Numerička matematika
11. predavanje — dodatak

Saša Singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja — dodatka

- Numerička integracija (dodatak):
  - Asimptotski razvoj i Euler–MacLaurinova formula.
  - Richardsonova ekstrapolacija i Rombergov algoritam.
  - Primjeri za Rombergov algoritam.

Rombergov algoritam

Općenito o Rombergovom algoritmu

Pri izvodu Rombergovog algoritma koristimo se sljedećim principima:

- udvostručavanjem broja podintervala u produljenoj trapeznoj metodi,
- eliminacijom vodećeg člana u asimptotskom razvoju greške, iz dvije susjedne produljene formule.

Ponovljena primjena ovog principa zove se Richardsonova ekstrapolacija.

Za početak, treba objasniti

- što je to asimptotski razvoj.

Asimptotski razvoj

Da bismo mogli približno izračunati sumu konvergentnog reda neke funkcije f u točki x, oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

red smo aproksimirali konačnom parcijalnom sumom

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x).$$

Time smo podrazumijevali da ostatak reda teži prema nuli, i to po N, za fiksni x

$$\lim_{N\to\infty} (f(x) - f_N(x)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n p_n(x) = 0.$$

Precizna definicija asimptotskog niza

Ako zamijenimo ulogu N i x u konvergenciji razvoja, dobivamo novi pojam asimptotskog razvoja. Pritom red uopće ne mora konvergirati.

Precizna definicija asimptotskog razvoja u okolini neke točke bazirana je na definiciji asimptotskog niza u okolini te točke.

Definicija. (Asimptotski niz) Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ neka domena i $c \in \mathrm{Cl}\, D$ neka točka iz zatvarača skupa D, s tim da c može biti i $+\infty$ ili $-\infty$. Nadalje, neka je $\varphi_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, niz funkcija za kojeg vrijedi

$$\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x)) \quad (x \to c \text{ u } D),$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada kažemo da je (φ_n) asimptotski niz kad $x \to c$ u skupu D. ■

Precizna definicija asimptotskog razvoja

Podsjetnik. Oznaka $\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x))$ znači da svaka funkcija φ_n raste bitno sporije od prethodne funkcije φ_{n-1} u okolini neke točke (kod nas c), u smislu da vrijedi

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in D}} \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)} = 0,$$

što uključuje i pretpostavku da je $\varphi_{n-1}(x) \neq 0$ na nekoj okolini točke c gledano u skupu D, osim eventualno u samoj točki c.

Definicija. (Asimptotski razvoj) Neka je (φ_n), $n \in \mathbb{N}_0$, asimptotski niz kad $x \to c$ u skupu D. Formalni red funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$$

Precizna definicija asimptotskog razvoja

je asimptotski razvoj funkcije f za $x \to c$ u skupu D, oznaka

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \to c \text{ u } D),$$

ako za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi relacija asimptotskog ponašanja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n(x) + O(\varphi_N(x)) \quad (x \to c \text{ u } D),$$

tj. apsolutna greška između f i $(N-1)$-e parcijalne sume reda raste najviše jednako brzo kao i N-ti član asimptotskog niza, u okolini točke c. ■

Euler–MacLaurinova formula

Asimptotski razvoj pogreške za produljenu trapeznu metodu integracije daje Euler–MacLaurinova formula.

Teorem. (Euler–MacLaurinova formula) Neka su m i n cijeli brojevi takvi da je $m \geq 0$ i $n \geq 1$. Definiramo ekvidistantnu mrežu s n podintervala na $[a, b]$, tj.

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Pretpostavimo da je $f \in C^{(2m+2)}[a, b]$. Za pogrešku produljene trapezne metode vrijedi

$$E_n(f) = \int\limits_a^b f(x)\, dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m},$$

Euler–MacLaurinova formula

gdje su koeficijenti

$$d_{2i} = -\frac{B_{2i}}{(2i)!}\,(b-a)^{2i}\,\big(f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)\big),$$

a ostatak je

$$F_{n,m} = \frac{(b-a)^{2m+2}}{(2m+2)!\,n^{2m+2}} \cdot \int\limits_a^b \overline{B}_{2m+2}\left(\frac{x-a}{h}\right) f^{(2m+2)}(x)\,dx.$$

Ovdje su B_{2i} Bernoullijevi brojevi,

$$B_i = -\int\limits_0^1 B_i(x)\,dx, \quad i \geq 1,$$

Euler–MacLaurinova formula

a $\overline{B}_i$ je periodičko proširenje običnih Bernoullijevih polinoma

$$\overline{B}_i(x) = \begin{cases} B_i(x), & \text{za } 0 \leq x \leq 1, \\ \overline{B}_i(x-1), & \text{za } x \geq 1. \end{cases}$$

Dokaz je u klasičnim udžebnicima numeričke analize. ■

U koeficijentima d_{2i} javljaju se Bernoullijevi brojevi. Osim $B_1 = -\frac{1}{2}$, svi ostali neparni Bernoullijevi brojevi su 0, a prvih nekoliko parnih je:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30},$$
$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

Nadalje, brojevi B_{2i} vrlo brzo rastu po apsolutnoj vrijednosti, tako da je $B_{60} \approx -2.139994926 \cdot 10^{34}$.

Eliminacija člana greške

"Red" u n^{-2}, koji se javlja u asimptotskoj ocjeni pogreške za produljenu trapeznu metodu

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m},$$

- ne konvergira — kad "glatkoća" m raste u ∞, jer koeficijenti d_{2i} ne teže prema nuli.

Naravno, znamo da $E_n(f) \to 0$, kad broj podintervala $n \to \infty$.

Ideja: Ako je funkcija f dovoljno glatka,

- eliminirati član po član u sumi za grešku,
- na osnovu izračunatih vrijednosti integrala s $n/2$ i n podintervala, odnosno, s duljinama koraka $2h$ i h.

Izvod Rombergovog algoritma

Neka je $I_n^{(0)}$ trapezna formula n podintervala.

Iz Euler–MacLaurinove formule, (ako je funkcija f dovoljno glatka i n paran), za asimptotski razvoj greške imamo

$$I - I_n^{(0)} = \frac{d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{d_4^{(0)}}{n^4} + \cdots + \frac{d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n,m}$$

$$I - I_{n/2}^{(0)} = \frac{4d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{16d_4^{(0)}}{n^4} + \cdots + \frac{2^{2m}d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n/2,m}.$$

Želimo eliminirati prvi član greške s n^{-2}, pa prvi razvoj pomnožimo s 4 i oduzmemo mu drugi razvoj. Dobivamo

$$4(I - I_n^{(0)}) - (I - I_{n/2}^{(0)}) = -\frac{12d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{60d_6^{(0)}}{n^6} + \cdots.$$

Izvod Rombergovog algoritma

Premješanjem članova koji imaju I na lijevu stranu, a zatim dijeljenjem, dobivamo

$$I = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} - \frac{4d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{20d_6^{(0)}}{n^6} + \cdots .$$

Prvi član zdesna uzimamo kao bolju, popravljenu aproksimaciju integrala. Označimo tu aproksimaciju s

$$I_n^{(1)} = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3}, \quad n \text{ paran}, \, n \geq 2.$$

Sada u formuli za grešku, da bismo lakše računali, definiramo

$$d_4^{(1)} = -4d_4^{(0)}, \quad d_6^{(1)} = -20d_6^{(0)}, \ldots$$

Izvod Rombