = \left(1-e^{-1}\right)f\left(\frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}\right).$$

U decimalnim brojevima je

$$I_G(f) = 0.6321205588\cdot f(0.4180232931).$$

Znamo da je Gaussova formula $I_G(f)$, reda 1, egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1. Provjerimo još egzaktnost formule za $s_2(x) = x^2$. U decimalnim brojevima, egzaktna vrijednost, aproksimacija i greška su

$$I_2 = 0.1606027941, \quad I_G(s_2) = 0.1104589422, \quad I_2 - I_G(s_2) = 0.0501438520 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I_G(f)$ je $d = 1$.

Za $f(x) = \cos(\pi x/2)$, egzaktna vrijednost integrala računa se dvostrukom parcijalnom integracijom

$$I_f := \int\limits_0^1 e^{-x} \cos\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos\Big(\dfrac{\pi x}{2}\Big) & du = -\dfrac{\pi}{2}\sin\Big(\dfrac{\pi x}{2}\Big) dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -e^{-x} \end{array} \right\}$$

$$= -e^{-x}\cos\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\Big|_0^1 - \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 e^{-x}\sin\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\, dx = \big\{\, \cos(\pi/2) = 0,\ \cos 0 = 1 \,\big\}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 e^{-x}\sin\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin\Big(\dfrac{\pi x}{2}\Big) & du = \dfrac{\pi}{2}\cos\Big(\dfrac{\pi x}{2}\Big) dx \\ dv = e^{-x}\, dx & v = -e^{-x} \end{array} \right\}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2}\bigg(-e^{-x}\sin\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\Big|_0^1 + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 e^{-x}\cos\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\, dx\bigg) = \big\{\, \sin(\pi/2) = 1,\ \sin 0 = 0 \,\big\}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2}\Big(-e^{-1} + \frac{\pi}{2} I_f\Big) = 1 + \frac{\pi}{2}e^{-1} - \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^2 I_f.$$

Odavde slijedi jednadžba za I_f

$$\Big(1 + \frac{\pi^2}{4}\Big) I_f = 1 + \frac{\pi}{2} e^{-1},$$

iz koje dobivamo

$$I_f = 2\,\frac{2 + \pi e^{-1}}{4 + \pi^2} = 0.4550565767.$$

Približna vrijednost i pripadna greška po Newton–Cotesovoj formuli su

$$I_{NC}(f) = 0.4679753939, \quad I_f - I_{NC}(f) = -0.0129188172 = -1.29188172 \cdot 10^{-2},$$

a po Gaussovoj formuli su

$$I_G(f) = 0.5006737936, \quad I_f - I_G(f) = -0.0456172168 = -4.56172168 \cdot 10^{-2}.$$

8.2 Gaussove formule reda 2

Zadatak 8.2.1. (NM 2012, popravni kolokvij, 5. zadatak, grupa B)

Odredite težine w_1, w_2 i čvorove x_1, x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 (2-x)\, f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = (2-x)^{-1/2}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu Gaussovu integracijsku formulu

$$\int_0^1 w(x)\, f(x)\, dx \approx I(f) := w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Čvorove x_1 i x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli $I(f)$ reda 2 najlakše možemo dobiti kao **nultočke** ortogonalnog polinoma p_2, stupnja 2, obzirom na zadanu težinsku funkciju

$$w(x) = 2 - x.$$

Kad jednom nađemo čvorove, težinske koeficijente w_1 i w_2 dobivamo rješavanjem **linearnog sustava** reda 2, iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1.

Težinska funkcija w **nije** simetrična na zadanom intervalu $[0, 1]$. Zato za računanje koristimo standardnu bazu potencija u prostoru polinoma

$$q_n(x) = x^n, \quad n \geq 0.$$

Prednost te baze je da se poništava u lijevom rubu intervala.

Za nalaženje ortogonalnog polinoma i uvjete egzaktnosti trebamo izračunati pripadne egzaktne težinske integrale

$$I_n := \int_0^1 w(x)\, q_n(x)\, dx, \quad n \geq 0.$$

Izlazi

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (2-x)\, x^n\, dx = \int_0^1 \left(2x^n - x^{n+1}\right) dx = \left(\frac{2x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Prvih nekoliko vrijednosti ovih integrala su

$$I_0 = \frac{3}{2}, \quad I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_2 = \frac{5}{12}, \quad I_3 = \frac{3}{10}, \quad I_4 = \frac{7}{30}.$$

Neka je $p_2(x) = x^2 + a_{21}x + a_{20}$. Nepoznate koeficijente a_{21} i a_{20} možemo odrediti iz uvjeta ortogonalnosti polinoma p_2 na polinome standardne baze $q_0(x) = 1$ i $q_1(x) = x$,

$$0 = \int_0^1 (2-x)\, p_2(x)\, dx = \int_0^1 (2-x)\, (x^2 + a_{21}x + a_{20})\, dx = I_2 + I_1 a_{21} + I_0 a_{20},$$

$$0 = \int_0^1 (2-x)\, x\, p_2(x)\, dx = \int_0^1 (2-x)\, x(x^2 + a_{21}x + a_{20})\, dx = I_3 + I_2 a_{21} + I_1 a_{20}.$$

Dobivamo linearni sustav za koeficijente a_{21} i a_{20}, oblika

$$\begin{aligned} I_0 a_{20} + I_1 a_{21} &= -I_2 \\ I_1 a_{20} + I_2 a_{21} &= -I_3. \end{aligned}$$

Kad uvrstimo već nađene vrijednosti za integrale $I_0 = 3/2$, $I_1 = 2/3$, $I_2 = 5/12$ i $I_3 = 3/10$, izlazi

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\, a_{20} + \frac{2}{3}\, a_{21} &= -\frac{5}{12} \\ \frac{2}{3}\, a_{20} + \frac{5}{12}\, a_{21} &= -\frac{3}{10}, \end{aligned}$$

ili, u decimalnim brojevima,

$$\begin{aligned} 1.5000000000\, a_{20} + 0.6666666667\, a_{21} &= -0.4166666667 \\ 0.6666666667\, a_{20} + 0.4166666667\, a_{21} &= -0.3000000000. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je

$$\begin{aligned} a_{20} &= \frac{19}{130} = 0.1461538462, \\ a_{21} &= -\frac{62}{65} = -0.9538461538. \end{aligned}$$

Ortogonalni polinom p_2 je

$$\begin{aligned} p_2 &= x^2 - \frac{62}{65}\, x + \frac{19}{130} \\ &= x^2 - 0.9538461538\, x + 0.1461538462. \end{aligned}$$

Njegove nultočke su čvorovi integracijske formule

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{62}{65} \pm \sqrt{\left(\frac{62}{65}\right)^2 - 4 \cdot \frac{19}{130}} \right) = \frac{31}{65} \pm \frac{\sqrt{1374}}{130},$$

ili

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{31}{65} - \frac{\sqrt{1374}}{130} = 0.1917884155, \\ x_2 &= \frac{31}{65} + \frac{\sqrt{1374}}{130} = 0.7620577384. \end{aligned}$$

Težinske koeficijente w_1 i w_2 dobivamo iz uvjeta egzaktne integracije polinoma standardne baze $q_0(x) = 1$ i $q_1(x) = x$, što daje linearni sustav

$$\begin{aligned} w_1 \quad + w_2 \quad &= I_0 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 &= I_1. \end{aligned}$$

Kad uvrstimo čvorove i integrale na desnoj strani, izlazi

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= \frac{3}{2} \\ \left(\frac{31}{65} - \frac{\sqrt{1374}}{130}\right) w_1 + \left(\frac{31}{65} + \frac{\sqrt{1374}}{130}\right) w_2 &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

ili, u decimalnim brojevima,

$$\begin{aligned} 1.0000000000\, w_1 + 1.0000000000\, w_2 &= 1.5000000000 \\ 0.1917884155\, w_1 + 0.7620577384\, w_2 &= 0.6666666667. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{3}{4} + \frac{19\sqrt{1374}}{8244} = 0.8354297202, \\ w_2 &= \frac{3}{4} - \frac{19\sqrt{1374}}{8244} = 0.6645702798. \end{aligned}$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \left(\frac{3}{4} + \frac{19\sqrt{1374}}{8244}\right) \cdot f\left(\frac{31}{65} - \frac{\sqrt{1374}}{130}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{19\sqrt{1374}}{8244}\right) \cdot f\left(\frac{31}{65} + \frac{\sqrt{1374}}{130}\right).$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.8354297202 \cdot f(0.1917884155) + 0.6645702798 \cdot f(0.7620577384).$$

Znamo da je Gaussova integracijska formula reda 2 egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjerimo još egzaktnost formule za $q_4(x) = x^4$. Dobivamo

$$\begin{aligned} I(q_4) &= \left(\frac{3}{4} + \frac{19\sqrt{1374}}{8244}\right) \cdot \left(\frac{31}{65} - \frac{\sqrt{1374}}{130}\right)^4 + \left(\frac{3}{4} - \frac{19\sqrt{1374}}{8244}\right) \cdot \left(\frac{31}{65} + \frac{\sqrt{1374}}{130}\right)^4 \\ &= \frac{1757}{7800} \neq \frac{7}{30} = I_4. \end{aligned}$$

U decimalnim brojevima

$$I_4 = 0.2333333333, \quad I(q_4) = 0.2252564103, \quad I_4 - I(q_4) = 0.0080769231 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = (2 - x)^{-1/2}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$\begin{aligned} I_f := \int_0^1 (2 - x)\, f(x)\, dx &= \int_0^1 (2 - x)\, (2 - x)^{-1/2}\, dx = \int_0^1 (2 - x)^{1/2}\, dx \\ &= -\frac{2}{3}\, (2 - x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}\, \sqrt{2} - \frac{2}{3} = 1.2189514165. \end{aligned}$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = 1.2185745631,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = 0.0003768534 = 3.768534 \cdot 10^{-4}.$$

Sustav egzaktne integracije. Tražena formula $I(f)$ ima 4 nepoznata parametra: težine w_1, w_2 i čvorove x_1, x_2. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 4 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti.

Zato krećemo od prostora $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Na standardnoj bazi potencija $\{1, x, x^2, x^3\}$ u tom prostoru, pripadni uvjeti egzaktnosti formule $I(f)$ na $\mathcal{P}_3$ su $I(x^n) = I_n$, za $n = 0, 1, 2, 3$. Iz tih uvjeta dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} w_1 \quad + w_2 \quad &= I_0 = \frac{3}{2} \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 &= I_1 = \frac{2}{3} \\ w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 &= I_2 = \frac{5}{12} \\ w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 &= I_3 = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Rješavanje ovog **nelinearnog** sustava jednadžbi je komplicirano!

Izravna eliminacija nepoznanica nekim redom (recimo, prvo w_2, zatim w_1, a na kraju x_2 ili x_1), vodi na **kubnu** jednadžbu za preostalu nepoznanicu (recimo, za preostali čvor). Od 3 rješenja, još treba izabrati ono "pravo", a zatim napraviti supstituciju unatrag.

"Pametnija" eliminacija — algebarskom manipulacijom jednadžbi, obično je ekvivalentna "pametnijem" izboru **baze** za sustav egzaktne integracije. Primjer: umjesto baze potencija, uzmemo bazu

$$1, \quad (x - x_1), \quad (x - x_1)(x - x_2), \quad x(x - x_1)(x - x_2).$$

Prvi faktor x u zadnjem polinomu može biti i drugačiji, ali ovo je najjednostavniji izbor. Probajte!

Zaključak: Lakše je znati nešto "teorije" i koristiti ortogonalnost za nalaženje čvorova.

—— • ——

Zadatak 8.2.2. (NM 2008, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa D)

Odredite težine w_1, w_2 i čvorove x_1, x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = |x|^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu Gaussovu integracijsku formulu

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} f(x)\, dx \approx I(f) := w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Čvorove x_1 i x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli $I(f)$ reda 2 najlakše je izračunati kao **nultočke** ortogonalnog polinoma p_2, stupnja 2, obzirom na zadanu težinsku funkciju

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} = |x|^{-1/2}, \quad \text{na } [-1,1].$$

Kad jednom nađemo čvorove, težinske koeficijente w_1 i w_2 dobivamo rješavanjem **linearnog sustava** reda 2, iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1.

Težinska funkcija je $w(x) = 1/\sqrt{|x|} = |x|^{-1/2}$, što je **parna** funkcija na simetričnom intervalu $[-1,1]$ oko nule. Zato je, za računanje integrala u uvjetima egzaktnosti, najzgodnije uzeti bazu prostora polinoma oblika

$$q_n(x) = x^n, \quad n \ge 0,$$

tako da su q_n parne ili neparne funkcije na $[-1,1]$, ovisno o parnosti od n.

Pripadni egzaktni težinski integrali su

$$I_n := \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, q_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, x^n\, dx.$$

Sad iskoristimo da je $q_n(x) = x^n$ parna ili neparna funkcija, ovisno o parnosti od n,

$$(-x)^n = \begin{cases} (-1)^n x^n, & \text{za } n \text{ neparan}, \\ x^n, & \text{za } n \text{ paran}, \end{cases}$$

pa integral prebacujemo na domenu $[0,1]$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, x^n\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, x^n\, dx = (1+(-1)^n) \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, x^n\, dx \\ &= (1+(-1)^n) \int_{0}^{1} x^{n-1/2}\, dx = \frac{1+(-1)^n}{n+1/2}\, x^{n+1/2} \,\Big|_0^1 = \frac{1+(-1)^n}{n+1/2} \\ &= \frac{2(1+(-1)^n)}{2n+1}, \quad n \ge 0. \end{aligned}$$

Prvih nekoliko vrijednosti ovih integrala su

$$I_0 = 4, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{4}{5}, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = \frac{4}{9}.$$

Neka je $p_2(x) = x^2 + a_{21}x + a_{20}$. Koeficijente a_{21} i a_{20} možemo odrediti iz uvjeta ortogonalnosti polinoma p_2 na polinome standardne baze $q_0(x) = 1$ i $q_1(x) = x$,

$$0 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, p_2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, (x^2 + a_{21}x + a_{20})\, dx = I_2 + I_1 a_{21} + I_0 a_{20},$$

$$0 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, x\, p_2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, x(x^2 + a_{21}x + a_{20})\, dx = I_3 + I_2 a_{21} + I_1 a_{20}.$$

Dobivamo linearni sustav za koeficijente a_{21} i a_{20} oblika

$$\begin{aligned} I_1 a_{21} + I_0 a_{20} &= -I_2 \\ I_2 a_{21} + I_1 a_{20} &= -I_3. \end{aligned}$$

Kad uvrstimo već nađene vrijednosti za integrale $I_0 = 4$, $I_1 = 0$, $I_2 = 4/5$ i $I_3 = 0$, izlazi

$$\begin{aligned} 0 \cdot a_{21} + 4a_{20} &= -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5}\, a_{21} + 0 \cdot a_{20} &= 0, \end{aligned}$$

odakle odmah dobivamo $a_{21} = 0$ i $a_{20} = -1/5$. Ortogonalni polinom p_2 je

$$p_2(x) = x^2 - \frac{1}{5},$$

a njegove nultočke su čvorovi integracijske formule

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Težinske koeficijente w_1 i w_2 određujemo iz uvjeta egzaktnosti formule $I(f)$, s **poznatim** čvorovima, na odabranoj bazi $\{q_0, q_1\}$ vektorskog prostora $\mathcal{P}_1$. Iz tih uvjeta dobivamo **linearni** sustav reda 2

$$\begin{aligned} w_1 \quad + w_2 \quad &= I_0 \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 &= I_1. \end{aligned}$$

Kad uvrstimo čvorove i integrale na desnoj strani, izlazi

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 4 \\ \sqrt{\frac{1}{5}}\,(w_2 - w_1) &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $w_1 = w_2$, pa iz prve dobivamo

$$w_1 = w_2 = 2.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = 2\left[f\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)\right].$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 2 \cdot f(-0.4472135955) + 2 \cdot f(0.4472135955).$$

Znamo da je Gaussova integracijska formula reda 2 egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjerimo još egzaktnost formule za $q_4(x) = x^4$. Dobivamo

$$I(q_4) = 2\left[\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^4\right] = 2\left[\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^2}\right] = \frac{4}{5^2} = \frac{4}{25} \neq \frac{4}{9} = I_4.$$

U decimalnim brojevima

$$I_4 = 0.4444444444, \quad I(q_4) = 0.1600000000, \quad I_4 - I(q_4) = 0.2844444444 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = |x|^{3/2}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, |x|^{3/2}\, dx = \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\int_{0}^{1} x\, dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\, x^2 \,\Big|_0^1 = 1.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = 2\left[f\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right) \right] = 2\left[\sqrt[4]{\frac{1}{5^3}} + \sqrt[4]{\frac{1}{5^3}} \right] = 4\sqrt[4]{\frac{1}{125}} = 1.1962790250,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = 1 - 4\sqrt[4]{\frac{1}{125}} = -0.1962790250 = -1.962790250 \cdot 10^{-1}.$$

Sustav egzaktne integracije. U ovom slučaju, parametri integracijske formule **mogu** se dobiti i rješavanjem **nelinearnog** sustava jednadžbi iz uvjeta egzaktne integracije. Razlog za to je simetrija težinske funkcije i **jednostavna** desna strana sustava (dvije nule).

Tražena formula $I(f)$ ima 4 nepoznata parametra: težine w_1, w_2 i čvorove x_1, x_2. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 4 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti.

Zato krećemo od prostora $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3, i baze $\{1, x, x^2, x^3\}$ u tom prostoru. Pripadni uvjeti egzaktnosti formule $I(f)$ na $\mathcal{P}_3$ su $I(q_n) = I_n$, za $n = 0, 1, 2, 3$. Iz tih uvjeta dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned}
w_1 \quad + w_2 \quad &= I_0 = 4, \\
w_1 x_1 + w_2 x_2 &= I_1 = 0, \\
w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 &= I_2 = \frac{4}{5}, \\
w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 &= I_3 = 0.
\end{aligned}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu s x_1^2 i od te jednadžbe oduzmemo zadnju. Time eliminiramo članove s w_1. Dobivamo

$$w_1 x_1^3 + w_2 x_2 x_1^2 - (w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3) = w_2 x_2 (x_1^2 - x_2^2) = w_2 x_2 (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

U ovoj relaciji imamo četiri mogućnosti za rješenje.

Ako je $w_2 = 0$ ili $x_2 = 0$, onda je $w_2 x_2 = 0$. Iz druge jednadžbe slijedi da je i $w_1 x_1 = 0$. No, onda mora biti i $w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = 0$, pa u trećoj jednadžbi dobivamo kontradikciju. To znači da $I(f)$ ima stupanj egzaktnosti najviše 1. Za veći stupanj egzaktnosti mora biti $w_2 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$.

Ako je $x_1 = x_2 \neq 0$, onda opet iz druge jednadžbe slijedi $w_1 + w_2 = 0$, što je u kontradikciji s prvom jednadžbom. U tom slučaju, $I(f)$ ima stupanj egzaktnosti najviše 0.

Za veći stupanj egzaktnosti mora biti $x_1 \neq x_2$. To znači da u prethodnoj relaciji mora biti $x_1 + x_2 = 0$.

Dakle, ako želimo dobiti najveći mogući stupanj egzaktnosti formule $I(f)$, onda mora biti

$$w_2 \neq 0, \quad x_1, x_2 \neq 0, \quad x_1 + x_2 = 0.$$

Zadnja relacija kaže da su čvorovi x_1 i x_2 simetrični oko nule. Dogovorno uzimamo da je $x_1 < 0$, a $x_2 > 0$. Kad uvrstimo $x_2 = -x_1$ u zadnje tri jednadžbe sustava, dobivamo novi sustav

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 4, \\ (w_1 - w_2)x_1 &= 0, \\ (w_1 + w_2)x_1^2 &= \frac{4}{5}, \\ (w_1 - w_2)x_1^3 &= 0. \end{aligned}$$

Zbog $x_1 \neq 0$, iz druge jednadžbe slijedi $w_1 - w_2 = 0$, pa su težine jednake, tj. $w_1 = w_2$. Time je automatski zadovoljena i zadnja jednadžba.

Ostaju još prva i treća jednadžba, koje sad glase

$$\begin{aligned} 2w_1 &= 4, \\ 2w_1 x_1^2 &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Iz prve je očito $w_1 = 2$, a iz druge onda dobivamo

$$4x_1^2 = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Zbog dogovora da je $x_1 < 0$, konačno rješenje je

$$w_1 = w_2 = 2, \quad x_1 = -\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{1}{5}}.$$

—— • ——

Zadatak 8.2.3. (NM 2008, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Odredite težine w_1, w_2 i čvorove x_1, x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \sqrt{|x|}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje (bez postupka). Parametri integracijske formule su

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{7}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{7}}, \quad w_1 = \frac{2}{3}, \quad w_2 = \frac{2}{3},$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{2}{3}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\right].$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.6666666667 \cdot f(-0.6546536707) + 0.6666666667 \cdot f(0.6546536707).$$

Znamo da je Gaussova integracijska formula reda 2 egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjera egzaktnosti formule za $q_4(x) = x^4$ daje

$$I(q_4) = \frac{12}{49} \neq \frac{4}{11} = I_4.$$

U decimalnim brojevima

$$I_4 = 0.3636363636, \quad I(q_4) = 0.2448979592, \quad I_4 - I(q_4) = 0.1187384045 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = \sqrt{|x|}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := 1.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{7}} = 1.0788089488,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = 1 - \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{7}} = -0.0788089488 = -7.88089488 \cdot 10^{-2}.$$

8.3 Gauss–Radau formule reda 2

Zadatak 8.3.1. (NM 2008, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa C)

Odredite težine w_1, w_2 i čvor x_1 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\, f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = (1-x)^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu Gauss–Radauovu integracijsku formulu

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\, f(x)\, dx \approx I(f) := w_1 f(x_1) + w_2 f(1).$$

Čvor x_1 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli $I(f)$ reda 2 najlakše je izračunati kao **nultočku** ortogonalnog polinoma p_1, stupnja 1, obzirom na modificiranu težinsku funkciju

$$w_b(x) = (1-x)\, w(x) = (1-x)\sqrt{1-x} = (1-x)^{3/2}, \quad \text{na } [0,1].$$

Ekvivalentno, polinom čvorova $(x - x_1)(x-1)$ mora biti ortogonalan na konstante, s težinskom funkcijom w na $[0,1]$. Kad jednom nađemo čvor, težinske koeficijente w_1 i w_2 dobivamo rješavanjem **linearnog sustava** reda 2, iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1.

Neka je $p_1(x) = x - x_1$. Pripadna relacija ortogonalnosti na konstantu 1 je

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}\, p_1(x)\, dx = \int_0^1 (1-x)^{3/2}\, (x - x_1)\, dx = \left\{ \begin{array}{c} y = 1-x \\ dy = -dx \end{array} \right\} \\
&= \int_0^1 y^{3/2}\, (1 - y - x_1)\, dy = \int_0^1 y^{3/2}\, dy - \int_0^1 y^{5/2}\, dy - x_1 \int_0^1 y^{3/2}\, dy \\
&= \frac{2}{5} - \frac{2}{7} - x_1 \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$x_1 = \frac{2}{7} \quad \text{ili} \quad p_1(x) = x - \frac{2}{7}.$$

Težinska funkcija je $w(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$. Zato je, za računanje integrala u uvjetima egzaktnosti, najzgodnije uzeti bazu prostora polinoma oblika

$$q_n(x) = (1-x)^n, \quad n \geq 0.$$

Prednost te baze je da se poništava u desnom rubu intervala, tj. u fiksnom čvoru $x_2 = 1$ Gauss–Radauove formule.

Pripadni egzaktni težinski integrali su

$$
\begin{aligned}
J_n &:= \int\limits_0^1 \sqrt{1-x}\, q_n(x)\, dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x}\, (1-x)^n\, dx = \int\limits_0^1 (1-x)^{n+1/2}\, dx \\
&= \left\{ \begin{array}{c} y = 1-x \\ dy = -dx \end{array} \right\} = \int\limits_0^1 y^{n+1/2}\, dy = \frac{1}{n+3/2}\, y^{n+3/2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{n+3/2} = \frac{2}{2n+3}, \quad n \geq 0.
\end{aligned}
$$

Težinske koeficijente w_1 i w_2 određujemo iz uvjeta egzaktnosti formule $I(f)$, s **poznatim** čvorovima, na odabranoj bazi $\{q_0, q_1\}$ vektorskog prostora $\mathcal{P}_1$. Iz tih uvjeta dobivamo **linearni** sustav reda 2

$$
\begin{aligned}
w_1 + w_2 &= J_0 \\
w_1(1-x_1) \qquad &= J_1.
\end{aligned}
$$

Kad uvrstimo čvor $x_1 = 2/7$ i integrale na desnoj strani, izlazi

$$
\begin{aligned}
w_1 + w_2 &= \frac{2}{3} \\
\frac{5}{7}\, w_1 &= \frac{2}{5}.
\end{aligned}
$$

Iz druge jednadžbe onda dobivamo težinu w_1

$$
\frac{5}{7}\, w_1 = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{14}{25}.
$$

Konačno, iz prve jednadžbe dobivamo i težinu w_2

$$
\frac{14}{25} + w_2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{2}{3} - \frac{14}{25} = \frac{50-42}{75} = \frac{8}{75}.
$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$
I(f) = \frac{14}{25}\, f\left(\frac{2}{7}\right) + \frac{8}{75}\, f(1).
$$

U decimalnim brojevima je

$$
I(f) = 0.5600000000 \cdot f(0.2857142857) + 0.1066666667 \cdot f(1).
$$

Znamo da je Gauss–Radauova integracijska formula reda 2 egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2. Provjerimo još egzaktnost formule za $q_3(x) = (1-x)^3$. Dobivamo

$$
I(q_3) = \frac{14}{25}\left(1 - \frac{2}{7}\right)^3 + \frac{8}{75} \cdot (1-1)^3 = \frac{14}{25}\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{2 \cdot 5}{7^2} = \frac{10}{49} \quad \neq \quad \frac{2}{9} = J_3.
$$

U decimalnim brojevima

$$
J_3 = 0.2222222222, \quad I(q_3) = 0.2040816327, \quad J_3 - I(q_3) = 0.0181405896 \neq 0.
$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 2$.

Za $f(x) = (1-x)^{3/2}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \int_0^1 \sqrt{1-x}\, f(x)\, dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, (1-x)^{3/2}\, dx = \int_0^1 (1-x)^2\, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} y = 1-x \\ dy = -dx \end{array} \right\} = \int_0^1 y^2\, dy = \frac{1}{3}\, y^3 \,\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = \frac{14}{25}\, f\left(\frac{2}{7}\right) + \frac{8}{75}\, f(1) = \frac{14}{25} \left(1 - \frac{2}{7}\right)^{3/2} + \frac{8}{75}\, (1-1)^{3/2} = \frac{14}{25} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{14}{25} \cdot \frac{5}{7} \sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{7}} = 0.3380617019,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{7}} = -0.0047283686 = -4.7283686 \cdot 10^{-3}.$$

Sustav egzaktne integracije. U ovom slučaju, parametri integracijske formule **mogu** se dobiti i rješavanjem **nelinearnog** sustava jednadžbi iz uvjeta egzaktne integracije.

Tražena formula $I(f)$ ima 3 nepoznata parametra: težine w_1, w_2 i čvor x_1. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 3 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti.

Zato krećemo od prostora $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2, i baze $\{1, 1-x, (1-x)^2\}$ u tom prostoru. Pripadni uvjeti egzaktnosti formule $I(f)$ na $\mathcal{P}_2$ su $I(q_n) = J_n$, za $n = 0, 1, 2$. Iz tih uvjeta dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= J_0 = \frac{2}{3}, \\ w_1(1-x_1) \qquad &= J_1 = \frac{2}{5}, \\ w_1(1-x_1)^2 \qquad &= J_2 = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Ako želimo dobiti najveći mogući stupanj egzaktnosti ove formule, onda mora biti $w_1 \neq 0$ i $1 - x_1 \neq 0$, tj. $x_1 \neq 1$.

U protivnom, za $w_1 = 0$ ili $x_1 = 1$, zadnje dvije jednadžbe su nemoguće, pa dobivamo formulu koja je egzaktna (najviše) za konstante iz $\mathcal{P}_0$, ovisno o izboru težine w_2.

Zbog $w_1 \neq 0$ i $x_1 \neq 1$, kvocijent treće i druge jednadžbe daje

$$\frac{w_1(1-x_1)^2}{w_1(1-x_1)} = \frac{J_2}{J_1} \quad \Rightarrow \quad 1 - x_1 = \frac{5}{7} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{7}.$$

Iz druge jednadžbe onda dobivamo težinu w_1

$$w_1(1-x_1) = J_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{7}\, w_1 = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{14}{25}.$$

Konačno, iz prve jednadžbe dobivamo i težinu w_2

$$w_1 + w_2 = J_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{14}{25} + w_2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{2}{3} - \frac{14}{25} = \frac{50-42}{75} = \frac{8}{75}.$$

Sustav egzaktne integracije u standardnoj bazi potencija. Možemo uzeti standardnu bazu prostora polinoma

$$s_n(x) = x^n, \quad n \geq 0.$$

Pripadni egzaktni težinski integrali su

$$I_n := \int_0^1 \sqrt{1-x}\, s_n(x)\, dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}\, x^n\, dx = \left\{ \begin{array}{c} y = 1-x \\ dy = -dx \end{array} \right\} = \int_0^1 \sqrt{y}\, (1-y)^n\, dy.$$

Ovi integrali se **teže** računaju, jer treba $(1-y)^n$ razviti po potencijama od y. Za računanje još koristimo i integrale

$$J_k = \int_0^1 \sqrt{y}\, y^k\, dy = \int_0^1 y^{k+1/2}\, dy = \frac{1}{k+3/2}\, y^{k+3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{k+3/2} = \frac{2}{2k+3}, \quad k \geq 0.$$

Dobivamo redom

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{y}\, dy = J_0 = \frac{2}{3},$$

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{y}\, (1-y)\, dy = J_0 - J_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15},$$

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{y}\, (1-2y+y^2)\, dy = J_0 - 2J_1 + J_2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} = \frac{16}{105},$$

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{y}\, (1-3y+3y^2-y^3)\, dy = J_0 - 3J_1 + 3J_2 - J_3 = \frac{2}{3} - \frac{6}{5} + \frac{6}{7} - \frac{2}{9} = \frac{32}{315}.$$

Uvjeti egzaktnosti formule $I(f)$ na standardnoj bazi prostora $\mathcal{P}_2$ su $I(s_n) = I_n$, za $n = 0, 1, 2$. Iz tih uvjeta dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= I_0 = \frac{2}{3}, \\ w_1 x_1 + w_2 &= I_1 = \frac{4}{15}, \\ w_1 x_1^2 + w_2 &= I_2 = \frac{16}{105}. \end{aligned}$$

Od druge i treće jednadžbe oduzmemo prvu, tako da eliminiramo w_2. Dobijemo

$$\begin{aligned} w_1(x_1 - 1) &= \frac{4}{15} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{5}, \\ w_1(x_1^2 - 1) &= \frac{16}{105} - \frac{2}{3} = -\frac{18}{35}. \end{aligned}$$

Ako želimo najveći stupanj egzaktnosti, kao i prije, mora biti $w_1 \neq 0$ i $x_1 \neq 1$. Kvocijent donje i gornje prethodne jednadžbe daje

$$\frac{w_1(x_1^2 - 1)}{w_1(x_1 - 1)} = \frac{9}{7} \quad \Rightarrow \quad x_1 + 1 = \frac{9}{7} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{7}.$$

Iz gornje jednadžbe onda dobivamo težinu w_1

$$w_1(x_1 - 1) = -\frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{7}\, w_1 = -\frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{14}{25}.$$

Konačno, iz prve jednadžbe dobivamo i težinu w_2

$$w_1 + w_2 = I_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{14}{25} + w_2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{2}{3} - \frac{14}{25} = \frac{50 - 42}{75} = \frac{8}{75}.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{14}{25}\, f\left(\frac{2}{7}\right) + \frac{8}{75}\, f(1).$$

Provjerimo još egzaktnost formule za $s_3(x) = x^3$. Dobivamo

$$I(s_3) = \frac{14}{25}\left(\frac{2}{7}\right)^3 + \frac{8}{75} \cdot 1^3 = \frac{14}{25} \cdot \frac{2}{7}\sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{8}{75} = \frac{4}{25}\sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{8}{75} \neq \frac{32}{315} = I_3.$$

U decimalnim brojevima

$$I_3 = 0.1015873016, \quad I(s_3) = 0.1197278912, \quad I_3 - I(s_3) = -0.0181405896 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 2$.

—— • ——

Zadatak 8.3.2. (NM 2008, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Odredite težine w_1, w_2 i čvor x_2 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje (bez postupka). Parametri integracijske formule su

$$x_2 = \frac{5}{7}, \quad w_1 = \frac{8}{75}, \quad w_2 = \frac{14}{25},$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{8}{75}\, f(0) + \frac{14}{25}\, f\left(\frac{5}{7}\right).$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.1066666667 \cdot f(0) + 0.5600000000 \cdot f(0.7142857143).$$

Znamo da je Gauss–Radauova integracijska formula reda 2 egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2. Provjera egzaktnosti formule za $q_3(x) = x^3$ daje

$$I(q_3) = \frac{10}{49} \neq \frac{2}{9} = I_3.$$

U decimalnim brojevima

$$I_3 = 0.2222222222, \quad I(q_3) = 0.2040816327, \quad I_3 - I(q_3) = 0.0181405896 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 2$.

Za $f(x) = \sqrt{x}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \frac{1}{2}.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = \frac{14}{25}\sqrt{\frac{5}{7}} = 0.4732863826,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = \frac{1}{2} - \frac{14}{25}\sqrt{\frac{5}{7}} = 0.0267136174 = 2.67136174 \cdot 10^{-2}.$$

8.4 Gauss–Lobatto formule reda 3

Zadatak 8.4.1. (NM 2011, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u Gauss–Lobattovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu Gauss–Lobattovu integracijsku formulu

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx \approx I(f) := w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1).$$

Čvor x_2 u Gauss–Lobattovoj integracijskoj formuli $I(f)$ reda 3 najlakše je izračunati kao **nultočku** ortogonalnog polinoma p_1, stupnja 1, obzirom na modificiranu težinsku funkciju

$$w_{a,b}(x) = (x-0)(1-x)\,w(x) = \frac{x(1-x)}{\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{3/2}, \quad \text{na } [0,1].$$

Ekvivalentno, polinom čvorova $(x-0)(x-x_2)(x-1)$ mora biti ortogonalan na konstante, s težinskom funkcijom w na $[0,1]$. Kad jednom nađemo čvor, težinske koeficijente w_1, w_2 i w_3 dobivamo rješavanjem **linearnog sustava** reda 3, iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2.

Neka je $p_1(x) = x - x_2$. Pripadna relacija ortogonalnosti na konstantu 1 je

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \frac{x(1-x)}{\sqrt{x}}\, p_1(x)\,dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^{3/2})\,(x - x_2)\,dx \\
&= \int_0^1 (x^{3/2} - x^{5/2})\,dx - x_2 \int_0^1 (x^{1/2} - x^{3/2})\,dx \\
&= \left(\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{7}x^{7/2}\right)\Bigg|_0^1 - x_2\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) - 2x_2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{35} - x_2\,\frac{4}{15}.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$x_2 = \frac{3}{7} \quad \text{ili} \quad p_1(x) = x - \frac{3}{7}.$$

Težinska funkcija je $w(x) = 1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$. Zato je, za računanje integrala u uvjetima egzaktnosti, zgodno uzeti bazu prostora polinoma oblika

$$q_n(x) = x^n, \quad n \geq 0.$$

Prednost te baze je da se poništava u lijevom rubu intervala, tj. u fiksnom čvoru $x_1 = 0$ Gauss–Lobattove formule.

Pripadni egzaktni težinski integrali su

$$I_n := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, q_n(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, x^n\, dx = \int_0^1 x^{n-1/2}\, dx = \frac{1}{n+1/2}\, x^{n+1/2} \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{n+1/2} = \frac{2}{2n+1}, \quad n \geq 0.$$

Težinske koeficijente w_1, w_2 i w_3 određujemo iz uvjeta egzaktnosti formule $I(f)$, s **poznatim** čvorovima, na odabranoj bazi $\{q_0, q_1, q_2\}$ vektorskog prostora $\mathcal{P}_2$. Iz tih uvjeta dobivamo **linearni** sustav reda 3

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 \quad + w_3 &= I_0 \\ w_2 x_2 + w_3 &= I_1 \\ w_2 x_2^2 + w_3 &= I_2. \end{aligned}$$

Kad uvrstimo čvor $x_2 = 3/7$ i integrale na desnoj strani, izlazi

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 2 \\ \frac{3}{7}\, w_2 + w_3 &= \frac{2}{3} \\ \frac{9}{49}\, w_2 + w_3 &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Prvo eliminiramo w_2 iz zadnje jednadžbe, tako da od nje oduzmemo drugu jednadžbu pomnoženu s $3/7$. Dobivamo

$$\frac{4}{7}\, w_3 = \frac{2}{5} - \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} = \frac{4}{35} \quad \Rightarrow \quad w_3 = \frac{1}{5}.$$

Iz druge jednadžbe onda dobivamo težinu w_2

$$\frac{3}{7}\, w_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10-3}{15} = \frac{7}{15} \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{49}{45}.$$

Konačno, iz prve jednadžbe dobivamo i težinu w_1

$$w_1 = 2 - \frac{49}{45} - \frac{1}{5} = \frac{90-49-9}{45} \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{32}{45}.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{32}{45}\, f(0) + \frac{49}{45}\, f\left(\frac{3}{7}\right) + \frac{1}{5}\, f(1).$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.7111111111 \cdot f(0) + 1.0888888889 \cdot f(0.4285714286) + 0.2000000000 \cdot f(1).$$

Znamo da je Gauss–Lobattova integracijska formula reda 3 egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjerimo još egzaktnost formule za $q_4(x) = x^4$. Dobivamo

$$I(q_4) = \frac{32}{45} \cdot 0 + \frac{49}{45} \left(\frac{3}{7}\right)^4 + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{49} + \frac{1}{5} = \frac{58}{245} \neq \frac{2}{9} = I_4.$$

U decimalnim brojevima

$$I_4 = 0.2222222222, \quad I(q_4) = 0.2367346939, \quad I_4 - I(q_4) = -0.0145124717 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = x^{3/2}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} x\sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = \frac{32}{45} f(0) + \frac{49}{45} f\left(\frac{3}{7}\right) + \frac{1}{5} f(1) = \frac{7}{15}\sqrt{\frac{3}{7}} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{7}{3}} + \frac{1}{5} = 0.5055050463,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = -0.0055050463 = -5.5050463 \cdot 10^{-3}.$$

Sustav egzaktne integracije. U ovom slučaju, parametri integracijske formule **mogu** se dobiti i rješavanjem **nelinearnog** sustava jednadžbi iz uvjeta egzaktne integracije.

Tražena formula $I(f)$ ima 4 nepoznata parametra: težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 4 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti.

Zato krećemo od prostora $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3, i baze $\{1, x, x^2, x^3\}$ u tom prostoru. Pripadni uvjeti egzaktnosti formule $I(f)$ na $\mathcal{P}_3$ su $I(q_n) = I_n$, za $n = 0, 1, 2, 3$. Iz tih uvjeta dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 \quad + w_3 &= I_0 = 2, \\ w_2 x_2 + w_3 &= I_1 = \frac{2}{3}, \\ w_2 x_2^2 + w_3 &= I_2 = \frac{2}{5}, \\ w_2 x_2^3 + w_3 &= I_3 = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Ako želimo dobiti najveći mogući stupanj egzaktnosti ove formule, onda mora biti $w_2 \neq 0$ i $x_2 \neq 0, 1$.

U protivnom, ako je $w_2 = 0$, zadnje dvije jednadžbe su nemoguće, jer je w_3 određen drugom jednadžbom. Onda dobivamo formulu koja je egzaktna na $\mathcal{P}_1$ (obična Newton–Cotesova formula s fiksnim čvorovima $x_1 = 0$ i $x_3 = 1$). Analogno, ako je $x_2 = 0$ ili $x_2 = 1$, zadnje dvije jednadžbe su nemoguće, jer je w_3 ili $w_2 + w_3$ određen drugom jednadžbom. Onda dobivamo formulu koja je egzaktna (najviše) na $\mathcal{P}_1$.

Prvo eliminiramo w_3 iz zadnje dvije jednadžbe, tako da od treće oduzimemo drugu, a od četvrte oduzmemo polaznu treću. Dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} w_2 x_2 (x_2 - 1) &= I_2 - I_1 = -\frac{4}{15}, \\ w_2 x_2^2 (x_2 - 1) &= I_3 - I_2 = -\frac{4}{35}. \end{aligned}$$

Zbog $w_2 \neq 0$ i $x_2 \neq 0, 1$, kvocijent donje i gornje jednadžbe daje

$$\frac{w_2 x_2^2(x_2 - 1)}{w_2 x_2(x_2 - 1)} = \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1} = \frac{15}{35} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{7}.$$

To uvrstimo u gornju (novu treću) jednadžbu i dobijemo w_2

$$w_2 x_2(x_2 - 1) = -w_2 \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = -\frac{4}{15}, \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{49}{45}.$$

Iz druge jednadžbe onda dobivamo težinu w_3

$$w_3 = \frac{2}{3} - \frac{3}{7} \cdot \frac{49}{45} = \frac{2}{3} - \frac{7}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Konačno, iz prve jednadžbe dobivamo i težinu w_1

$$w_1 = 2 - \frac{49}{45} - \frac{1}{5} = \frac{90 - 49 - 9}{45} = \frac{32}{45}.$$

Završna napomena: Za nalaženje težina još je **zgodnije** uzeti bazu

$$1, \quad x, \quad x(x-1),$$

a za sustav egzaktne integracije treba dodati još i $x^2(x-1)$. Probajte!

——— • ———

Zadatak 8.4.2. (NM 2011, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u Gauss–Lobattovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\, f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{5/3}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje (bez postupka). Parametri integracijske formule su

$$x_2 = \frac{7}{13}, \quad w_1 = \frac{81}{980}, \quad w_2 = \frac{507}{980}, \quad w_3 = \frac{3}{20}.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{81}{980} f(0) + \frac{507}{980} f\left(\frac{7}{13}\right) + \frac{3}{20} f(1).$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.0826530612 \cdot f(0) + 0.5173469388 \cdot f(0.5384615385) + 0.1500000000 \cdot f(1).$$

Znamo da je Gauss–Lobattova integracijska formula reda 3 egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjera egzaktnosti formule za $q_4(x) = x^4$ daje

$$I(q_4) = \frac{327}{1690} \neq \frac{3}{16} = I_4.$$

U decimalnim brojevima

$$I_4 = 0.1875000000, \quad I(q_4) = 0.1934911243, \quad I_4 - I(q_4) = -0.0059911243 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = x^{5/3}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \frac{1}{3}.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{\frac{13}{7}} + \frac{3}{20} = 0.3343768382,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = -0.0010435049 = -1.0435049 \cdot 10^{-3}.$$

8.5 Formule miješanog tipa (fiksni i varijabilni čvor)

Opći tip zadatka. Neka je $w(x) = \ldots$ (konkretna funkcija) i neka je $x_2 = \ldots$ (konkretni broj), s tim da je $x_2 \in [0,1]$, ali je $x_2 \neq 0, 1$.

Odredite težine w_1, w_2 i čvor x_1 u težinskoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 w(x)\, f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \ldots$ (konkretna funkcija) i nađite pravu grešku.

—— • ——

Opće rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu integracijsku formulu

$$I(f) := w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Čvor x_2 je **zadan** (fiksan), tako da formula $I(f)$ ima 3 nepoznata parametra: težine w_1, w_2 i čvor x_1. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 3 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti i zato očekujemo da je formula egzaktna na vektorskom prostoru $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2 (dimenzija tog prostora je 3). Naravno, treba vidjeti može li se to postići odgovarajućim izborom parametara.

Za početak, uočimo sljedeću jednostavnu činjenicu. Ako želimo maksimalni polinomni stupanj egzaktnosti, onda **mora** vrijediti $x_1 \neq x_2$, tj. čvorovi integracije moraju biti **različiti**. U protivnom, za $x_1 = x_2$, formula $I(f)$ ima oblik

$$I(f) := (w_1 + w_2) f(x_1),$$

sa samo jednim parametrom $w_1 + w_2$, kojeg odredimo iz uvjeta egzaktnosti na konstantama (prostor $\mathcal{P}_0$). Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti takve formule je $d = 0$, a samo pukim slučajem možemo dobiti jedan stupanj više — ako je čvor "pogođen" za Gaussovu formulu reda 1. Zato, u nastavku, pretpostavljamo da je $x_1 \neq x_2$.

Uz tu pretpostavku, integracijska formula $I(f)$ može se interpretirati kao interpolacijska formula. Kad bi i nepoznati čvor x_1 bio zadan, tako da je $x_1 \neq x_2$, onda se $I(f)$ može dobiti kao integral interpolacijskog polinoma $p_f \in \mathcal{P}_1$, koji

- interpolira funkcijske vrijednosti u **različitim** čvorovima x_1 i x_2 (isto kao težinska Newton–Cotesova formula s 2 čvora).

U tom slučaju, formula $I(f)$ je sigurno egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_1$, dimenzije 2. Ostaje još pitanje može li se "varijabilni" čvor x_1 **izabrati** tako da dobijemo jedan stupanj egzaktnosti više, tj. da formula bude egzaktna i na $\mathcal{P}_2$.

Pretpostavimo da je $I(f)$ **egzaktna** na prostoru $\mathcal{P}_2$ i pogledajmo što onda mora vrijediti. Neka je

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \in \mathcal{P}_2$$

polinom čvorova za $I(f)$ (ili pripadnu interpolaciju polinomom). Zbog

$$\omega(x_1) = \omega(x_2) = 0,$$

iz egzaktnosti formule $I(f)$ na polinomu ω slijedi

$$\int_0^1 w(x)\,\omega(x)\,dx = w_1\omega(x_1) + w_2\omega(x_2) = 0.$$

Dakle, ako je $I(f)$ egzaktna na $\mathcal{P}_2$, onda

- polinom čvorova ω ove formule $I(f)$ mora biti **ortogonalan** na konstante, tj. na sve polinome iz prostora $\mathcal{P}_0$.

Ovdje imamo samo **jedan** "varijabilni" čvor, što odgovara ortogonalnosti na prostor polinoma dimenzije 1.

Napomena. Ovaj rezultat slijedi izravno iz tvrdnje teorema o integracijskim formulama "višeg" stupnja egzaktnosti (pogledati predavanja).

Označimo s $p_1(x) = x - x_1$ polinom kojemu je nultočka **nepoznati** čvor x_1. Iz zapisa $\omega(x) = (x - x_2)\,p_1(x)$ i prethodne relacije ortogonalnosti slijedi

$$\int_0^1 w(x)\,(x - x_2)\,p_1(x)\,dx = 0.$$

Ako definiramo modificiranu težinsku funkciju

$$w_{x_2}(x) = (x - x_2)\,w(x),$$

odavde dobivamo ekvivalentni kriterij za nalaženje nepoznatog čvora.

- Traženi čvor x_1 mora biti **nultočka** ortogonalnog polinoma p_1, stupnja 1, na intervalu $[0,1]$, obzirom na **modificiranu** težinsku funkciju, s dodatnim faktorom za **fiksni** čvor x_2.

Ostaje pitanje može li se to postići i tako dobiti maksimalni polinomni stupanj egzaktnosti. Naime, zbog $x_2 \neq 0, 1$, modificirana težinska funkcija **nije** nenegativna na intervalu $[0,1]$. Zato gornja relacija ortogonalnosti **ne mora** dati čvor x_1 koji se nalazi unutar intervala $[0,1]$ i još zadovoljava $x_1 \neq x_2$.

Usputni komentar. Formula $I(f)$ nalići na Gauss-Radauovu, osim što fiksni čvor x_2 **nije** u rubu intervala integracije. Prema izvodu Gauss–Radau formule, očekujemo da moraju vrijediti **isti** principi:

- polinom čvorova ove formule mora biti **ortogonalan** na konstante (jer imamo samo jedan "varijabilni" čvor), odnosno,
- traženi čvor x_1 mora biti **nultočka** ortogonalnog polinoma p_1, stupnja 1, na intervalu $[0,1]$, obzirom na **modificiranu** težinsku funkciju $(x - x_2)\,w(x)$.

Prethodni izvod to opravdava, do na egzistenciju čvora x_1, kad fiksni čvor više nije u rubu.

Za provjeru egzistencije i nalaženje parametara formule $I(f)$, krećemo od prostora $\mathcal{P}_2$. Pogodan ili "pametan" izbor baze je ključan za **jednostavno** računanje. Najbolje je uzeti Newtonovu bazu čvorova, tako da nepoznati čvor x_1 bude **zadnji**:

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - x_2, \quad \omega(x) = (x - x_1)q_1(x) = p_1(x)q_1(x).$$

Zgodno je još uvesti i polinom

$$q_2(x) = x\, q_1(x),$$

koji će poslužiti za nalaženje čvora x_1, korištenjem zapisa

$$\omega(x) = (x - x_1)q_1(x) = x\, q_1(x) - x_1 q_1(x) = q_2(x) - x_1 q_1(x).$$

Zatim definiramo i **izračunamo** egzaktne težinske integrale

$$J_n := \int\limits_0^1 w(x)\, q_n(x)\, dx, \quad \text{za } n = 0, 1, 2.$$

Tu je bitno da nepoznati čvor x_1 bude zadnji u Newtonovoj bazi, tako da ovi integrali sadrže samo **poznate** podatke, tj. mogu se izračunati. Integral polinoma čvorova (koji mora biti jednak 0) onda zapišemo u obliku

$$\int\limits_0^1 w(x)\, \omega(x)\, dx = J_2 - x_1 J_1.$$

Uvjeti egzaktne integracije na Newtonovoj bazi daju sljedeći sustav jednadžbi za nepoznate parametre

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= J_0, \\ w_1(x_1 - x_2) &= J_1, \\ 0 &= J_2 - x_1 J_1. \end{aligned}$$

Iz **zadnje** jednadžbe (= jednadžbe ortogonalnosti) izračunamo **nepoznati** čvor x_1

$$x_1 = \frac{J_2}{J_1}.$$

Ovdje je bitno da je $J_1 \neq 0$. U protivnom, traženi čvor x_1 **ne postoji** i formula $I(f)$ ne može biti egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_2$. Dodatno, treba provjeriti je li $x_1 \in [0, 1]$. To nije bitno za egzistenciju formule, ali je bitno za njezinu primjenu na druge funkcije (koje ne moraju biti definirane izvan intervala $[0, 1]$).

Preostale početne jednadžbe daju **trokutasti** linearni sustav za težine (isto kao kod Newton–Cotesovih formula), kojeg rješavamo supstitucijom unatrag. Izlazi

$$w_1 = \frac{J_1}{x_1 - x_2}, \quad w_2 = J_0 - w_1.$$

I odavde vidimo da mora biti $x_1 \neq x_2$.

Završna napomena. Ako, na ovaj način, uspješno nađemo sve parametre formule $I(f)$, to znači da dobivena formula ima polinomni stupanj egzaktnosti **barem** 2. Još treba provjeriti egzaktnost formule na prostoru $\mathcal{P}_3$. Naime, fiksni čvor x_2 može biti zadan tako da je $I(f)$ Gaussova formula reda 2, tj. da ima polinomni stupanj egzaktnosti jednak 3. Ekvivalentno, treba vidjeti je li polinom čvorova w ortogonalan i na polinome iz $\mathcal{P}_1$, a ne samo na konstante.

Sustav egzaktne integracije u standardnoj bazi potencija. Možemo uzeti standardnu bazu potencija $\{1, x, x^2\}$ u prostoru polinoma $\mathcal{P}_2$ i izračunati pripadne egzaktne težinske integrale

$$I_n := \int\limits_0^1 w(x)\, x^n\, dx, \quad \text{za } n = 0, 1, 2.$$

Iz uvjeta egzaktnosti formule $I(f)$ na standardnoj bazi dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} w_1 \quad + w_2 \quad &= I_0, \\ w_1 x_1 + w_2 x_2 &= I_1, \\ w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 &= I_2. \end{aligned}$$

Rješavanje ovog **nelinearnog** sustava jednadžbi je dosta komplicirano!

Izravna eliminacija nepoznanica nekim redom (recimo, prvo w_2, zatim w_1), vodi na **kvadratnu** jednadžbu za preostalu nepoznanicu (recimo, za čvor x_1). Od 2 rješenja, još treba izabrati ono "pravo", a zatim napraviti supstituciju unatrag.

"Pametnija" eliminacija — algebarskom manipulacijom jednadžbi, obično je ekvivalentna "pametnijem" izboru **baze** za sustav egzaktne integracije.

Napomena. Ako već radimo eliminaciju, onda je zgodnije eliminirati potencije **nepoznatog** čvora x_1 na **lijevoj** strani sustava, tj. članove oblika $w_1 x_1^k$. To se radi na sljedeći način. Od druge jednadžbe oduzmemo prvu pomnoženu s x_1, a od treće oduzmemo drugu pomnoženu s x_1. Dobijemo novu drugu i treću jednadžbu, oblika

$$\begin{aligned} w_2(x_2 - x_1) &= I_1 - x_1 I_0, \\ w_2 x_2 (x_2 - x_1) &= I_2 - x_1 I_1. \end{aligned}$$

Eliminirali smo težinu w_1, a obje jednadžbe su **linearne** u nepoznatom čvoru x_1 — nema više kvadratnog člana. Nije bitno što je x_1 i na desnoj strani. Baš **ovaj** oblik je zgodan za zadnji korak eliminacije. Od zadnje jednadžbe oduzmemo prethodnu pomnoženu s x_2 (to je broj = fiksni čvor), tako da lijeva strana postane nula. Dobivamo jednadžbu (napisanu prirodnim poretkom)

$$I_2 - x_1 I_1 - x_2 (I_1 - x_1 I_0) = 0.$$

Sad sredimo ovu **linearnu** jednadžbu za x_1

$$(x_2 I_0 - I_1) x_1 = x_2 I_1 - I_2$$

i izračunamo x_1, ako koeficijent uz x_1 nije 0. Težine se računaju supstitucijom unatrag.

Uočite da je ovakav postupak eliminacije ekvivalentan izboru Newtonove baze čvorova u $\mathcal{P}_2$, ali tako da je nepoznati čvor x_1 ovdje **prvi** u poretku

$$q_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - x_1, \quad \omega(x) = (x - x_2) p_1(x).$$

—— • ——

Zadatak 8.5.1. (NM 2012, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Odredite težine w_1, w_2 i čvor x_1 u težinskoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{3/4} f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f\Big(\frac{3}{4}\Big)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{1/4}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu integracijsku formulu

$$\int_0^1 x^{3/4}\, f(x)\, dx \approx I(f) := w_1 f(x_1) + w_2 f\Big(\frac{3}{4}\Big).$$

Tražena formula $I(f)$ ima 3 nepoznata parametra: težine w_1, w_2 i čvor x_1. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 3 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti. Očekujemo da je formula egzaktna na vektorskom prostoru $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2 (dimenzija tog prostora je 3). Naravno, treba vidjeti može li se to postići odgovarajućim izborom parametara.

Pretpostavimo da je $I(f)$ **egzaktna** na prostoru $\mathcal{P}_2$. Neka je ω **polinom čvorova** za ovu formulu

$$\omega(x) = (x - x_1)\Big(x - \frac{3}{4}\Big) \in \mathcal{P}_2.$$

Iz egzaktnosti formule $I(f)$ na polinomu čvorova ω slijedi

$$\int_0^1 x^{3/4}\, \omega(x)\, dx = w_1 \omega(x_1) + w_2\, \omega\Big(\frac{3}{4}\Big) = 0.$$

Dakle, ako je $I(f)$ egzaktna na $\mathcal{P}_2$, onda polinom čvorova ω mora biti **ortogonalan** na konstante, tj. na sve polinome iz prostora $\mathcal{P}_0$.

Iz prethodne relacije ortogonalnosti dobivamo jednadžbu za čvor x_1

$$0 = \int_0^1 x^{3/4}\, (x - x_1)\Big(x - \frac{3}{4}\Big)\, dx = \int_0^1 x^{3/4}\, x\Big(x - \frac{3}{4}\Big)\, dx - x_1 \int_0^1 x^{3/4}\, \Big(x - \frac{3}{4}\Big)\, dx.$$

Izračunajmo integrale u ovoj jednadžbi. Prvi integral je

$$\begin{aligned} J_2 &:= \int_0^1 x^{3/4}\, x\Big(x - \frac{3}{4}\Big)\, dx = \int_0^1 \Big(x^{11/4} - \frac{3}{4} x^{7/4}\Big)\, dx = \Big(\frac{4}{15} x^{15/4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{11} x^{11/4}\Big)\,\Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{15} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{11} = \frac{4}{15} - \frac{3}{11} = \frac{44 - 45}{165} = -\frac{1}{165}. \end{aligned}$$

Drugi integral je

$$\begin{aligned} J_1 &:= \int_0^1 x^{3/4}\, \Big(x - \frac{3}{4}\Big)\, dx = \int_0^1 \Big(x^{7/4} - \frac{3}{4} x^{3/4}\Big)\, dx = \Big(\frac{4}{11} x^{11/4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} x^{7/4}\Big)\,\Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{11} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{11} - \frac{3}{7} = \frac{28 - 33}{77} = -\frac{5}{77}. \end{aligned}$$

Kad to uvrstimo u jednadžbu za x_1, izlazi

$$-\frac{1}{165} + \frac{5}{77} x_1 = 0 \quad \text{ili} \quad x_1 = \frac{77}{5 \cdot 165} = \frac{7}{75}.$$

Sad kad znamo čvorove, težinske koeficijente w_1 i w_2 dobivamo rješavanjem **linearnog sustava** reda 2, iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_1$ polinoma stupnja najviše 1. Najbolje je uzeti početni komad Newtonove baze čvorova

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - \frac{3}{4}, \quad \omega(x),$$

jer dobivamo **trokutasti** sustav jednadžbi. Egzaktna integracija kvadratnog (zadnjeg) člana baze (ovdje je to baš polinom čvorova ω) već je iskorištena za nalaženje čvora x_1.

Egzaktni težinski integrali funkcija baze q_0 i q_1 su

$$J_0 := \int_0^1 x^{3/4}\, dx = \frac{4}{7} x^{7/4} \bigg|_0^1 = \frac{4}{7},$$

$$J_1 := \int_0^1 x^{3/4} \Big(x - \frac{3}{4}\Big)\, dx = \{\text{ već smo ga izračunali }\} = -\frac{5}{77}.$$

Iz uvjeta egzaktne integracije dobivamo trokutasti linearni sustav reda 2

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= J_0 = \frac{4}{7} \\ w_1\Big(\frac{7}{75} - \frac{3}{4}\Big) &= J_1 = -\frac{5}{77}. \end{aligned}$$

Sređivanjem druge jednadžbe izlazi

$$\Big(\frac{28 - 225}{300}\Big) w_1 = -\frac{197}{300} w_1 = -\frac{5}{77} \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{5 \cdot 300}{77 \cdot 197} = \frac{1500}{15169}.$$

Konačno, iz prve jednadžbe dobivamo i težinu w_2 (koristimo $15169 = 7 \cdot 2167$)

$$w_2 = \frac{4}{7} - \frac{1500}{15169} = \frac{4}{7}\Big(1 - \frac{375}{2167}\Big) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2167 - 375}{2167} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1792}{2167} = \frac{4}{7} \cdot \frac{7 \cdot 256}{2167} = \frac{1024}{2167}.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{1500}{15169}\, f\Big(\frac{7}{75}\Big) + \frac{1024}{2167}\, f\Big(\frac{3}{4}\Big).$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.0988858857 \cdot f(0.0933333333) + 0.4725426857 \cdot f(0.7500000000).$$

Znamo da je dobivena integracijska formula $I(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2. Provjerimo još egzaktnost formule za $s_3(x) = x^3$. Egzaktna vrijednost integrala je

$$I_3 := \int_0^1 x^{3/4}\, x^3\, dx = \frac{4}{19} x^{19/4} \bigg|_0^1 = \frac{4}{19},$$

a aproksimacija je

$$I(s_3) = \frac{1500}{15169} \Big(\frac{7}{75}\Big)^3 + \frac{1024}{2167} \Big(\frac{3}{4}\Big)^3 = \ldots = \frac{2468}{12375} \neq \frac{4}{19} = I_3.$$

U decimalnim brojevima

$$I_3 = 0.2105263158, \quad I(s_3) = 0.1994343434, \quad I_3 - I(s_3) = 0.0110919724 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 2$.

Za $f(x) = x^{1/4}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \int\limits_0^1 x^{3/4}\, f(x)\, dx = \int\limits_0^1 x^{3/4}\, x^{1/4}\, dx = \int\limits_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \,\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = \frac{1500}{15169} \left(\frac{7}{75}\right)^{1/4} + \frac{1024}{2167} \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} = 0.4944072314,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = 0.0055927686 = 5.5927686 \cdot 10^{-3}.$$

Sustav egzaktne integracije u standardnoj bazi potencija. U ovom slučaju, parametri integracijske formule **mogu** se dobiti i rješavanjem **nelinearnog** sustava jednadžbi iz uvjeta egzaktne integracije na standardnoj bazi potencija

$$s_n(x) = x^n, \quad n \geq 0,$$

u prostoru polinoma $\mathcal{P}_2$. Pripadni egzaktni težinski integrali su

$$\begin{aligned} I_n &:= \int\limits_0^1 x^{3/4}\, s_n(x)\, dx = \int\limits_0^1 x^{3/4}\, x^n\, dx = \int\limits_0^1 x^{n+3/4}\, dx = \frac{1}{n+7/4}\, x^{n+7/4} \,\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{n+7/4} = \frac{4}{4n+7}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Iz uvjeta egzaktnosti $I(s_n) = I_n$, za $n = 0, 1, 2$, dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} w_1 \quad + \quad w_2 &= I_0 = \frac{4}{7}, \\ w_1 x_1 + \frac{3}{4}\, w_2 &= I_1 = \frac{4}{11}, \\ w_1 x_1^2 + \frac{3^2}{4^2}\, w_2 &= I_2 = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Izravna eliminacija nepoznanica nekim redom (recimo, prvo w_2, zatim w_1), vodi na **kvadratnu** jednadžbu za preostalu nepoznanicu (recimo, za čvor x_1). Od 2 rješenja, još treba izabrati ono "pravo", a zatim napraviti supstituciju unatrag.

Umjesto toga, zgodnije je eliminirati potencije **nepoznatog** čvora x_1 na **lijevoj** strani sustava, tj. članove oblika $w_1 x_1^k$. Od druge jednadžbe oduzmemo prvu pomnoženu s x_1, a od treće oduzmemo drugu pomnoženu s x_1. Dobijemo novu drugu i treću jednadžbu, oblika

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4} - x_1\right) w_2 &= \frac{4}{11} - \frac{4}{7}\, x_1, \\ \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} - x_1\right) w_2 &= \frac{4}{15} - \frac{4}{11}\, x_1. \end{aligned}$$

Eliminirali smo težinu w_1, a obje jednadžbe su **linearne** u nepoznatom čvoru x_1 — nema više kvadratnog člana. Nije bitno što je x_1 i na desnoj strani. Baš **ovaj** oblik je zgodan za zadnji korak eliminacije. Od zadnje jednadžbe oduzmemo prethodnu pomnoženu s $3/4$, tako da lijeva strana postane nula. Dobivamo jednadžbu

$$\frac{4}{15} - \frac{4}{11}\,x_1 - \frac{3}{4}\Big(\frac{4}{11} - \frac{4}{7}\,x_1\Big) = 0.$$

Sad sredimo ovu **linearnu** jednadžbu za x_1

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7} - \frac{4}{11}\Big)x_1 &= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{11} - \frac{4}{15} \\
\frac{33-28}{7\cdot 11}\,x_1 &= \frac{45-44}{11\cdot 15} \\
\frac{5}{7\cdot 11}\,x_1 &= \frac{1}{11\cdot 15} \\
x_1 &= \frac{7}{5\cdot 15} = \frac{7}{75}.
\end{aligned}$$

Težine w_1 i w_2 računaju se supstitucijom unatrag ili iz prve dvije jednadžbe sustava.

——— • ———

Zadatak 8.5.2. (NM 2012, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Odredite težine w_1, w_2 i čvor x_1 u težinskoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{2/3}\,f(x)\,dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f\Big(\frac{4}{5}\Big)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{1/3}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje (bez postupka). Parametri integracijske formule su

$$x_1 = \frac{20}{77}, \quad w_1 = \frac{1617}{8320}, \quad w_2 = \frac{675}{1664}.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{1617}{8320}\,f\Big(\frac{20}{77}\Big) + \frac{675}{1664}\,f\Big(\frac{4}{5}\Big).$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.1943509615\cdot f(0.2597402597) + 0.4056490385\cdot f(0.8000000000).$$

Znamo da je dobivena integracijska formula $I(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2. Provjera egzaktnosti formule za $s_3(x) = x^3$ daje

$$I(s_3) = \frac{894}{4235} \;\neq\; \frac{3}{14} = I_3.$$

U decimalnim brojevima

$$I_3 = 0.2142857143, \quad I(s_3) = 0.2110979929, \quad I_3 - I(s_3) = 0.0031877214 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 2$.

Za $f(x) = x^{1/3}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \frac{1}{2}.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = 0.5005744736,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = -0.0005744736 = -5.744736 \cdot 10^{-4}.$$

8.6 Formule miješanog tipa (dva fiksna i jedan varijabilni čvor)

Zadatak 8.6.1. (NM 2020, završna provjera znanja, 5. zadatak, grupa A)

Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x\,f(x)\,dx \approx w_1 f\Big(\frac{1}{5}\Big) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1).$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu integracijsku formulu

$$\int_0^1 x\,f(x)\,dx \approx w_1 f\Big(\frac{1}{5}\Big) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1),$$

s težinskom funkcijom $w(x) = x$.

Tražena formula $I(f)$ ima 4 nepoznata parametra: težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 4 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti. Očekujemo da je formula egzaktna na vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3 (dimenzija tog prostora je 4). Naravno, treba vidjeti može li se to postići odgovarajućim izborom parametara.

S druge strane, ako nađemo takav izbor parametara, dobivena integracijska formula je sigurno egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$. Za nalaženje točnog polinomnog stupnja egzaktnosti, treba provjeriti egzaktnost formule na prostoru $\mathcal{P}_4$ (i dalje, sve dok je egzaktna), jer fiksni čvorovi mogu biti zadani tako da formula $I(f)$ ima **veći** stupanj egzaktnosti od očekivanog stupnja 3.

Neka je ω **polinom čvorova** za ovu integracijsku formulu

$$\omega(x) = \Big(x - \frac{1}{5}\Big)(x - x_2)(x - 1) \in \mathcal{P}_3.$$

Prema teoremu o integracijskim formulama "višeg" stupnja egzaktnosti (v. predavanja), ako je $I(f)$ (s jednim "slobodnim" čvorom x_2) egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$, onda polinom čvorova ω mora biti **ortogonalan** na konstante, tj. na prostor $\mathcal{P}_0$. Dakle, mora vrijediti

$$\int_0^1 x\,\omega(x)\,dx = \int_0^1 x\,\Big(x - \frac{1}{5}\Big)(x - x_2)(x - 1)\,dx = 0.$$

Ekvivalentno, ako definiramo modificiranu težinsku funkciju

$$w_{x_2}(x) = x\,\Big(x - \frac{1}{5}\Big)(x - 1),$$

iz prethodne relacije ortogonalnosti slijedi da **nepoznati** čvor x_2 mora biti nultočka ortogonalnog polinoma stupnja 1, na intervalu $[0, 1]$, obzirom na **modificiranu** težinsku funkciju w_{x_2}, s dodatnim linearnim faktorima za **fiksne** čvorove $1/5$ i 1.

Ostaje pitanje može li se to postići i tako dobiti maksimalni polinomni stupanj egzaktnosti. Naime, gornja relacija ortogonalnosti **ne mora** imati rješenje za x_2, a i kad ima rješenje, čvor x_2 ne mora biti unutar intervala $[0, 1]$ ili različit od fiksnih čvorova.

Uvedimo oznaku za polinom "fiksnih" čvorova

$$q_2(x) = \Big(x - \frac{1}{5}\Big)(x-1) = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5},$$

tako da je

$$\omega(x) = (x - x_2)q_2(x) = xq_2(x) - x_2 q_2(x).$$

Iz prethodne relacije ortogonalnosti dobivamo jednadžbu za čvor x_2

$$0 = \int_0^1 x\,\big(xq_2(x) - x_2 q_2(x)\big)\,dx = \int_0^1 x^2 q_2(x)\,dx - x_2 \int_0^1 xq_2(x)\,dx.$$

Izračunajmo integrale u ovoj jednadžbi. Prvi integral je

$$\begin{aligned} J_3 := \int_0^1 x^2\Big(x - \frac{1}{5}\Big)(x-1)\,dx &= \int_0^1 \Big(x^4 - \frac{6}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^2\Big)\,dx \\ &= \Big(\frac{1}{5}x^5 - \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5} - \frac{3}{10} + \frac{1}{15} = \frac{6-9+2}{30} = -\frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Drugi integral je

$$\begin{aligned} J_2 := \int_0^1 x\Big(x - \frac{1}{5}\Big)(x-1)\,dx &= \int_0^1 \Big(x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{5}x\Big)\,dx \\ &= \Big(\frac{1}{4}x^4 - \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5-8+2}{20} = -\frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Kad to uvrstimo u jednadžbu za x_2 (jednadžba je $J_3 - J_2 x_2 = 0$), izlazi

$$-\frac{1}{30} + \frac{1}{20}x_2 = 0 \quad \text{ili} \quad x_2 = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Sad kad znamo sve čvorove, težinske koeficijente w_1, w_2 i w_3 dobivamo rješavanjem **linearnog sustava** reda 3, iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2. Najbolje je uzeti početni komad Newtonove baze čvorova

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - \frac{1}{5}, \quad q_2(x) = \Big(x - \frac{1}{5}\Big)(x-1), \quad \omega(x),$$

jer dobivamo **trokutasti** sustav jednadžbi. Egzaktna integracija kubnog (zadnjeg) člana baze (ovdje je to baš polinom čvorova ω) već je iskorištena za nalaženje čvora x_2.

Egzaktni težinski integrali funkcija baze q_0, q_1 i q_2 su

$$J_0 := \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$J_1 := \int_0^1 x\left(x - \frac{1}{5}\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{10-3}{30} = \frac{7}{30},$$

$$J_2 := \int_0^1 x\left(x - \frac{1}{5}\right)(x-1)\,dx = \{\,\text{već smo ga izračunali}\,\} = -\frac{1}{20}.$$

Dobiveni sustav linearnih jednadžbi ima oblik

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= J_0 \\ w_2\Big(x_2 - \frac{1}{5}\Big) + w_3\Big(1 - \frac{1}{5}\Big) &= J_1 \\ w_2\Big(x_2 - \frac{1}{5}\Big)(x_2 - 1) &= J_2. \end{aligned}$$

Ako zamijenimo poredak nepoznanica u w_1, w_3, w_2, dobivamo baš trokutasti sustav, kojeg rješavamo supstitucijom unatrag (u tom poretku nepoznanica).

Kad uvrstimo čvor $x_2 = 2/3$ i integrale na desnoj strani, izlazi

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= \frac{1}{2} \\ \Big(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\Big)w_2 + \frac{4}{5}w_3 &= \frac{7}{30} \\ \Big(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\Big)\Big(\frac{2}{3} - 1\Big)w_2 &= -\frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Sređivanjem zadnje jednadžbe izlazi

$$\Big(\frac{10-3}{15}\Big)\Big(-\frac{1}{3}\Big)w_2 = -\frac{7}{45}w_2 = -\frac{1}{20} \qquad \Rightarrow \qquad w_2 = \frac{9}{7\cdot 4} = \frac{9}{28}.$$

Iz druge jednadžbe onda dobivamo težinu w_3

$$\frac{4}{5}w_3 = \frac{7}{30} - \frac{7}{15}\cdot\frac{9}{28} = \frac{7}{30} - \frac{3}{20} = \frac{14-9}{60} = \frac{1}{12} \qquad \Rightarrow \qquad w_3 = \frac{5}{4\cdot 12} = \frac{5}{48}.$$

Konačno, iz prve jednadžbe dobivamo i težinu w_1

$$w_1 = \frac{1}{2} - \frac{9}{28} - \frac{5}{48} = \frac{1}{2} - \frac{9\cdot 12 + 5\cdot 7}{4\cdot 7\cdot 12} = \frac{168 - 108 - 35}{336} = \frac{25}{336}.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{25}{336}\,f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{9}{28}\,f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{48}\,f(1).$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.0744047619\cdot f(0.2) + 0.3214285714\cdot f(0.6666666667) + 0.1041666667\cdot f(1).$$

Znamo da je dobivena integracijska formula $I(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjerimo još egzaktnost formule za $s_4(x) = x^4$. Egzaktna vrijednost integrala je

$$I_4 := \int_0^1 x\,x^4\,dx = \frac{1}{6}x^6\Big|_0^1 = \frac{1}{6},$$

a aproksimacija je

$$I(s_4) = \frac{25}{336}\left(\frac{1}{5}\right)^4 + \frac{9}{28}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{5}{48} = \ldots = \frac{151}{900} \neq \frac{1}{6} = I_4.$$

U decimalnim brojevima

$$I_4 = 0.1666666667, \quad I(s_4) = 0.1677777778, \quad I_4 - I(s_4) = -0.0011111111 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = x^{3/2}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \int_0^1 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\,x^{3/2}\,dx = \int_0^1 x^{5/2}\,dx = \frac{2}{7}\,x^{7/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{7} = 0.2857142857.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = \frac{25}{336}\left(\frac{1}{5}\right)^{3/2} + \frac{9}{28}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} + \frac{5}{48} = 0.2857851839,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = -0.0000708982 = -7.08982 \cdot 10^{-5}.$$

Sustav egzaktne integracije u standardnoj bazi potencija. U ovom slučaju, parametri integracijske formule **mogu** se dobiti i rješavanjem **nelinearnog** sustava jednadžbi iz uvjeta egzaktne integracije na standardnoj bazi potencija

$$s_n(x) = x^n, \quad n \geq 0,$$

u prostoru polinoma $\mathcal{P}_3$. Pripadni egzaktni težinski integrali su

$$I_n := \int_0^1 x\,s_n(x)\,dx = \int_0^1 x\,x^n\,dx = \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2}\,x^{n+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+2}, \quad n \geq 0.$$

Iz uvjeta egzaktnosti $I(s_n) = I_n$, za $n = 0, 1, 2, 3$, dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 \quad + w_3 &= I_0 = \frac{1}{2},\\
\frac{1}{5}\,w_1 + w_2 x_2 + w_3 &= I_1 = \frac{1}{3},\\
\left(\frac{1}{5}\right)^2 w_1 + w_2 x_2^2 + w_3 &= I_2 = \frac{1}{4},\\
\left(\frac{1}{5}\right)^3 w_1 + w_2 x_2^3 + w_3 &= I_3 = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Izravna eliminacija nepoznanica nekim redom (recimo, prvo w_3, zatim w_1, a onda w_2), vodi na **kubnu** jednadžbu za preostalu nepoznanicu (recimo, za čvor x_2). Od 3 rješenja, još treba izabrati ono "pravo", a zatim napraviti supstituciju unatrag.

Umjesto toga, zgodnije je eliminirati potencije **nepoznatog** čvora x_2 na **lijevoj** strani sustava, tj. članove oblika $w_2 x_2^k$. Od druge jednadžbe oduzmemo prvu pomnoženu s x_2, od treće oduzmemo drugu pomnoženu s x_2, a od četvrte oduzmemo treću pomnoženu s x_2. Dobijemo novu drugu, treću i četvrtu jednadžbu, oblika

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{5} - x_2\right) w_1 + (1 - x_2)\, w_3 &= I_1 - x_2 I_0, \\
\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - x_2\right) w_1 + (1 - x_2)\, w_3 &= I_2 - x_2 I_1, \\
\left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5} - x_2\right) w_1 + (1 - x_2)\, w_3 &= I_3 - x_2 I_2.
\end{aligned}$$

Na desnoj strani sustava, **namjerno** su ostavljene "opće" vrijednosti I_k za integrale funkcija standardne baze, zato da se bolje vidi **struktura** sustava. Eliminirali smo težinu w_2, a sve tri jednadžbe su **linearne** u nepoznatom čvoru x_2 — nema više kvadratnog i kubnog člana. Nije bitno što je x_2 i na desnoj strani. Baš **ovaj** oblik je zgodan za nastavak eliminacije.

U ovom sustavu, prvo eliminiramo težinu w_3, tako da od druge jednadžbe oduzmemo prvu, a od treće oduzmemo drugu. Dobivamo sljedeće dvije jednadžbe (to su nova treća i četvrta za polazni sustav)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - x_2\right) w_1 &= (I_2 - x_2 I_1) - (I_1 - x_2 I_0), \\
\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - x_2\right) w_1 &= (I_3 - x_2 I_2) - (I_2 - x_2 I_1).
\end{aligned}$$

Na kraju, od zadnje jednadžbe oduzmemo prethodnu pomnoženu s $1/5$, tako da lijeva strana postane nula. Dobivamo jednadžbu (napisanu prirodnim poretkom)

$$(I_3 - x_2 I_2) - (I_2 - x_2 I_1) - \frac{1}{5}\big((I_2 - x_2 I_1) - (I_1 - x_2 I_0)\big) = 0.$$

Sad sredimo ovu **linearnu** jednadžbu za x_2, skupljanjem svih članova uz x_2 i slobodnih članova. Izlazi

$$\left(I_3 - \frac{6}{5} I_2 + \frac{1}{5} I_1\right) - \left(I_2 - \frac{6}{5} I_1 + \frac{1}{5} I_0\right) x_2 = 0.$$

Kad uvrstimo vrijednosti za integrale I_k, ako koeficijent uz x_2 nije 0, odavde izračunamo čvor x_2. Težine w_1, w_2 i w_3 računaju se supstitucijom unatrag ili iz prve tri jednadžbe sustava.

Usput, lako se vidi da su koeficijenti u gornjoj jednadžbi **jednaki** ranije izračunatim integralima J_3 i J_2, tj. gornja jednadžba jednaka je ranijoj jednadžbi $J_3 - J_2 x_2 = 0$.

Uočite da je ovakav postupak eliminacije ekvivalentan izboru Newtonove baze čvorova u $\mathcal{P}_3$, ali tako da je nepoznati čvor x_2 ovdje **prvi** u poretku

$$q_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - x_2, \quad (x - 1) p_1(x), \quad \omega(x) = \left(x - \frac{1}{5}\right)(x - 1) p_1(x).$$

— • —

Zadatak 8.6.2. (NM 2020, završna provjera znanja, 5. zadatak, grupa B)

Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^2 f(x)\, dx \approx w_1 f\left(\frac{1}{4}\right) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1).$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje (bez postupka). Parametri integracijske formule su

$$x_2 = \frac{5}{7}, \quad w_1 = \frac{16}{585}, \quad w_2 = \frac{343}{1560}, \quad w_3 = \frac{31}{360}.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{16}{585} f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{343}{1560} f\left(\frac{5}{7}\right) + \frac{31}{360} f(1).$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.0273504274 \cdot f(0.25) + 0.2198717949 \cdot f(0.7142857143) + 0.0861111111 \cdot f(1).$$

Znamo da je dobivena integracijska formula $I(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjera egzaktnosti formule za $s_4(x) = x^4$ daje

$$I(s_4) = \frac{241}{1680} \neq \frac{1}{7} = I_4.$$

U decimalnim brojevima

$$I_4 = 0.1428571429, \quad I(s_4) = 0.1434523810, \quad I_4 - I(s_4) = -0.0005952381 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = x^{3/2}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \frac{2}{9} = 0.2222222222.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = 0.2222624738,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = -0.0000402515 = -4.02515 \cdot 10^{-5}.$$

8.7 Formule miješanog tipa s derivacijom u čvoru

Opći tip zadatka. Neka je $w(x) = \ldots$ (konkretna funkcija) i neka je $x_1 = \ldots$ (konkretni broj), s tim da je $x_1 \in [0,1]$.

Odredite težine w_1, w_1', w_2 i čvor x_2 u općoj težinskoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 w(x)\, f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_1' f'(x_1) + w_2 f(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \ldots$ (konkretna funkcija) i nađite pravu grešku.

—— • ——

Opće rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu integracijsku formulu

$$I(f) := w_1 f(x_1) + w_1' f'(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Čvor x_1 je **zadan** (fiksan), tako da formula $I(f)$ ima 4 nepoznata parametra: težine w_1, w_1', w_2 i čvor x_2. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 4 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti i zato očekujemo da je formula egzaktna na vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3 (dimenzija tog prostora je 4). Naravno, treba vidjeti može li se to postići odgovarajućim izborom parametara.

Za početak, uočimo sljedeću jednostavnu činjenicu. Ako želimo maksimalni polinomni stupanj egzaktnosti, onda **mora** vrijediti $x_1 \neq x_2$, tj. čvorovi integracije moraju biti **različiti**. U protivnom, za $x_1 = x_2$, formula $I(f)$ ima oblik

$$I(f) := (w_1 + w_2) f(x_1) + w_1' f'(x_1),$$

sa samo dva parametra $w_1 + w_2$ i w_1', koje odredimo iz uvjeta egzaktnosti na prostoru $\mathcal{P}_1$. Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti takve formule je $d = 1$, a samo pukim slučajem možemo dobiti jedan stupanj više — ako je čvor "pogođen" za egzaktnost formule na prostoru $\mathcal{P}_2$. Zato, u nastavku, pretpostavljamo da je $x_1 \neq x_2$.

Uz tu pretpostavku, integracijska formula $I(f)$ može se interpretirati kao interpolacijska formula. Uočimo da formula $I(f)$ koristi funkciju i derivaciju u čvoru x_1, pa možemo uzeti da je x_1 **dvostruki** čvor. Kad bi i nepoznati čvor x_2 bio zadan, tako da je $x_1 \neq x_2$, onda se $I(f)$ može dobiti kao integral **proširenog Hermiteovog** interpolacijskog polinoma $p_f \in \mathcal{P}_2$, koji

- interpolira funkciju i njezinu derivaciju u čvoru x_1 (dvostruki čvor) i funkciju u čvoru x_2 (jednostruki čvor).

U tom slučaju, formula $I(f)$ je sigurno egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_2$, dimenzije 3. Ostaje još pitanje može li se "varijabilni" čvor x_2 **izabrati** tako da dobijemo jedan stupanj egzaktnosti više, tj. da formula bude egzaktna i na $\mathcal{P}_3$.

Pretpostavimo da je $I(f)$ **egzaktna** na prostoru $\mathcal{P}_3$ i pogledajmo što onda mora vrijediti. Neka je ω **polinom čvorova** za ovu formulu (ili pripadnu interpolaciju polinomom)

$$\omega(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2) \in \mathcal{P}_3.$$

Zbog

$$\omega(x_1) = \omega'(x_1) = \omega(x_2) = 0,$$

iz egzaktnosti formule $I(f)$ na polinomu čvorova ω slijedi

$$\int_0^1 w(x)\,\omega(x)\,dx = w_1\omega(x_1) + w_1'\omega'(x_1) + w_2\omega(x_2) = 0.$$

Dakle, ako je $I(f)$ egzaktna na $\mathcal{P}_3$, onda

- polinom čvorova ω ove formule $I(f)$ mora biti **ortogonalan** na konstante, tj. na sve polinome iz prostora $\mathcal{P}_0$.

Ovdje imamo samo **jedan** “varijabilni” čvor, što odgovara ortogonalnosti na prostor polinoma dimenzije 1.

Napomena. Ovaj rezultat slijedi izravno iz tvrdnje teorema o integracijskim formulama “višeg” stupnja egzaktnosti (pogledati predavanja). Naime, taj teorem vrijedi i u općem slučaju — za proširenu Hermiteovu interpolaciju i odgovarajuće integracijske formule, uz uvjet da nema “preskakanja” derivacija u nekom čvoru.

Označimo s $p_1(x) = x - x_2$ polinom kojemu je nultočka **nepoznati** čvor x_2. Iz zapisa $\omega(x) = (x - x_1)^2\,p_1(x)$ i prethodne relacije ortogonalnosti slijedi

$$\int_0^1 w(x)\,(x - x_1)^2\,p_1(x)\,dx = 0.$$

Ako definiramo modificiranu težinsku funkciju

$$w_{x_1}(x) = (x - x_1)^2\,w(x),$$

odavde dobivamo ekvivalentni kriterij za nalaženje nepoznatog čvora.

- Traženi čvor x_2 mora biti **nultočka** ortogonalnog polinoma p_1, stupnja 1, na intervalu $[0, 1]$, obzirom na **modificiranu** težinsku funkciju, s dodatnim faktorom za **fiksni dvostruki** čvor x_1.

Uočimo da je modificirana težinska funkcija **nenegativna** na intervalu $[0, 1]$. Zato gornja relacija ortogonalnosti **mora** dati čvor x_2 koji se nalazi unutar intervala $[0, 1]$ (nultočka ortogonalnog polinoma p_1 s težinskom funkcijom w_{x_1}). Samo treba provjeriti je li $x_2 \neq x_1$.

Za provjeru egzistencije i nalaženje parametara formule $I(f)$, krećemo od prostora $\mathcal{P}_3$. Pogodan ili “pametan” izbor baze je ključan za **jednostavno** računanje. Najbolje je uzeti Newtonovu bazu čvorova, tako da nepoznati čvor x_2 bude **zadnji**:

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - x_1, \quad q_2(x) = (x - x_1)^2, \quad \omega(x) = (x - x_2)q_2(x) = p_1(x)q_2(x).$$

Zgodno je još uvesti i polinom

$$q_3(x) = x\,q_2(x),$$

koji će poslužiti za nalaženje čvora x_2, korištenjem zapisa

$$\omega(x) = (x - x_2)q_2(x) = x\,q_2(x) - x_2q_2(x) = q_3(x) - x_2q_2(x).$$

Zatim definiramo i **izračunamo** egzaktne težinske integrale

$$J_n := \int_0^1 w(x)\, q_n(x)\, dx, \quad \text{za } n = 0, 1, 2, 3.$$

Tu je bitno da nepoznati čvor x_2 bude zadnji u Newtonovoj bazi, tako da ovi integrali sadrže samo **poznate** podatke, tj. mogu se izračunati. Integral polinoma čvorova (koji mora biti jednak 0) onda zapišemo u obliku

$$\int_0^1 w(x)\, \omega(x)\, dx = J_3 - x_2 J_2.$$

Uvjeti egzaktne integracije na Newtonovoj bazi daju sljedeći sustav jednadžbi za nepoznate parametre

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= J_0, \\ w_1' + w_2(x_2 - x_1) &= J_1, \\ w_2(x_2 - x_1)^2 &= J_2, \\ 0 &= J_3 - x_2 J_2. \end{aligned}$$

Iz **zadnje** jednadžbe (= jednadžbe ortogonalnosti) izračunamo **nepoznati** čvor x_2

$$x_2 = \frac{J_3}{J_2}.$$

Ovdje je bitno da je $J_2 \neq 0$, što slijedi iz definicije J_2, jer su w i $q_2(x) = (x - x_1)^2$ nenegativne funkcije s izoliranim nultočkama na intervalu integracije $[0, 1]$, pa je $J_2 > 0$.

Preostale početne jednadžbe daju **trokutasti** linearni sustav za težine (slično kao kod Newton–Cotesovih formula), kojeg rješavamo supstitucijom unatrag. Izlazi

$$w_2 = \frac{J_2}{(x_2 - x_1)^2}, \quad w_1' = J_1 - w_2(x_2 - x_1) = J_1 - \frac{J_2}{x_2 - x_1}, \quad w_1 = J_0 - w_2.$$

I odavde vidimo da mora biti $x_1 \neq x_2$. Osim toga, dobijemo još i $w_2 > 0$.

Završna napomena. Ako, na ovaj način, uspješno nađemo sve parametre formule $I(f)$, to znači da dobivena formula ima polinomni stupanj egzaktnosti **barem** 3. Još treba provjeriti egzaktnost formule na prostoru $\mathcal{P}_4$. Naime, fiksni čvor x_1 može biti zadan tako da $I(f)$ ima polinomni stupanj egzaktnosti veći ili jednak 4.

Sustav egzaktne integracije u standardnoj bazi potencija. Možemo uzeti standardnu bazu potencija $\{1, x, x^2, x^3\}$ u prostoru polinoma $\mathcal{P}_3$ i izračunati pripadne egzaktne težinske integrale

$$I_n := \int_0^1 w(x)\, x^n\, dx, \quad \text{za } n = 0, 1, 2, 3.$$

Iz uvjeta egzaktnosti formule $I(f)$ na standardnoj bazi dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} w_1 \quad + \qquad\quad + w_2 \quad &= I_0, \\ w_1 x_1 + \quad w_1' \quad + w_2 x_2 &= I_1, \\ w_1 x_1^2 + 2w_1' x_1 + w_2 x_2^2 &= I_2, \\ w_1 x_1^3 + 3w_1' x_1^2 + w_2 x_2^3 &= I_2. \end{aligned}$$

Rješavanje ovog **nelinearnog** sustava jednadžbi je komplicirano!

Izravna eliminacija nepoznanica nekim redom (recimo, prvo w_1, zatim w_1', a na kraju w_2), vodi na **kubnu** jednadžbu za preostalu nepoznanicu (recimo, za čvor x_2). Od 3 rješenja, još treba izabrati ono "pravo", a zatim napraviti supstituciju unatrag.

"Pametnija" eliminacija — algebarskom manipulacijom jednadžbi, obično je ekvivalentna "pametnijem" izboru **baze** za sustav egzaktne integracije.

Napomena. Ako već radimo eliminaciju, onda je zgodnije eliminirati potencije **nepoznatog** čvora x_2 na **lijevoj** strani sustava, tj. članove oblika $w_2 x_2^k$. To se radi na sljedeći način. Od druge jednadžbe oduzmemo prvu pomnoženu s x_2, od treće oduzmemo drugu pomnoženu s x_2 a od četvrte oduzmemo treću pomnoženu s x_2. Dobijemo novu drugu, treću i četvrtu jednadžbu, oblika

$$\begin{aligned} w_1(x_1 - x_2) + w_1' &= I_1 - x_2 I_0, \\ w_1 x_1(x_1 - x_2) + w_1'(2x_1 - x_2) &= I_2 - x_2 I_1, \\ w_1 x_1^2(x_1 - x_2) + w_1' x_1(3x_1 - 2x_2) &= I_3 - x_2 I_2. \end{aligned}$$

Eliminirali smo težinu w_2, a sve tri jednadžbe su **linearne** u nepoznatom čvoru x_2 — nema više kvadratnog i kubnog člana. Nije bitno što je x_2 i na desnoj strani.

Baš **ovaj** oblik je zgodan za nastavak eliminacije, jer sve tri jednadžbe imaju član

$$w_1(x_1 - x_2).$$

Njega eliminiramo u sljedećem koraku. Od (nove) treće jednadžbe oduzmemo (novu) drugu pomnoženu s x_1 (to je broj = fiksni čvor), a od (nove) četvrte oduzmemo (novu) treću pomnoženu s x_1. Dobivene dvije jednadžbe sadrže samo w_1' i x_2. Kad sredimo faktore uz w_1' i desne strane, te dvije jednadžbe su

$$\begin{aligned} w_1'(x_1 - x_2) &= I_2 - x_2 I_1 - x_1(I_1 - x_2 I_0) = (I_2 - x_1 I_1) - (I_1 - x_1 I_0) x_2, \\ w_1' x_1(x_1 - x_2) &= I_3 - x_2 I_2 - x_1(I_2 - x_2 I_1) = (I_3 - x_1 I_2) - (I_2 - x_1 I_1) x_2. \end{aligned}$$

Opet, ovaj oblik je zgodan za zadnji korak eliminacije, jer obje jednadžbe imaju član

$$w_1'(x_1 - x_2).$$

Od zadnje jednadžbe oduzmemo prethodnu pomnoženu s x_1 (broj), tako da lijeva strana postane nula. Dobivamo jednadžbu (napisanu prirodnim poretkom)

$$\big((I_3 - x_1 I_2) - x_1(I_2 - x_1 I_1)\big) - \big((I_2 - x_1 I_1) - x_1(I_1 - x_1 I_0)\big) x_2 = 0.$$

Sad sredimo ovu **linearnu** jednadžbu za x_2

$$\big(I_2 - 2x_1 I_1 + x_1^2 I_0\big) x_2 = I_3 - 2x_1 I_2 + x_1^2 I_1$$

i izračunamo x_2. Koeficijent uz x_2 sigurno nije 0, ali se to ne vidi iz ovog oblika (znamo da postoji čvor $x_2 \in [0, 1]$). Težine se računaju supstitucijom unatrag.

Uočite da je ovakav postupak eliminacije ekvivalentan izboru Newtonove baze čvorova u $\mathcal{P}_3$, ali tako da je nepoznati čvor x_2 ovdje **prvi** u poretku

$$q_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - x_2, \quad r_2(x) = (x - x_1) p_1(x), \quad \omega(x) = (x - x_1)^2 p_1(x).$$

—— • ——

Zadatak 8.7.1. (NM 2015, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa C)

Odredite težine w_1, w_1', w_2 i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f\Big(\frac{3}{4}\Big) + w_1' f'\Big(\frac{3}{4}\Big) + w_2 f(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^2\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu integracijsku formulu

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx I(f) := w_1 f\Big(\frac{3}{4}\Big) + w_1' f'\Big(\frac{3}{4}\Big) + w_2 f(x_2).$$

Tražena formula $I(f)$ ima 4 nepoznata parametra: težine w_1, w_1', w_2 i čvor x_2. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 4 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti. Očekujemo da je formula egzaktna na vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3 (dimenzija tog prostora je 4). Naravno, treba vidjeti može li se to postići odgovarajućim izborom parametara.

Formula $I(f)$ koristi funkciju i derivaciju u čvoru $x_1 = 3/4$ pa možemo uzeti da je x_1 **dvostruki** čvor. To odgovara interpolacijskom pogledu na ovu integracijsku formulu. Kad bi nepoznati čvor x_2 bio zadan, uz pretpostavku da je $x_2 \neq 3/4$, formula $I(f)$ odgovara integralu **proširenog Hermiteovog** interpolacijskog polinoma $p_f \in \mathcal{P}_2$, koji

- interpolira funkciju i njezinu derivaciju u čvoru $x_1 = 3/4$ (dvostruki čvor) i funkciju u čvoru x_2 (jednostruki čvor).

Tako dobivena formula je sigurno egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_2$. Treba vidjeti može li se čvor x_2 izabrati tako da formula $I(f)$ ima polinomni stupanj egzaktnosti strogo veći od 2.

Pretpostavimo da je $I(f)$ **egzaktna** na prostoru $\mathcal{P}_3$. Neka je ω **polinom čvorova** za ovu formulu

$$\omega(x) = \Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2 (x - x_2) \in \mathcal{P}_3.$$

Iz egzaktnosti formule $I(f)$ na polinomu čvorova ω slijedi

$$\int_0^1 \omega(x)\,dx = w_1\,\omega\Big(\frac{3}{4}\Big) + w_1'\,\omega'\Big(\frac{3}{4}\Big) + w_2\omega(x_2) = 0.$$

Dakle, ako je $I(f)$ egzaktna na $\mathcal{P}_3$, onda polinom čvorova ω mora biti **ortogonalan** na konstante, tj. na sve polinome iz prostora $\mathcal{P}_0$.

Iz prethodne relacije ortogonalnosti dobivamo jednadžbu za čvor x_2

$$0 = \int_0^1 \Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2 (x - x_2)\,dx = \int_0^1 x\Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2 dx - x_2 \int_0^1 \Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2 dx.$$

Izračunajmo integrale u ovoj jednadžbi. Prvi integral je

$$J_3 := \int\limits_0^1 x\Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \Big(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{16}x\Big)\,dx = \Big(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{9}{32} = \frac{8-16+9}{32} = \frac{1}{32}.$$

Drugi integral je

$$J_2 := \int\limits_0^1 \Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2\,dx = \int\limits_0^1 \Big(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{16}\Big)\,dx = \Big(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{16}x\Big)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} = \frac{16-36+27}{48} = \frac{7}{48}.$$

Kad to uvrstimo u jednadžbu za x_2, izlazi

$$\frac{1}{32} - \frac{7}{48}x_2 = 0 \quad \text{ili} \quad x_2 = \frac{48}{7\cdot 32} = \frac{3}{14}.$$

Sad kad znamo čvorove, težinske koeficijente w_1, w_1' i w_2 dobivamo rješavanjem **linearnog sustava** reda 3, iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2. Najbolje je uzeti početni komad Newtonove baze čvorova

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - \frac{3}{4}, \quad q_2(x) = \Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2, \quad \omega(x),$$

jer dobivamo **trokutasti** sustav jednadžbi. Egzaktna integracija kubnog (zadnjeg) člana baze (ovdje je to baš polinom čvorova ω) već je iskorištena za nalaženje čvora x_2.

Egzaktni težinski integrali funkcija baze q_0, q_1 i q_2 su

$$J_0 := \int\limits_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1,$$

$$J_1 := \int\limits_0^1 \Big(x - \frac{3}{4}\Big)\,dx = \Big(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4},$$

$$J_2 := \int\limits_0^1 \Big(x - \frac{3}{4}\Big)^2\,dx = \{\,\text{već smo ga izračunali}\,\} = \frac{7}{48}.$$

Iz uvjeta egzaktne integracije dobivamo trokutasti linearni sustav reda 3

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= J_0 = 1 \\ w_1' + w_2\Big(\frac{3}{14} - \frac{3}{4}\Big) &= J_1 = -\frac{1}{4} \\ w_2\Big(\frac{3}{14} - \frac{3}{4}\Big)^2 &= J_2 = \frac{7}{48}. \end{aligned}$$

Prvo izračunamo koeficijent $(3/14 - 3/4) = -15/28 = -15/(2^2 \cdot 7)$. Sređivanjem zadnje jednadžbe izlazi

$$\left(-\frac{15}{28}\right)^2 w_2 = \frac{225}{824} w_2 = \frac{7}{48} \qquad \Rightarrow \qquad w_2 = \frac{7 \cdot 824}{225 \cdot 48} = \frac{7^3 \cdot 2^4}{225 \cdot 3 \cdot 2^4} = \frac{343}{675}.$$

Iz druge jednadžbe računamo w_1'

$$w_1' = -\frac{1}{4} + \frac{343}{675} \cdot \frac{15}{28} = -\frac{1}{4} + \frac{7^3}{15^2 \cdot 3} \cdot \frac{15}{4 \cdot 7} = -\frac{1}{4} + \frac{7^2}{15 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{-45 + 49}{45 \cdot 4} = \frac{1}{45}.$$

Konačno, iz prve jednadžbe dobivamo i težinu w_1

$$w_1 = 1 - \frac{343}{675} = \frac{675 - 343}{675} = \frac{332}{675}.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{332}{675} f\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{45} f'\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{343}{675} f\left(\frac{3}{14}\right).$$

U decimalnim brojevima je

$$\begin{aligned} I(f) = \quad & 0.4918518519 \cdot f(0.7500000000) + 0.0222222222 \cdot f'(0.7500000000) \\ & + 0.5081481481 \cdot f(0.2142857143). \end{aligned}$$

Znamo da je dobivena integracijska formula $I(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjerimo još egzaktnost formule za $s_4(x) = x^4$. Egzaktna vrijednost integrala je

$$I_4 := \int_0^1 x^4 \, dx = \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5},$$

a aproksimacija je

$$I(s_4) = \frac{332}{675} \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \frac{1}{45} \cdot 4 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{343}{675} \left(\frac{3}{14}\right)^4 = \ldots = \frac{87}{448} \neq \frac{1}{5} = I_4.$$

U decimalnim brojevima

$$I_4 = 0.2000000000, \quad I(s_4) = 0.1941964286, \quad I_4 - I(s_4) = 0.0058035714 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = x^2 \sqrt{x}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 x^{5/2} \, dx = \frac{2}{7} x^{7/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{7} = 0.2857142857.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = \frac{332}{675} \left(\frac{3}{4}\right)^{5/2} + \frac{1}{45} \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} + \frac{343}{675} \left(\frac{3}{14}\right)^{5/2} = 0.2864859880,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = -0.0007717023 = -7.717023 \cdot 10^{-4}.$$

Sustav egzaktne integracije u standardnoj bazi potencija. U ovom slučaju, parametri integracijske formule **mogu** se dobiti i rješavanjem **nelinearnog** sustava jednadžbi iz uvjeta egzaktne integracije na standardnoj bazi potencija

$$s_n(x) = x^n, \quad n \geq 0,$$

u prostoru polinoma $\mathcal{P}_3$. Pripadni egzaktni težinski integrali su

$$I_n := \int_0^1 s_n(x)\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\,\bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Iz uvjeta egzaktnosti $I(s_n) = I_n$, za $n = 0, 1, 2, 3$, dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned}
w_1 + \phantom{2 \cdot \frac{3}{4}\, w_1'} + w_2 &= I_0 = 1, \\
\frac{3}{4}\, w_1 + \phantom{2 \cdot \frac{3}{4}\,} w_1' + w_2 x_2 &= I_1 = \frac{1}{2}, \\
\frac{3^2}{4^2}\, w_1 + \ 2 \cdot \frac{3}{4}\, w_1' + w_2 x_2^2 &= I_2 = \frac{1}{3}, \\
\frac{3^3}{4^3}\, w_1 + 3 \cdot \frac{3^2}{4^2}\, w_1' + w_2 x_2^3 &= I_3 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

U koeficijentima su **namjerno** ostavljene potencije fiksnog čvora $x_1 = 3/4$, zato da se vidi struktura jednadžbi.

Izravna eliminacija nepoznanica nekim redom (recimo, prvo w_1, zatim w_1', a na kraju w_2), vodi na **kubnu** jednadžbu za preostalu nepoznanicu (recimo, za čvor x_2). Od 3 rješenja, još treba izabrati ono "pravo", a zatim napraviti supstituciju unatrag.

Umjesto toga, zgodnije je eliminirati potencije **nepoznatog** čvora x_2 na **lijevoj** strani sustava, tj. članove oblika $w_2 x_2^k$. Od druge jednadžbe oduzmemo prvu pomnoženu s x_2, od treće oduzmemo drugu pomnoženu s x_2 a od četvrte oduzmemo treću pomnoženu s x_2. Dobijemo novu drugu, treću i četvrtu jednadžbu, oblika

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{3}{4} - x_2\Big) w_1 + \phantom{\frac{3}{4}\Big(3 \cdot \frac{3}{4} - 2x_2\Big)} w_1' &= \frac{1}{2} - x_2, \\
\frac{3}{4}\Big(\frac{3}{4} - x_2\Big) w_1 + \quad \Big(2 \cdot \frac{3}{4} - x_2\Big) w_1' &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\, x_2, \\
\frac{3^2}{4^2}\Big(\frac{3}{4} - x_2\Big) w_1 + \frac{3}{4}\Big(3 \cdot \frac{3}{4} - 2x_2\Big) w_1' &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\, x_2.
\end{aligned}$$

Eliminirali smo težinu w_2, a sve tri jednadžbe su **linearne** u nepoznatom čvoru x_2 — nema više kvadratnog i kubnog člana. Nije bitno što je x_2 i na desnoj strani.

Baš **ovaj** oblik je zgodan za nastavak eliminacije, jer sve tri jednadžbe imaju član

$$\Big(\frac{3}{4} - x_2\Big) w_1.$$

Njega eliminiramo u sljedećem koraku. Od (nove) treće jednadžbe oduzmemo (novu) drugu pomnoženu s $x_1 = 3/4$, a od (nove) četvrte oduzmemo (novu) treću pomnoženu s $x_1 = 3/4$.

Dobivene dvije jednadžbe sadrže samo w_1' i x_2. Kad sredimo faktore uz w_1' i desne strane, te dvije jednadžbe su

$$\begin{aligned} \Big(\frac{3}{4} - x_2\Big) w_1' &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\, x_2 - \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2} - x_2\Big) = \frac{1}{4}\, x_2 - \frac{1}{24}, \\ \frac{3}{4}\Big(\frac{3}{4} - x_2\Big) w_1' &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\, x_2 - \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\, x_2\Big) = \frac{1}{24}\, x_2. \end{aligned}$$

Opet, ovaj oblik je zgodan za zadnji korak eliminacije, jer obje jednadžbe imaju član

$$\Big(\frac{3}{4} - x_2\Big) w_1'.$$

Od zadnje jednadžbe oduzmemo prethodnu pomnoženu s $x_1 = 3/4$, tako da lijeva strana postane nula. Dobivamo jednadžbu

$$\frac{1}{24}\, x_2 - \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{4}\, x_2 - \frac{1}{24}\Big) = 0.$$

Sad sredimo i riješimo ovu **linearnu** jednadžbu za x_2

$$\begin{aligned} \Big(\frac{1}{24} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\Big) x_2 &= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{24} \\ \frac{2-9}{48}\, x_2 &= -\frac{1}{32} \\ -\frac{7}{48}\, x_2 &= -\frac{1}{32} \\ x_2 &= \frac{48}{7\cdot 32} = \frac{3}{14}. \end{aligned}$$

Težine w_1, w_1' i w_2 računaju se supstitucijom unatrag.

— • —

Zadatak 8.7.2. (NM 2008, popravni kolokvij, 5. zadatak, grupa B)

Odredite težine w_1, w_2, w_2' i čvor x_1 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 (1-x)^2\, f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1) + w_2' f'(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = (1-x)^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

Rješenje (bez postupka). Parametri integracijske formule su

$$x_1 = \frac{1}{6}, \quad w_1 = \frac{36}{125}, \quad w_2 = \frac{17}{375}, \quad w_2' = -\frac{1}{100}.$$

Tražena integracijska formula ima oblik

$$I(f) = \frac{36}{125}\, f\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{17}{375}\, f(1) - \frac{1}{100}\, f'(1).$$

U decimalnim brojevima je

$$I(f) = 0.2880000000 \cdot f(0.1666666667) + 0.0453333333 \cdot f(1) - 0.0100000000 \cdot f'(1).$$

Znamo da je dobivena integracijska formula $I(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjera egzaktnosti formule za $r_4(x) = (1-x)^4$ daje

$$I(r_4) = \frac{5}{36} \neq \frac{2}{7} = I_4.$$

U decimalnim brojevima

$$I_4 = 0.1428571429, \quad I(r_4) = 0.1388888889, \quad I_4 - I(r_4) = 0.0039682540 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = (1-x)^{3/2}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \frac{2}{9} = 0.2222222222.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = 0.2190890230,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = 0.0031331992 = 3.1331992 \cdot 10^{-3}.$$

8.8 Formule miješanog tipa s derivacijom u varijabilnom čvoru

Zadatak 8.8.1. (NM 2019, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa B)

Odredite težine w_1, w_2, w_2' i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f(3/5) + w_2 f(x_2) + w_2' f'(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Čvor x_2 mora biti unutar intervala $[0,1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

Može li se ova integracijska formula dobiti interpolacijski, tj. kao integral nekog interpolacijskog polinoma za funkciju f? Ako može, koji su uvjeti interpolacije i kako se bira čvor x_2?

Uputa za oba dijela zadatka: Razmislite što bi bio polinom čvorova za ovu integracijsku formulu.

Rješenje. Označimo s $I(f)$ traženu integracijsku formulu

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx I(f) := w_1 f\Big(\frac{3}{5}\Big) + w_2 f(x_2) + w_2' f'(x_2).$$

Tražena formula $I(f)$ ima 4 nepoznata parametra: težine w_1, w_2, w_2' i čvor x_2. Za nalaženje tih parametara trebamo (barem) 4 jednadžbe iz uvjeta egzaktnosti. Očekujemo da je formula egzaktna na vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3 (dimenzija tog prostora je 4). Naravno, treba vidjeti može li se to postići odgovarajućim izborom parametara.

Formula $I(f)$ koristi funkciju i derivaciju u nepoznatom čvoru x_2 pa možemo uzeti da je x_2 **dvostruki** čvor. To odgovara interpolacijskom pogledu na ovu integracijsku formulu. Kad bi nepoznati čvor x_2 bio zadan, uz pretpostavku da je $x_2 \neq 3/5$, formula $I(f)$ odgovara integralu **proširenog Hermiteovog** interpolacijskog polinoma $p_f \in \mathcal{P}_2$, koji

- interpolira funkciju i njezinu derivaciju u čvoru x_2 (dvostruki čvor) i funkciju u čvoru $x_1 = 3/5$ (jednostruki čvor).

Tako dobivena formula je sigurno egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_2$. Treba vidjeti može li se čvor x_2 izabrati tako da formula $I(f)$ ima polinomni stupanj egzaktnosti strogo veći od 2.

Pretpostavimo da je $I(f)$ **egzaktna** na prostoru $\mathcal{P}_3$. Neka je ω **polinom čvorova** za ovu formulu

$$\omega(x) = \Big(x - \frac{3}{5}\Big)(x - x_2)^2 \in \mathcal{P}_3.$$

Iz egzaktnosti formule $I(f)$ na polinomu čvorova ω slijedi

$$\int_0^1 \omega(x)\,dx = w_1\,\omega\Big(\frac{3}{5}\Big) + w_2\omega(x_2) + w_2'\omega'(x_2) = 0.$$

Dakle, ako je $I(f)$ egzaktna na $\mathcal{P}_3$, onda polinom čvorova ω mora biti **ortogonalan** na konstante, tj. na sve polinome iz prostora $\mathcal{P}_0$.

Iz prethodne relacije ortogonalnosti dobivamo kvadratnu jednadžbu za čvor x_2

$$0 = \int\limits_0^1 \Big(x - \frac{3}{5}\Big)(x - x_2)^2\,dx = \int\limits_0^1 \Big(x - \frac{3}{5}\Big)\big(x^2 - 2x_2x + x_2^2\big)\,dx$$

$$= x_2^2 \int\limits_0^1 \Big(x - \frac{3}{5}\Big)\,dx - 2x_2 \int\limits_0^1 x\Big(x - \frac{3}{5}\Big)\,dx + \int\limits_0^1 x^2\Big(x - \frac{3}{5}\Big)\,dx.$$

Izračunajmo integrale u ovoj jednadžbi.

$$J_1 := \int\limits_0^1 \Big(x - \frac{3}{5}\Big)\,dx = \Big(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{5}x\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{5-6}{10} = -\frac{1}{10},$$

$$\widetilde{J}_2 := \int\limits_0^1 x\Big(x - \frac{3}{5}\Big)\,dx = \int\limits_0^1 \Big(x^2 - \frac{3}{5}x\Big)\,dx = \Big(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{10-9}{30} = \frac{1}{30},$$

$$\widetilde{J}_3 := \int\limits_0^1 x^2\Big(x - \frac{3}{5}\Big)\,dx = \int\limits_0^1 \Big(x^3 - \frac{3}{5}x^2\Big)\,dx = \Big(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20}.$$

Kad to uvrstimo u jednadžbu za x_2, izlazi

$$-\frac{1}{10}\,x_2^2 - 2\cdot\frac{1}{30}\,x_2 + \frac{1}{20} = 0.$$

Množenjem s -60 dobivamo kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima

$$6x_2^2 + 4x_2 - 3 = 0.$$

Korijeni te jednadžbe su

$$(x_2)_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+72}}{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{88}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{6},$$

ili, redom, u decimalnim brojevima

$$(x_2)_1 = \frac{-2 - \sqrt{22}}{6} = -1.1150692933, \qquad (x_2)_2 = \frac{-2 + \sqrt{22}}{6} = 0.4484026266.$$

Zbog zahtjeva da čvor x_2 mora biti u intervalu $[0, 1]$, traženi čvor je

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{22}}{6} = 0.4484026266.$$

Sad kad znamo čvorove, težinske koeficijente w_1, w_2 i w_2' dobivamo rješavanjem **linearnog sustava** reda 3, iz uvjeta egzaktnosti formule na odabranoj bazi vektorskog prostora $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2. Najbolje je uzeti početni komad Newtonove baze čvorova

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - \frac{3}{5}, \quad q_2(x) = \Big(x - \frac{3}{5}\Big)(x - x_2), \quad \omega(x),$$

jer dobivamo **trokutasti** sustav jednadžbi. Egzaktna integracija kubnog (zadnjeg) člana baze (ovdje je to baš polinom čvorova ω) već je iskorištena za nalaženje čvora x_2.

Egzaktni težinski integrali funkcija baze q_0, q_1 i q_2 su

$$J_0 := \int_0^1 dx = x\,\Big|_0^1 = 1,$$

$$J_1 := \int_0^1 \Big(x - \frac{3}{5}\Big)\,dx = \{\,\text{već smo ga izračunali}\,\} = -\frac{1}{10},$$

$$\begin{aligned}
J_2 &:= \int_0^1 \Big(x - \frac{3}{5}\Big)(x - x_2)\,dx = \int_0^1 x\Big(x - \frac{3}{5}\Big)\,dx - x_2 \int_0^1 \Big(x - \frac{3}{5}\Big)\,dx \\
&= \{\,\text{već smo ih izračunali}\,\} = \widetilde{J}_2 - x_2 J_1 = \frac{1}{30} + \frac{-2+\sqrt{22}}{6}\cdot\frac{1}{10} \\
&= \frac{2 - 2 + \sqrt{22}}{60} = \frac{\sqrt{22}}{60}.
\end{aligned}$$

Iz uvjeta egzaktne integracije dobivamo trokutasti linearni sustav reda 3

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 &= J_0 = 1 \\
w_2\Big(\frac{-2+\sqrt{22}}{6} - \frac{3}{5}\Big) + w_2' &= J_1 = -\frac{1}{10} \\
w_2'\Big(\frac{-2+\sqrt{22}}{6} - \frac{3}{5}\Big) &= J_2 = \frac{\sqrt{22}}{60} = 0.0781735960.
\end{aligned}$$

Prvo izračunamo koeficijent $x_2 - x_1$ uz w_2' u trećoj, odnosno, uz w_2 u drugoj jednadžbi.

$$\frac{-2+\sqrt{22}}{6} - \frac{3}{5} = \frac{-10 + 5\sqrt{22} - 18}{30} = \frac{-28 + 5\sqrt{22}}{30} = -0.1515973734.$$

Iz zadnje jednadžbe izlazi

$$\begin{aligned}
w_2' &= \frac{\sqrt{22}}{60}\cdot\frac{30}{-28+5\sqrt{22}} = \frac{(28+5\sqrt{22})\sqrt{22}}{2\,(5^2\cdot 22 - 28^2)} = \frac{5\cdot 22 + 28\sqrt{22}}{2\,(550 - 784)} = -\frac{55 + 14\sqrt{22}}{234} \\
&= -0.5156659002.
\end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe računamo w_2

$$\begin{aligned}
w_2 &= \Big(\frac{55 + 14\sqrt{22}}{234} - \frac{1}{10}\Big)\frac{30}{-28+5\sqrt{22}} = \frac{275 + 70\sqrt{22} - 117}{1170}\cdot\frac{30}{-28+5\sqrt{22}} \\
&= \frac{158 + 70\sqrt{22}}{39(-28+5\sqrt{22})} = -\frac{(158+70\sqrt{22})\cdot(28+5\sqrt{22})}{39\cdot 234} = -\frac{6062 + 1375\sqrt{22}}{4563} \\
&= -2.7419070063.
\end{aligned}$$

Konačno, iz prve jednadžbe dobivamo i težinu w_1

$$w_1 = 1 + \frac{6062 + 1375\sqrt{22}}{4563} = \frac{10625 + 1375\sqrt{22}}{4563} = 3.7419070063.$$

Tražena integracijska formula, u decimalnim brojevima, ima oblik

$$\begin{aligned} I(f) = \quad & 3.7419070063 \cdot f(0.6000000000) \\ & - 2.7419070063 \cdot f(0.4484026266) - 0.5156659002 \cdot f'(0.4484026266). \end{aligned}$$

Znamo da je dobivena integracijska formula $I(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjerimo još egzaktnost formule za $s_4(x) = x^4$. Egzaktna vrijednost integrala je

$$I_4 := \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

U decimalnim brojevima, egzaktna vrijednost, aproksimacija i greška su

$$I_4 = 0.2000000000, \quad I(s_4) = 0.1881380988, \quad I_4 - I(s_4) = 0.0118619012 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = x\sqrt{x}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}\,x^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{5} = 0.4000000000.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = 0.3978301885,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = 0.0021698115 = 2.1698115 \cdot 10^{-3}.$$

Sustav egzaktne integracije u standardnoj bazi potencija. U ovom slučaju, parametri integracijske formule **mogu** se dobiti i rješavanjem **nelinearnog** sustava jednadžbi iz uvjeta egzaktne integracije na standardnoj bazi potencija

$$s_n(x) = x^n, \quad n \geq 0,$$

u prostoru polinoma $\mathcal{P}_3$. Pripadni egzaktni težinski integrali su

$$I_n := \int_0^1 s_n(x)\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Iz uvjeta egzaktnosti $I(s_n) = I_n$, za $n = 0, 1, 2, 3$, dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 \qquad\qquad &= I_0 = 1, \\ \frac{3}{5}\,w_1 + w_2 x_2 + w_2' \qquad &= I_1 = \frac{1}{2}, \\ \frac{3^2}{5^2}\,w_1 + w_2 x_2^2 + 2w_2' x_2 &= I_2 = \frac{1}{3}, \\ \frac{3^3}{5^3}\,w_1 + w_2 x_2^3 + 3w_2' x_2^2 &= I_3 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

U koeficijentima su **namjerno** ostavljene potencije fiksnog čvora $x_1 = 3/5$, zato da se vidi struktura jednadžbi.

Izravna eliminacija nepoznanica nekim redom (recimo, prvo w_1, zatim w_2', a na kraju w_2), vodi na **kubnu** jednadžbu za preostalu nepoznanicu (recimo, za čvor x_2). Od 3 rješenja, još treba izabrati ono "pravo", a zatim napraviti supstituciju unatrag.

Umjesto toga, zgodnije je eliminirati potencije **nepoznatog** čvora x_2 na **lijevoj** strani sustava, tj. članove oblika $w_2 x_2^k$. Od druge jednadžbe oduzmemo prvu pomnoženu s x_2, od treće oduzmemo drugu pomnoženu s x_2 a od četvrte oduzmemo treću pomnoženu s x_2. Dobijemo novu drugu, treću i četvrtu jednadžbu, oblika

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{3}{5} - x_2\Big) w_1 + w_2' \quad &= \frac{1}{2} - x_2, \\
\frac{3}{5}\Big(\frac{3}{5} - x_2\Big) w_1 + w_2' x_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\, x_2, \\
\frac{3^2}{5^2}\Big(\frac{3}{5} - x_2\Big) w_1 + w_2' x_2^2 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\, x_2.
\end{aligned}
$$

Eliminirali smo težinu w_2 i više **nema** kubnog člana. Prve dvije jednadžbe su **linearne** u x_2, a samo treća jednadžba ima **kvadratni** faktor x_2^2, zato jer deriviramo u nepoznatom čvoru x_2. Nije bitno što je x_2 i na desnoj strani.

Baš **ovaj** oblik je zgodan za nastavak eliminacije. Mogli bismo nastaviti kao u prvom koraku, tako da množenjem s x_2 eliminiramo članove oblika $w_2' x_2^k$ na lijevoj strani. No, onda na desnoj strani odmah dobivamo **kvadratne** polinome u x_2. Zato je jednostavnije eliminirati **prvi** član, jer ima konstantne višekratnike faktora

$$
\Big(\frac{3}{5} - x_2\Big) w_1.
$$

Od (nove) treće jednadžbe oduzmemo (novu) drugu pomnoženu s $x_1 = 3/5$, a od (nove) četvrte oduzmemo (novu) treću pomnoženu s $x_1 = 3/5$. Dobivene dvije jednadžbe sadrže samo w_2' i x_2. Kad sredimo faktore uz w_2' i desne strane, te dvije jednadžbe su

$$
\begin{aligned}
w_2'\Big(x_2 - \frac{3}{5}\Big) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\, x_2 - \frac{3}{5}\Big(\frac{1}{2} - x_2\Big) = \frac{1}{30} + \frac{1}{10}\, x_2, \\
w_2' x_2 \Big(x_2 - \frac{3}{5}\Big) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\, x_2 - \frac{3}{5}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\, x_2\Big) = \frac{1}{20} - \frac{1}{30}\, x_2.
\end{aligned}
$$

Opet, ovaj oblik je zgodan za zadnji korak eliminacije, jer obje jednadžbe imaju član

$$
w_2'\Big(x_2 - \frac{3}{5}\Big).
$$

Od zadnje jednadžbe oduzmemo prethodnu pomnoženu s x_2, tako da lijeva strana postane nula. Dobivamo **kvadratnu** jednadžbu za x_2

$$
\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\, x_2 - x_2\Big(\frac{1}{30} + \frac{1}{10}\, x_2\Big) = 0.
$$

Sređivanjem izlazi jednadžba

$$
-\frac{1}{10}\, x_2^2 - \frac{1}{15}\, x_2 + \frac{1}{20} = 0.
$$

Kad nađemo rješenje za x_2 (kao ranije), težine w_1, w_2 i w_2' računaju se supstitucijom unatrag.

Zadatak 8.8.2. (NM 2019, 2. kolokvij, 4. zadatak, grupa A)

Odredite težine w_1, w_2, w_2' i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f(5/7) + w_2 f(x_2) + w_2' f'(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Čvor x_2 mora biti unutar intervala $[0,1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^2\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

Može li se ova integracijska formula dobiti interpolacijski, tj. kao integral nekog interpolacijskog polinoma za funkciju f? Ako može, koji su uvjeti interpolacije i kako se bira čvor x_2?

Uputa za oba dijela zadatka: Razmislite što bi bio polinom čvorova za ovu integracijsku formulu.

Rješenje (bez postupka). Kad bi nepoznati čvor x_2 bio zadan, uz pretpostavku da je $x_2 \neq 5/7$, formula $I(f)$ odgovara integralu **proširenog Hermiteovog** interpolacijskog polinoma $p_f \in \mathcal{P}_2$, koji

- interpolira funkciju i njezinu derivaciju u čvoru x_2 (dvostruki čvor) i funkciju u čvoru $x_1 = 5/7$ (jednostruki čvor).

Polinom čvorova ω za ovu formulu je

$$\omega(x) = \left(x - \frac{5}{7}\right)(x - x_2)^2 \in \mathcal{P}_3.$$

Čvor x_2 bira se tako da polinom čvorova ω bude **ortogonalan** na konstante. Kvadratna jednadžba za čvor x_2 je

$$-\frac{3}{14}\,x_2^2 + 2\cdot\frac{1}{42}\,x_2 + \frac{1}{84} = 0 \quad \text{ili} \quad 18x_2^2 - 4x_2 - 1 = 0.$$

Korijeni te jednadžbe su

$$(x_2)_1 = \frac{2-\sqrt{22}}{18} = -0.1494675422, \qquad (x_2)_2 = \frac{2+\sqrt{22}}{18} = 0.3716897644.$$

Zbog zahtjeva da čvor x_2 mora biti u intervalu $[0,1]$, traženi čvor je

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{22}}{18} = 0.3716897644.$$

Preostali parametri integracijske formule (težine) su

$$w_1 = 0.8502612443, \quad w_2 = 0.1497387557, \quad w_2' = -0.1629858230.$$

Tražena integracijska formula, u decimalnim brojevima, ima oblik

$$\begin{aligned} I(f) = {} & 0.8502612443 \cdot f(0.7142857143) \\ & + 0.1497387557 \cdot f(0.3716897644) - 0.1629858230 \cdot f'(0.3716897644). \end{aligned}$$

Znamo da je dobivena integracijska formula $I(f)$ egzaktna na prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma stupnja najviše 3. Provjera egzaktnosti formule za $s_4(x) = x^4$. U decimalnim brojevima, egzaktna vrijednost, aproksimacija i greška su

$$I_4 = 0.2000000000, \quad I(s_4) = 0.1907105487, \quad I_4 - I(s_4) = 0.0092894513 \neq 0.$$

Dakle, polinomni stupanj egzaktnosti formule $I(f)$ je $d = 3$.

Za $f(x) = x^2\sqrt{x}$, egzaktna vrijednost integrala je

$$I_f := \frac{2}{7} = 0.2857142857.$$

Približna vrijednost po integracijskoj formuli je

$$I(f) = 0.2869118711,$$

s greškom

$$I_f - I(f) = -0.0011975853 = -1.1975853 \cdot 10^{-3}.$$

9 Rješavanje nelinearnih jednadžbi

9.1 Newtonova metoda (bez bisekcije)

Zadatak 9.1.1. (NM 2009, 2. kolokvij, 5. zadatak, grupa D)

Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$xe^{-x} + 1 = 2x\sqrt{x}$$

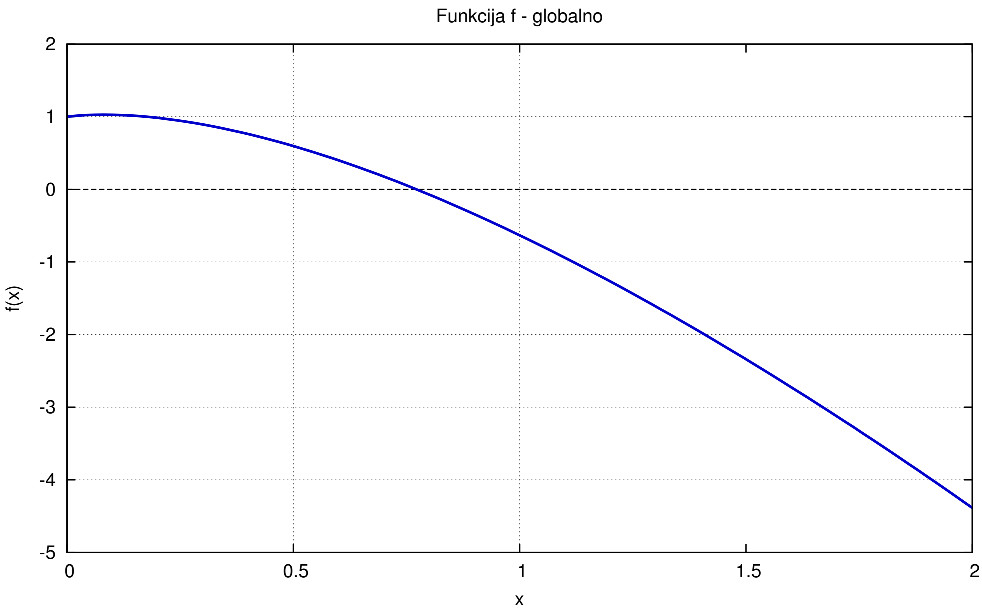
s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem 1/2.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

Rješenje. Jednadžbu pišemo u obliku $f(x) = 0$, gdje je

$$f(x) = xe^{-x} + 1 - 2x\sqrt{x}.$$

Globalno ponašanje funkcije f ilustrirano je grafom na sljedećoj slici.



Derivacije funkcije f su redom

$$f'(x) = (1-x)e^{-x} - 3\sqrt{x}$$

$$f''(x) = (x-2)e^{-x} - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$f'''(x) = (3-x)e^{-x} + \frac{3}{4x^{3/2}}.$$

Domena funkcije f je interval $[0, \infty)$, a za $x = 0$ imamo redom

$$f(0) = 1 > 0, \quad f'(0) = 1 > 0, \quad \lim_{x \to 0} f''(x) = -\infty.$$

Osim toga, vrijedi $f(x) \to -\infty$, za $x \to \infty$, pa postoji barem jedna pozitivna nultočka funkcije f.

S druge strane, iz oblika f i f', isplati se pogledati vrijednosti za $x = 1$. Dobivamo

$$f(1) = e^{-1} + 1 - 2 < 0, \quad f'(1) = -3 < 0, \quad f''(1) = -e^{-1} - \frac{3}{2} < 0,$$

pa vidimo da funkcija f, ali i prva derivacija f', imaju nultočku u intervalu $[0, 1]$. Dakle, najmanje rješenje zadane jednadžbe sigurno se nalazi u $[0, 1]$.

Za $x \in (0, 1]$, oba člana u f'' su negativna, a oba člana u f''' su pozitivna, pa je $f'' < 0$ i $f''' > 0$ na $(0, 1]$. Zato je prva derivacija f' strogo monotono padajuća funkcija na $[0, 1]$, tj. f je konkavna. Dakle, f' ima točno jednu nultočku ξ_1 na $[0, 1]$, i to je točka maksimuma za f.

Zbog $f(0) > 0$ i $f(1) < 0$, slijedi da i funkcija f ima točno jednu nultočku ξ u intervalu $[0, 1]$, i vrijedi $\xi > \xi_1$. To je i tražena najmanja nultočka.

Nažalost, zbog $f'(\xi_1) = 0$, nemamo dovoljne uvjete za sigurnu konvergenciju Newtonove metode na $[0, 1]$, već treba smanjiti interval. Uzmimo $x = 1/2$ (bisekcija). Vrijedi

$$f(1/2) = \frac{1}{2\sqrt{e}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.5961585487 > 0,$$

Zbog

$$f(1) = e^{-1} + 1 - 2 = -0.6321205588 > 0,$$

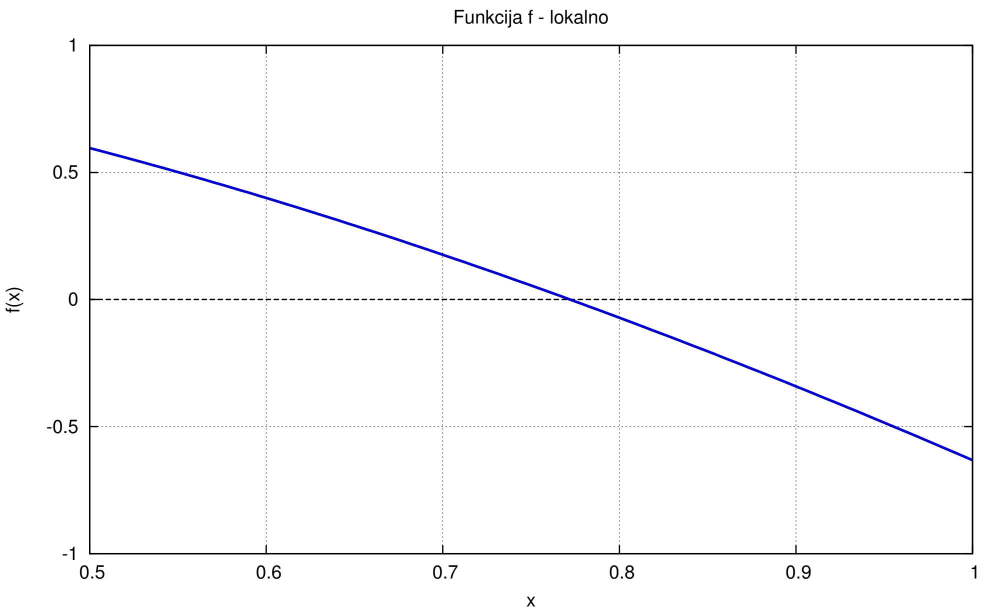
slijedi da se jedina nultočka funkcije f nalazi u intervalu $[1/2, 1]$.

Za prvu derivaciju u točki $x = 1/2$ dobivamo

$$f'(1/2) = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -1.8180550137 < 0,$$

pa zaključujemo da je $\xi_1 < 1/2$, tj. vrijedi $f' < 0$ na $[1/2, 1]$.

Graf funkcije f na tom intervalu prikazan je na sljedećoj slici.



Na $[a, b] = [1/2, 1]$ vrijedi

$$f(1/2) > 0, \quad f(1) < 0, \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0,$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju Newtonove metode.

Startnu točku x_0 treba odabrati tako da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Zbog $f'' < 0$, mora biti $f(x_0) < 0$, pa uzimamo $x_0 = 1$.

Za ocjenu greške i kriterij zaustavljanja iteracija trebamo

$$m_1 = \min_{x\in[1/2,1]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x\in[1/2,1]} |f''(x)|.$$

Zbog $f' < 0$, $f'' < 0$ i $f''' > 0$ na $[1/2, 1]$, odmah slijedi da je

$$m_1 = |f'(1/2)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right| = 1.8180550137$$
$$M_2 = |f''(1/2)| = \left| -\frac{3}{2\sqrt{e}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right| = 3.0311163331.$$

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-6}$, kriterij zaustavljanja je

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.0010952599 = 1.0952599 \cdot 10^{-3}.$$

Tablica iteracija u Newtonovoj metodi:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} - x_n$
0	1.0000000000	−0.6321205588	−3.0000000000	−0.2107068529
1	0.7892931471	−0.0439804630	−2.5695693232	−0.0171158889
2	0.7721772582	−0.0003295971	−2.5309530242	−0.0001302265
3	0.7720470317			

Aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$ je

$$x_3 = 0.7720470317.$$

Točno rješenje je $\xi = 0.7720470241$.

—— • ——

Zadatak 9.1.2. (NM 2011, 2. kolokvij, 5. zadatak, grupa C)

Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$(x-2)e^x = x + 1$$

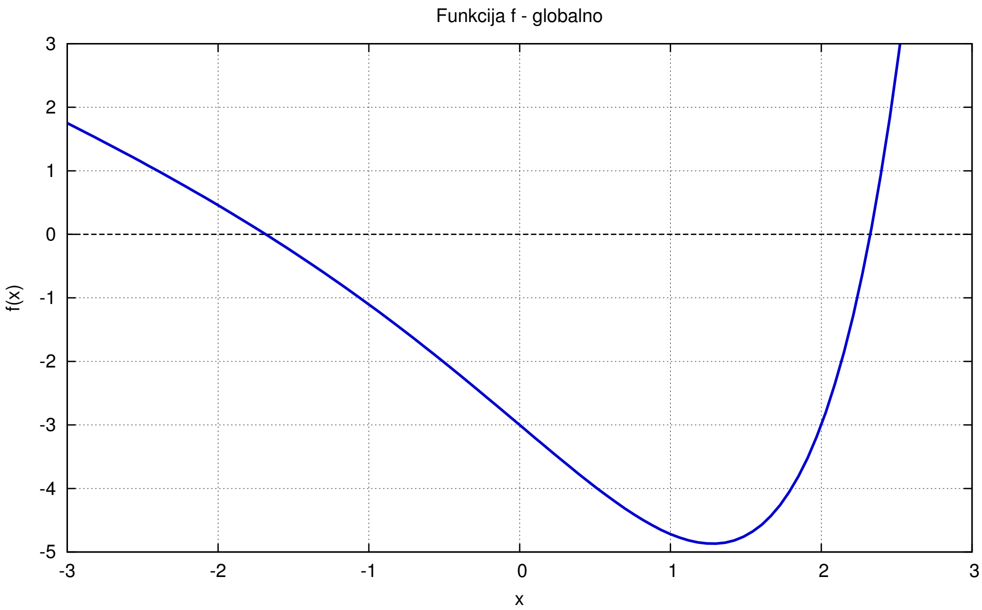
s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

Rješenje. Jednadžbu pišemo u obliku $f(x) = 0$, gdje je

$$f(x) = (x-2)e^x - x - 1.$$

Globalno ponašanje funkcije f ilustrirano je grafom na sljedećoj slici.



Derivacije funkcije f su redom

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)e^x - 1 \\ f''(x) &= xe^x \\ f'''(x) &= (x+1)e^x. \end{aligned}$$

Pogledajmo ponašanje funkcije i njezinih derivacija za $x \to \pm\infty$. Za $x \to \infty$, očito, vrijedi

$$f(x) \to \infty, \quad f'(x) \to \infty, \quad f''(x) \to \infty, \quad f'''(x) \to \infty,$$

jer eksponencijalna funkcija (pa još pomnožena pozitivnim rastućim faktorom, za velike x) raste brže od bilo kojeg polinoma.

Za $x \to -\infty$, eksponencijalna funkcija "trne" u nulu brže, no što raste bilo koji polinom, tj. za bilo koji polinom p vrijedi

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) \cdot e^x = 0.$$

Zato, za $x \to -\infty$ vrijedi

$$f(x) \to \infty, \quad f'(x) \to -1, \quad f''(x) \to 0, \quad f'''(x) \to 0.$$

Još preciznije, pravac $y = -x - 1$ je "kosa" asimptota funkcije f, a konstanta $y = -1$ je horizontalna asimptota derivacije f', kad $x \to -\infty$.

Zbog $f(0) = -3 < 0$, funkcija f ima **barem dvije** realne nultočke. Tvrdimo da f ima točno **dvije** nultočke na $\mathbb{R}$.

Druga derivacija, očito, ima točno jednu nultočku, za $x = 0$. Zato prva derivacija može imati najviše dvije nultočke. No, f' ima različite predznake na limesima $x \to \pm\infty$, pa onda ne može imati dvije, već točno **jednu** nultočku. Zato f ima najviše dvije nultočke, pa onda ima točno dvije. Dodatno, znamo da je jedna negativna, a druga pozitivna.

Pošto tražimo **najmanju** nultočku, ona je sigurno **negativna** i dovoljno je gledati interval $(-\infty, 0]$. Za precizniju lokaciju, pogledajmo vrijednost funkcije za $x = -1$. Dobivamo

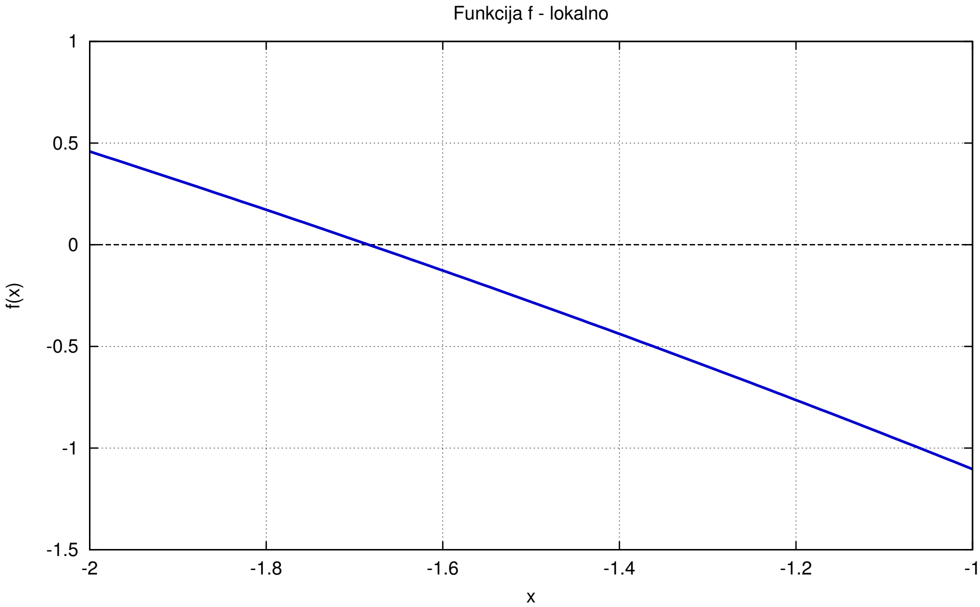
$$f(-1) = -3e^{-1} + 1 - 1 = -3e^{-1} = -1.1036383235 < 0.$$

Dakle, tražena nultočka je u $(-\infty, -1]$. Za $x = -2$ dobivamo

$$f(-2) = -4e^{-2} + 2 - 1 = -4e^{-2} + 1 = 0.4586588671 > 0.$$

Dakle, najmanja nultočka funkcije f nalazi se u intervalu $[-2, -1]$.

Graf funkcije f na tom intervalu prikazan je na sljedećoj slici.



Provjerimo još da taj interval zadovoljava sve pretpostavke za globalnu konvergenciju Newtonove metode. Treća derivacija f''', očito, ima jedinu nultočku za $x = -1$. Zato je $f'''(x) < 0$ za $x < -1$, pa druga derivacija tada pada. Već znamo da druga derivacija ima jedinu nultočku u $x = 0$, pa za $x < 0$ vrijedi $f''(x) < 0$, zbog pozitivnosti kad $x \to \infty$.

Na kraju, znamo da prva derivacija ima točno jednu nultočku, pa je dovoljno provjeriti njezine predznake na rubovima intervala $[-2, -1]$. Dobivamo

$$f'(-2) = -3 \cdot e^{-2} - 1 = -1.4060058497$$
$$f'(-1) = -2 \cdot e^{-1} - 1 = -1.7357588823,$$

pa je f' sigurno negativna, tj. f pada na ovom intervalu.

Na $[a, b] = [-2, -1]$ vrijedi

$$f(-2) > 0, \quad f(-1) < 0, \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0,$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju Newtonove metode.

Startnu točku x_0 treba odabrati tako da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Zbog $f'' < 0$, mora biti $f(x_0) < 0$, pa uzimamo $x_0 = -1$.

Za ocjenu greške i kriterij zaustavljanja iteracija trebamo

$$m_1 = \min_{x \in [-2,-1]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [-2,-1]} |f''(x)|.$$

Zbog $f' < 0$, $f'' < 0$ i $f''' < 0$ na $[-2, -1]$, odmah slijedi da je

$$m_1 = |f'(-2)| = |-3 \cdot e^{-2} - 1| = 1.4060058497$$
$$M_2 = |f''(-1)| = |-e^{-1}| = 0.3678794412.$$

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-5}$, kriterij zaustavljanja je

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.0087429059 = 8.7429059 \cdot 10^{-3}.$$

Tablica iteracija u Newtonovoj metodi:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} - x_n$
0	-1.0000000000	-1.1036383235	-1.7357588823	-0.6358246729
1	-1.6358246729	-0.0724036712	-1.5134366784	-0.0478405686
2	-1.6836652414	-0.0003623695	-1.4983354901	-0.0002418480
3	-1.6839070894			

Aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$ je

$$x_3 = -1.6839070894.$$

Točno rješenje je $\xi = -1.6839070955$.

9.2 Newtonova metoda i metoda bisekcije

Zadatak 9.2.1. (NM 2012, 2. kolokvij, 5. zadatak, grupa B)

Nađite najveće negativno rješenje jednadžbe

$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

—— • ——

Uvod u rješenje — lokacija rješenja ili nultočke, derivacije za ocjenu greške. Jednadžbu pišemo u obliku $f(x) = 0$, gdje je

$$f(x) = \operatorname{tg} x + ax^2 + bx + c = \operatorname{tg} x + g(x),$$

s tim da je $g(x) = ax^2 + bx + c$ kvadratni (ili parabolni) član u funkciji f (uz $a \neq 0$).

Na bilo kojem konačnom intervalu parabolni član $g(x)$ je **ograničen**, pa funkcija f ima **vertikalne** asimptote na **istim** mjestima gdje i $\operatorname{tg} x$, tj. u točkama oblika

$$x_0^{(k)} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Na bilo kojem otvorenom intervalu između susjednih asismptota, oblika

$$I_k = \left(x_0^{(k-1)}, x_0^{(k)}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$\operatorname{tg} x$ **raste** od $-\infty$ do $+\infty$, tj. poprima **sve** realne vrijednosti, pa to vrijedi i za funkciju f

$$\lim_{x \searrow x_0^{(k-1)}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \nearrow x_0^{(k)}} f(x) = +\infty.$$

Funkcija f je neprekidna na svakom takvom intervalu, pa onda mora imati **barem** jednu (realnu) nultočku (može ih biti i više). Preciznija lokacija tražene nultočke (najmanja pozitivna ili najveća negativna) ovisi o ponašanju parabolnog člana, no sigurno je $k \in \{-1, 0, 1\}$.

Za ocjenu greške u Newtonovoj metodi treba naći prve 3 derivacije funkcije f.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + 2ax + b \\
f''(x) &= \frac{-2}{\cos^3 x}(-\sin x) + 2a = 2\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + a\right) \\
f'''(x) &= 2\left(\frac{\cos x}{\cos^3 x} + \sin x \cdot \frac{-3}{\cos^4 x}(-\sin x)\right) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 3\,\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\right) \\
&= 2\,\frac{\cos^2 x + 3\,\sin^2 x}{\cos^4 x} = 2\,\frac{1 + 2\,\sin^2 x}{\cos^4 x}.
\end{aligned}$$

Drugu i treću derivaciju možemo napisati i preko $\operatorname{tg} x$ (umjesto $\sin x$)

$$f''(x) = 2\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + a\right), \qquad f'''(x) = 2\,\frac{1 + 3\,\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}.$$

Odmah vidimo da je f''' uvijek **pozitivna** na I_k, tj. f'' **raste** na I_k (kao i $\operatorname{tg} x$), pa f'' ima **točno** jednu nultočku $x_{2,k}$ na I_k. Možemo ju i "pobliže" locirati, obzirom na predznak parametra a — za $a > 0$ vrijedi $x_{2,k} < k\pi$, odnosno, za $a < 0$ vrijedi $x_{2,k} > k\pi$.

—— • ——

Rješenje. Jednadžbu pišemo u obliku $f(x) = 0$, gdje je

$$f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

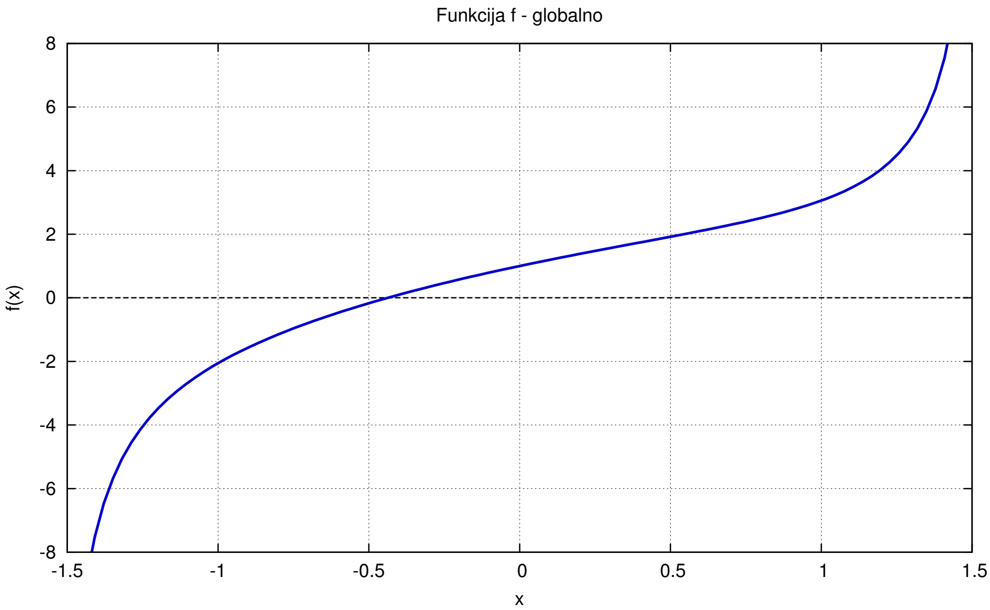
Odmah vidimo da funkcija f ima **vertikalne** asimptote u **istim** točkama kao i $\operatorname{tg} x$.

Tražimo najveću negativnu nultočku funkcije f, pa gledamo samo interval $(-\infty, 0]$. Zbog neprekidnosti funkcije f na $(-\pi/2, 0]$ i

$$f(0) = 1 > 0, \qquad \lim_{x \searrow -\pi/2} f(x) = -\infty,$$

tražena nultočka se sigurno nalazi u intervalu $(-\pi/2, 0]$.

Globalno ponašanje funkcije f ilustrirano je grafom na sljedećoj slici.

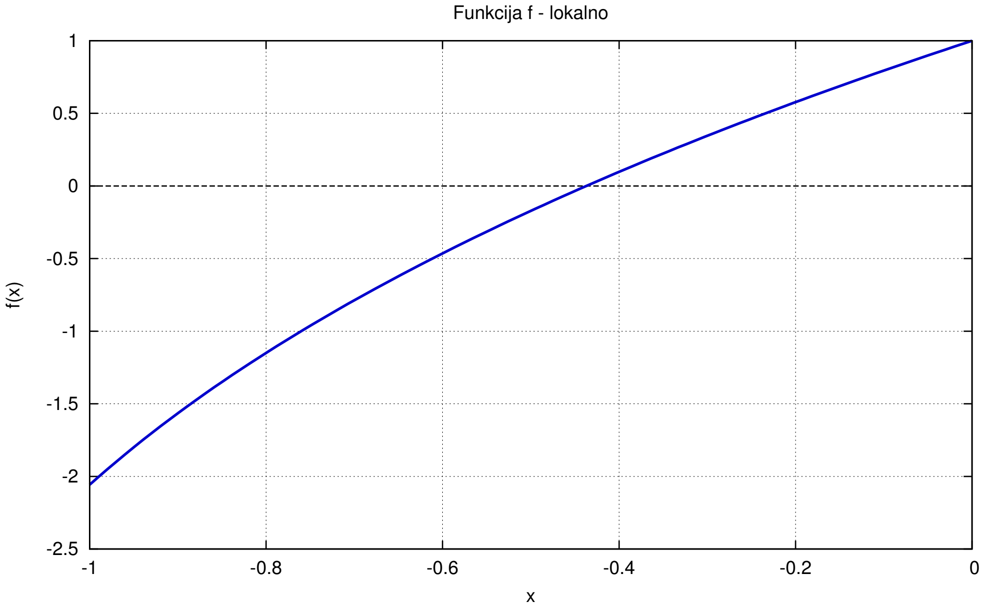


Dodatno, zbog

$$f(-1) = \operatorname{tg}(-1) - \frac{1}{2} - 1 + 1 = -\operatorname{tg} 1 - \frac{1}{2} = -2.0574077247 < 0,$$

funkcija f ima najveću negativnu nultočku u intervalu $[-1, 0]$.

Graf funkcije f na "zanimljivom" dijelu domene prikazan je na sljedećoj slici.



Derivacije funkcije f su redom

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} - x + 1 \\
f''(x) &= \frac{-2}{\cos^3 x}(-\sin x) - 1 = 2\,\frac{\sin x}{\cos^3 x} - 1 = 2\,\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - 1 \\
f'''(x) &= 2\left(\frac{\cos x}{\cos^3 x} + \sin x \cdot \frac{-3}{\cos^4 x}(-\sin x)\right) = 2\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 3\,\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\right) \\
&= 2\,\frac{\cos^2 x + 3\,\sin^2 x}{\cos^4 x} = 2\,\frac{1 + 2\,\sin^2 x}{\cos^4 x} = 2\,\frac{1 + 3\,\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}.
\end{aligned}
$$

Odmah vidimo da je f''' uvijek pozitivna, čim je definirana, tj. f'' uvijek **raste**. Nadalje, gledamo samo ponašanje za $x \in [-1, 0]$. Tada je $\operatorname{tg} x \leq 0$, pa je i $f''(x) < 0$ (dovoljno je $f''(0) = -1 < 0$, jer f'' raste). Odavde slijedi da f' **pada** i očito je $f'(x) > 0$ (opet, dovoljno je $f'(0) = 2 > 0$). Na kraju, vidimo da f monotono **raste**, pa ima točno **jednu** nultočku u intervalu $[-1, 0]$. To je, ujedno, i tražena **najveća negativna** nultočka.

Na $[a, b] = [-1, 0]$ vrijedi

$$
f(-1) < 0, \quad f(0) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,
$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju Newtonove metode.

Startnu točku x_0 treba odabrati tako da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Zbog $f'' < 0$, mora biti $f(x_0) < 0$, pa uzimamo $x_0 = -1$.

Za ocjenu greške i kriterij zaustavljanja iteracija trebamo

$$
m_1 = \min_{x \in [-1,0]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [-1,0]} |f''(x)|.
$$

Zbog $f' > 0$, $f'' < 0$ i $f''' > 0$ na $[-1, 0]$, odmah slijedi da je

$$
\begin{aligned}
m_1 &= |f'(0)| = \frac{1}{\cos^2 0} - 0 + 1 = 2 \\
M_2 &= |f''(-1)| = 2\,\frac{\operatorname{tg} 1}{\cos^2 1} + 1 = 11.6698589450.
\end{aligned}
$$

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, kriterij zaustavljanja je

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.0058545995 = 5.8545995 \cdot 10^{-3}.$$

Tablica iteracija u Newtonovoj metodi:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} - x_n$
0	-1.0000000000	-2.0574077247	5.4255188208	0.3792093978
1	-0.6207906022	-0.5285843144	3.1321632265	0.1687601431
2	-0.4520304591	-0.0397580056	2.6878006999	0.0147920215
3	-0.4372384376	-0.0002384430	2.6557117420	0.0000897850
4	-0.4371486527			

Aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ je

$$x_4 = -0.4371486527.$$

Točno rješenje je $\xi = -0.4371486494$.

Newtonova metoda — manji interval. Interval možemo još "skratiti" na dozvoljenu duljinu 1/2, tako da provjerimo polovište intervala $x = -1/2$ (bisekcija). Onda je

$$f(-1/2) = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = -\operatorname{tg}\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = -0.1713024898 < 0.$$

Dakle, funkcija f ima najveću negativnu nultočku u intervalu $[-1/2, 0]$.

Na $[a, b] = [-1/2, 0]$ vrijedi

$$f(-1/2) < 0, \quad f(0) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju Newtonove metode.

Startnu točku x_0 treba odabrati tako da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Zbog $f'' < 0$, mora biti $f(x_0) < 0$, pa uzimamo $x_0 = -1/2$.

Za ocjenu greške i kriterij zaustavljanja iteracija trebamo

$$m_1 = \min_{x\in[-1/2,0]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x\in[-1/2,0]} |f''(x)|.$$

Zbog $f' > 0$, $f'' < 0$ i $f''' > 0$ na $[-1/2, 0]$, odmah slijedi da je

$$m_1 = |f'(0)| = \frac{1}{\cos^2 0} - 0 + 1 = 2$$

$$M_2 = |f''(-1/2)| = 2\,\frac{\operatorname{tg}(1/2)}{\cos^2(1/2)} + 1 = 2.4186890139.$$

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, kriterij zaustavljanja je

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.0128599707 = 1.28599707 \cdot 10^{-2}.$$

Tablica iteracija u Newtonovoj metodi:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} - x_n$
0	-0.5000000000	-0.1713024898	2.7984464104	0.0612134251
1	-0.4387865749	-0.0043524151	2.6590281367	0.0016368443
2	-0.4371497305			

Aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ je

$$x_2 = -0.4371497305.$$

Točno rješenje je $\xi = -0.4371486494$.

Rješenje metodom bisekcije. Na intervalu $[a, b] = [-1, 0]$ vrijedi

$$f(-1) < 0, \quad f(0) > 0, \quad f'(x) > 0,$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju metode bisekcije, s tim da možemo koristiti i dinamički kriterij zaustavljanja na funkcijsku vrijednost (preko m_1).

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, kriterij zaustavljanja potrebnim brojem iteracija $n_{\max}$ je

$$n_{\max} \geq \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} - 1 = 12.2877123795 \quad \Longrightarrow \quad n_{\max} = 13.$$

Dinamički kriterij zaustavljanja na funkcijsku vrijednost je

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon = 0.0002000000 = 2.0 \cdot 10^{-4}.$$

Tablica iteracija u metodi bisekcije, uz oznaku $z = f(a_n) \cdot f(x_n)$ (treba nam samo predznak):

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z
0	-1.0000000000	0.0000000000	-0.5000000000	-0.1713024898	> 0
1	-0.5000000000	0.0000000000	-0.2500000000	0.4634080788	< 0
2	-0.5000000000	-0.2500000000	-0.3750000000	0.1610609241	< 0
3	-0.5000000000	-0.3750000000	-0.4375000000	-0.0009331505	> 0
4	-0.4375000000	-0.3750000000	-0.4062500000	0.0810504213	< 0
5	-0.4375000000	-0.4062500000	-0.4218750000	0.0403123829	< 0
6	-0.4375000000	-0.4218750000	-0.4296875000	0.0197539776	< 0
7	-0.4375000000	-0.4296875000	-0.4335937500	0.0094266218	< 0
8	-0.4375000000	-0.4335937500	-0.4355468750	0.0042508026	< 0
9	-0.4375000000	-0.4355468750	-0.4365234375	0.0016598447	< 0
10	-0.4375000000	-0.4365234375	-0.4370117188	0.0003636020	< 0
11	-0.4375000000	-0.4370117188	-0.4372558594	-0.0002847105	> 0
12	-0.4372558594	-0.4370117188	-0.4371337891	0.0000394617	< 0

Zbog $|f(x_{12})| \leq m_1\varepsilon$, aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ je

$$x_{12} = -0.4371337891.$$

Točno rješenje je $\xi = -0.4371486494$.

——— • ———

Zadatak 9.2.2. (NM 2011, popravni kolokvij, 6. zadatak, grupa B)

Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$\operatorname{sh} x = 1 + \frac{2}{x+1}$$

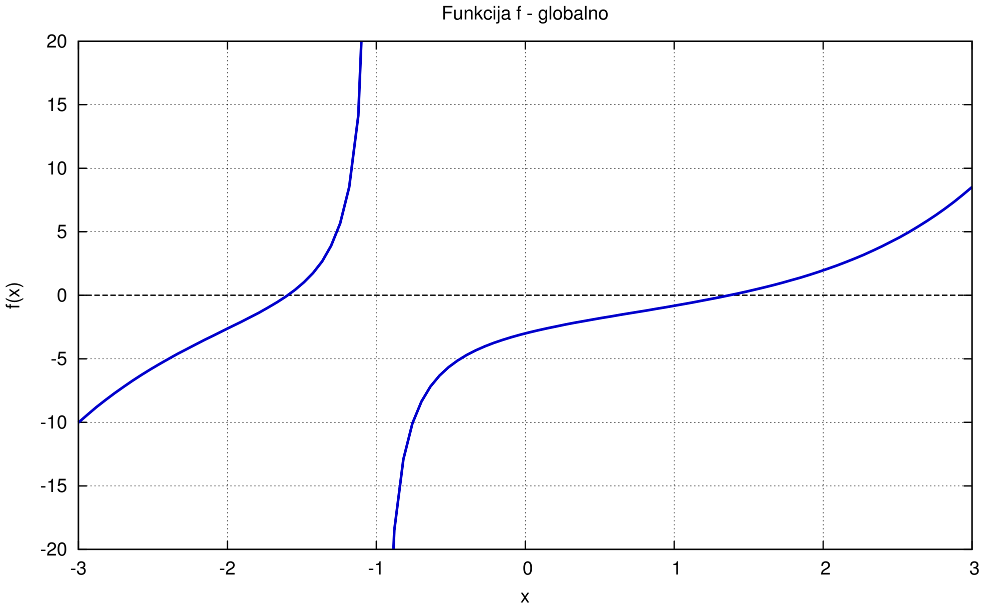
s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

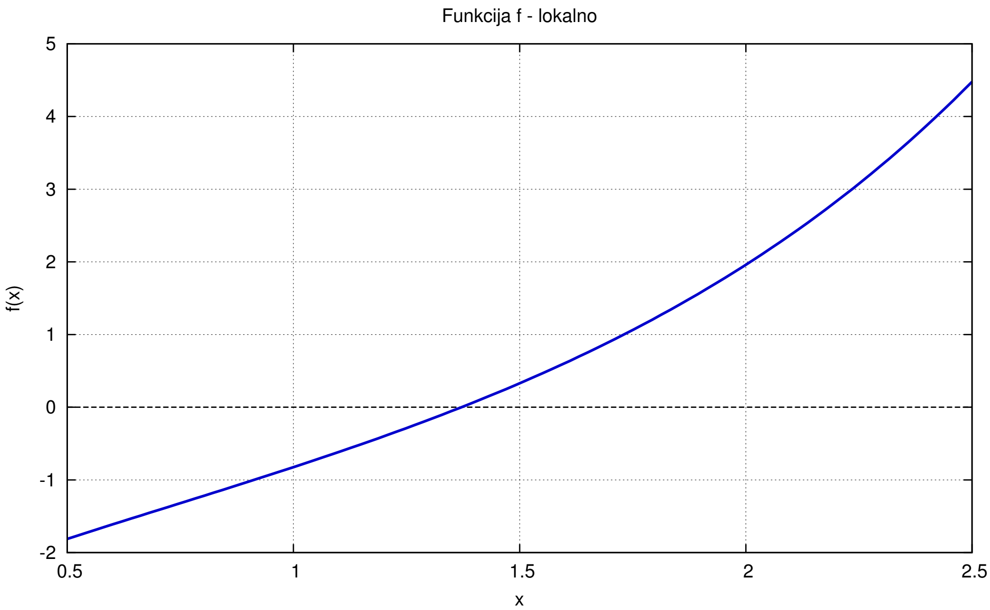
Rješenje. Jednadžbu pišemo u obliku $f(x) = 0$, gdje je

$$f(x) = \operatorname{sh} x - 1 - \frac{2}{x+1}.$$

Globalno ponašanje funkcije f ilustrirano je grafom na sljedećoj slici.



Funkcija f ima vertikalnu asimptotu u $x = -1$ i oko nje **mijenja** predznak, ali **nema** nultočku. Graf funkcije f na "zanimljivom" dijelu domene prikazan je na sljedećoj slici.



Derivacije funkcije f su redom

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{ch} x + \frac{2}{(x+1)^2} \\ f''(x) &= \operatorname{sh} x - \frac{4}{(x+1)^3} \\ f'''(x) &= \operatorname{ch} x + \frac{12}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Pogledajmo ponašanje funkcije i njezinih derivacija za $x \to \pm\infty$. Zadnji (racionalni) član tad teži prema nuli

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{c}{(x+1)^n} = 0,$$

za svaku konstantu $c \in \mathbb{R}$ i svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$. Zato je predznak u $\pm\infty$ određen ponašanjem neograničenog prvog člana $\operatorname{sh} x$, odnosno, $\operatorname{ch} x$. Malo nekorektno zapisano, vrijedi

$$\lim_{x\to-\infty} f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = +\infty, \quad k \geq 0.$$

Za $k = 0$, tj. za funkciju f, to znači da je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

U okolini točke $x = -1$ (vertikalne asimptote), predznak funkcije određen je predznakom neograničenog zadnjeg člana $-2/(x+1)$. Stoga, za limese slijeva i zdesna vrijedi

$$\lim_{x\nearrow-1} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\searrow-1} f(x) = -\infty.$$

Dakle, funkcija mijenja znak na intervalu $(-\infty, -1)$ i na intervalu $(-1, +\infty)$, tj. ima barem dvije nultočke. Onda je **najveća** nultočka sigurno veća od -1. U točki $x = 0$ je

$$f(0) = \operatorname{sh} 0 - 1 - 2 = -3 < 0.$$

Zato je najveća nultočka sigurno **pozitivna** i dovoljno je gledati interval $[0, +\infty)$.

Zbog $\operatorname{ch} x > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, iz oblika prve i treće derivacije odmah vidimo da je

$$x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0, f'''(x) > 0.$$

Odavde slijedi da f monotono raste, pa ima točno **jednu** pozitivnu nultočku, i to je tražena **najveća** nultočka. Međutim, druga derivacija f'' mijenja predznak na $[0, +\infty)$, pa treba pobliže locirati nultočku (za Newtonovu metodu). Zbog $f''' > 0$, druga derivacija, također, raste i ima točno jednu pozitivnu nultočku.

Za precizniju lokaciju, pogledajmo vrijednost funkcije za $x = 1$. Dobivamo

$$f(1) = \operatorname{sh} 1 - 1 - 1 = \operatorname{sh} 1 - 2 = -0.8247988064 < 0,$$

pa je najveća nultočka funkcije f veća od 1. Za $x = 2$ izlazi

$$f(2) = \operatorname{sh} 2 - 1 - \frac{2}{3} = \operatorname{sh} 2 - \frac{5}{3} = 1.9601937412 > 0.$$

Dakle, najveća nultočka funkcije f nalazi se u intervalu $[1, 2]$.

Provjerimo još da taj interval zadovoljava sve pretpostavke za globalnu konvergenciju Newtonove metode. Znamo da je $f'(x) > 0$ i da druga derivacija f'' ima jednu pozitivnu nultočku, pa je dovoljno provjeriti njezine predznake na rubovima intervala $[1, 2]$. Dobivamo

$$f''(1) = \operatorname{sh} 1 - \frac{4}{2^3} = \operatorname{sh} 1 - \frac{1}{2} = 0.6752011936$$

$$f''(2) = \operatorname{sh} 2 - \frac{4}{3^3} = \operatorname{sh} 2 - \frac{4}{27} = 3.4787122597,$$

pa je f'' sigurno pozitivna, tj. f' raste na ovom intervalu.

Na $[a, b] = [1, 2]$ vrijedi

$$f(1) < 0, \quad f(2) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0,$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju Newtonove metode.

Startnu točku x_0 treba odabrati tako da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Zbog $f'' > 0$, mora biti $f(x_0) > 0$, pa uzimamo $x_0 = 2$.

Za ocjenu greške i kriterij zaustavljanja iteracija trebamo

$$m_1 = \min_{x \in [1,2]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [1,2]} |f''(x)|.$$

Zbog $f' > 0$, $f'' > 0$ i $f''' > 0$ na $[1, 2]$, odmah slijedi da je

$$m_1 = |f'(1)| = \operatorname{ch} 1 + \frac{1}{2} = 2.0430806348$$

$$M_2 = |f''(2)| = \operatorname{sh} 2 - \frac{4}{27} = 3.4787122597.$$

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, kriterij zaustavljanja je

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.0108379838 = 1.08379838 \cdot 10^{-2}.$$

Tablica iteracija u Newtonovoj metodi:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} - x_n$
0	2.0000000000	1.9601937412	3.9844179133	−0.4919648952
1	1.5080351048	0.3508132488	2.6875476102	−0.1305328499
2	1.3775022549	0.0151700330	2.4624213998	−0.0061606161
3	1.3713416388			

Aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ je

$$x_3 = 1.3713416388.$$

Točno rješenje je $\xi = 1.3713296189$.

Rješenje metodom bisekcije. Na intervalu $[a, b] = [1, 2]$ vrijedi

$$f(1) < 0, \quad f(2) > 0, \quad f'(x) > 0,$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju metode bisekcije, s tim da možemo koristiti i dinamički kriterij zaustavljanja na funkcijsku vrijednost (preko m_1).

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, kriterij zaustavljanja potrebnim brojem iteracija $n_{\max}$ je

$$n_{\max} \geq \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} - 1 = 12.2877123795 \quad \Longrightarrow \quad n_{\max} = 13.$$

Dinamički kriterij zaustavljanja na funkcijsku vrijednost je

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon = 0.0002043081 = 2.043081 \cdot 10^{-4}.$$

Tablica iteracija u metodi bisekcije, uz oznaku $z = f(a_n)\cdot f(x_n)$ (treba nam samo predznak):

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z
0	1.0000000000	2.0000000000	1.5000000000	0.3292794551	< 0
1	1.0000000000	1.5000000000	1.2500000000	-0.2869698086	> 0
2	1.2500000000	1.5000000000	1.3750000000	0.0090133004	< 0
3	1.2500000000	1.3750000000	1.3125000000	-0.1417126703	> 0
4	1.3125000000	1.3750000000	1.3437500000	-0.0670702240	> 0
5	1.3437500000	1.3750000000	1.3593750000	-0.0292132683	> 0
6	1.3593750000	1.3750000000	1.3671875000	-0.0101467733	> 0
7	1.3671875000	1.3750000000	1.3710937500	-0.0005785075	> 0
8	1.3710937500	1.3750000000	1.3730468750	0.0042144445	< 0
9	1.3710937500	1.3730468750	1.3720703125	0.0018172317	< 0
10	1.3710937500	1.3720703125	1.3715820313	0.0006191780	< 0
11	1.3710937500	1.3715820313	1.3713378906	0.0000202893	< 0

Zbog $|f(x_{11})| \leq m_1\varepsilon$, aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ je

$$x_{11} = 1.3713378906.$$

Točno rješenje je $\xi = 1.3713296189$.

—— • ——

Zadatak 9.2.3. (NM 2012, popravni kolokvij, 6. zadatak, grupa A)

Nađite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$\ln(x+2) = \frac{7}{2} - 3\sin x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

Rješenje. Jednadžbu pišemo u obliku $f(x) = 0$, gdje je

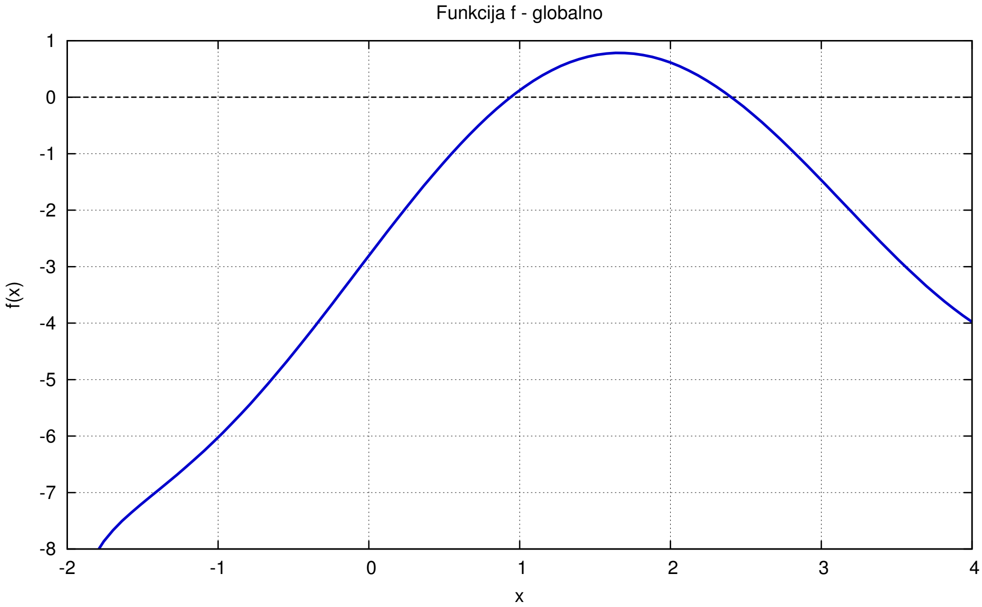
$$f(x) = \ln(x+2) + 3\sin x - \frac{7}{2}.$$

Zadnja dva člana su ograničena na cijelom $\mathbb{R}$. Zbog prvog člana $\ln(x+2)$, domena funkcije f je skup $(-2,+\infty)$. Očito je f **neprekidna** na cijeloj domeni i odmah vidimo da f ima **vertikalnu** asimptotu u $x = -2$, s tim da vrijedi

$$\lim_{x\searrow -2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\nearrow\infty} f(x) = +\infty,$$

pa f sigurno ima barem jednu nultočku u domeni.

Globalno ponašanje funkcije f ilustrirano je grafom na sljedećoj slici.



Tražimo najmanju pozitivnu nultočku funkcije f, pa gledamo samo interval $[0, \infty)$. U lijevom rubu $x = 0$ je

$$f(0) = \ln 2 - \frac{7}{2} = -2.8068528194 < 0,$$

pa funkcija f sigurno ima **barem jednu** pozitivnu nultočku.

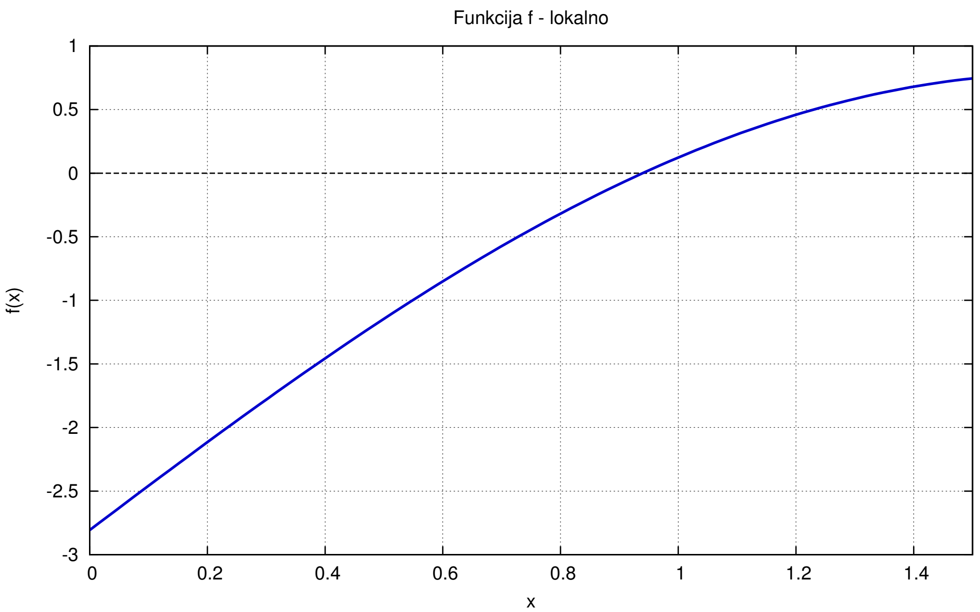
Nadalje, za $x = 3/2$ (blizu maksimuma sinusa) i $x = 1$, redom, dobivamo

$$f(3/2) = \ln\frac{7}{2} + 3\sin\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = 0.7452479283 > 0,$$

$$f(1) = \ln 3 + 3\sin 1 - \frac{7}{2} \quad = 0.1230252431 > 0.$$

Slijedi da f ima **najmanju pozitivnu** nultočku u intervalu $[0, 3/2]$, odnosno, $[0, 1]$.

Graf funkcije f na "zanimljivom" dijelu domene prikazan je na sljedećoj slici.



Derivacije funkcije f su redom

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + 3\cos x$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} - 3\sin x$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3} - 3\cos x.$$

Za $x \geq 0$, prvi član u sve tri derivacije ima predznak brojnika i ne može biti jednak nuli. Zbog $3/2 < \pi/2$, za $x \in [0, 3/2]$ vrijedi $\cos x \geq 0$ i $\sin x \geq 0$. Odavde odmah slijedi da je $f'(x) > 0$ i $f''(x) < 0$. Zaključujemo da f monotono **raste**, pa ima točno **jednu** nultočku u intervalu $[0, 3/2]$, odnosno, $[0, 1]$. To je, ujedno, i tražena **najmanja pozitivna** nultočka.

Za nalaženje maksimuma $|f''(x)|$ treba provjeriti predznak treće derivacije f''' i naći njezine nultočke, ako ih ima. Nažalost, članovi u f''' imaju različite predznake na $[0, 3/2]$, pa ne vrijedi isti argument. Za početak, u lijevom rubu $x = 0$ dobivamo

$$f'''(0) = \frac{2}{2^3} - 3 = -\frac{11}{4} = -2.75 < 0.$$

Zatim, uočimo da prvi član monotono **pada** i dostiže najveću vrijednost $1/4$ upravo u nuli, a drugi član $-3\cos x$ monotono **raste** na $[0, 3/2]$. Za bilo koji $y \in [0, 3/2]$ onda vrijedi

$$f'''(x) \leq \frac{1}{4} - 3\cos x \leq \frac{1}{4} - 3\cos y, \quad x \in [0, y].$$

Ako dobijemo da je desna strana negativna za neki takav y, onda znamo da je $f'''(x) < 0$ na cijelom intervalu $[0, y]$. Za $y = 1$ dobivamo

$$f'''(x) \leq \frac{1}{4} - 3\cos 1 = \frac{1}{4} - 3 \cdot 0.5403023059 = -1.3709069176 < 0, \quad x \in [0, 1],$$

pa je $f'''(x) < 0$ na $[0, 1]$. Međutim, za $y = 3/2$ izlazi

$$f'''(x) \leq \frac{1}{4} - 3\cos\frac{3}{2} = \frac{1}{4} - 3 \cdot 0.0707372017 = 0.0377883950, \quad x \in [0, 3/2],$$

pa **ne možemo** na ovaj način zaključiti da je $f'''(x) < 0$ na $[0, 3/2]$. Zato nastavljamo s kraćim intervalom $[0, 1]$.

Napomena. Može se pokazati da je $f'''(x) < 0$ i na intervalu $[0, 3/2]$. U desnom rubu $x = 3/2$ dobivamo pravu vrijednost (a ne ocjenu, kao gore)

$$f'''(3/2) = \frac{2}{(7/2)^3} - 3\cos\frac{3}{2} = -0.1655643747 < 0.$$

Prva i druga derivacija funkcije f''' su

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x+2)^4} + 3\sin x$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(x+2)^5} + 3\cos x.$$

Istim argumentom kao za f', zbog $\cos x \geq 0$ na $[0, 3/2]$, slijedi da je $f^{(5)}(x) > 0$ na $[0, 3/2]$. To znači da je f''' **konveksna** na intervalu $[0, 3/2]$. Zato f''' može imati **najviše dvije** nultočke na $[0, 3/2]$. No, kad bi imala točno dvije nultočke, onda bi njezine vrijednosti u oba ruba morale biti pozitivne (nenegativne), a to nije slučaj. Analogno, kad bi imala točno jednu nultočku, onda bi vrijednosti u rubovima morale imati različit predznak, što i opet nije slučaj. Dakle, f''' **nema** nultočaka na $[0, 3/2]$, tj. vrijedi $f'''(x) < 0$ na $[0, 3/2]$. Usput, provjerom vrijednosti u rubovima dobivamo da je $f^{(4)}(0) < 0$ i $f^{(4)}(3/2) > 0$, pa prva derivacija funkcije f''' ima nultočku u $[0, 3/2]$ i to je točka lokalnog minimuma za f'''.

Na $[a, b] = [0, 1]$ vrijedi

$$f(0) < 0, \quad f(1) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju Newtonove metode.

Startnu točku x_0 treba odabrati tako da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Zbog $f'' < 0$, mora biti $f(x_0) < 0$, pa uzimamo $x_0 = 0$.

Za ocjenu greške i kriterij zaustavljanja iteracija trebamo

$$m_1 = \min_{x\in[0,1]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|.$$

Zbog $f' > 0$, $f'' < 0$ i $f''' < 0$ na $[0, 1]$, odmah slijedi da je

$$m_1 = |f'(1)| = \frac{1}{3} + 3\cos 1 = 1.9542402509$$

$$M_2 = |f''(1)| = \frac{1}{3^2} + 3\sin 1 = 2.6355240655.$$

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, kriterij zaustavljanja je

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.0121778461 = 1.21778461 \cdot 10^{-2}.$$

Tablica iteracija u Newtonovoj metodi:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} - x_n$
0	0.0000000000	−2.8068528194	3.5000000000	0.8019579484
1	0.8019579484	−0.3135250675	2.4427957791	0.1283468189
2	0.9303047673	−0.0194872545	2.1340303725	0.0091316669
3	0.9394364342			

Aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ je

$$x_3 = 0.9394364342.$$

Točno rješenje je $\xi = 0.9394863486$.

Newtonova metoda — manji interval. Interval možemo još "skratiti" na dozvoljenu duljinu $1/2$, tako da provjerimo polovište intervala $x = 1/2$ (bisekcija). Onda je

$$f(1/2) = \ln\frac{5}{2} + 3\sin\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -1.1454326523 < 0.$$

Dakle, funkcija f ima najmanju pozitivnu nultočku u intervalu $[1/2, 1]$.

Na $[a, b] = [1/2, 1]$ vrijedi

$$f(1/2) < 0, \quad f(1) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0,$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju Newtonove metode.

Startnu točku x_0 treba odabrati tako da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Zbog $f'' < 0$, mora biti $f(x_0) < 0$, pa uzimamo $x_0 = 1/2$.

Za ocjenu greške i kriterij zaustavljanja iteracija trebamo

$$m_1 = \min_{x \in [1/2,1]} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in [1/2,1]} |f''(x)|.$$

Zbog $f' > 0$, $f'' < 0$ i $f''' < 0$ na $[1/2, 1]$, odmah slijedi da je

$$m_1 = |f'(1)| = \frac{1}{3} + 3\cos 1 = 1.9542402509$$

$$M_2 = |f''(1)| = \frac{1}{3^2} + 3\sin 1 = 2.6355240655.$$

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, kriterij zaustavljanja je

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.0121778461 = 1.21778461 \cdot 10^{-2}.$$

Tablica iteracija u Newtonovoj metodi:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} - x_n$
0	0.5000000000	−1.1454326523	3.0327476857	0.3776880806
1	0.8776880806	−0.1352214430	2.2642951568	0.0597190003
2	0.9374070808	−0.0043944088	2.1160762194	0.0020766779
3	0.9394837588			

Aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ je

$$x_3 = 0.9394837588.$$

Točno rješenje je $\xi = 0.9394863486$.

Rješenje metodom bisekcije. Na intervalu $[a, b] = [0, 1]$ vrijedi

$$f(0) < 0, \quad f(1) > 0, \quad f'(x) > 0,$$

pa imamo sve startne pretpostavke za sigurnu konvergenciju metode bisekcije, s tim da možemo koristiti i dinamički kriterij zaustavljanja na funkcijsku vrijednost (preko m_1).

Za traženu točnost $\varepsilon = 10^{-4}$, kriterij zaustavljanja potrebnim brojem iteracija $n_{\max}$ je

$$n_{\max} \geq \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} - 1 = 12.2877123795 \quad \Longrightarrow \quad n_{\max} = 13.$$

Dinamički kriterij zaustavljanja na funkcijsku vrijednost je

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon = 0.0001954240 = 1.954240 \cdot 10^{-4}.$$

Tablica iteracija u metodi bisekcije, uz oznaku $z = f(a_n) \cdot f(x_n)$ (treba nam samo predznak):

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z
0	0.0000000000	1.0000000000	0.5000000000	-1.1454326523	> 0
1	0.5000000000	1.0000000000	0.7500000000	-0.4434828083	> 0
2	0.7500000000	1.0000000000	0.8750000000	-0.1413168190	> 0
3	0.8750000000	1.0000000000	0.9375000000	-0.0041977957	> 0
4	0.9375000000	1.0000000000	0.9687500000	0.0606763228	< 0
5	0.9375000000	0.9687500000	0.9531250000	0.0285518009	< 0
6	0.9375000000	0.9531250000	0.9453125000	0.0122547401	< 0
7	0.9375000000	0.9453125000	0.9414062500	0.0040478565	< 0
8	0.9375000000	0.9414062500	0.9394531250	-0.0000701298	> 0

Zbog $|f(x_8)| \leq m_1 \varepsilon$, aproksimacija nultočke s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ je

$$x_8 = 0.9394531250.$$

Točno rješenje je $\xi = 0.9394863486$.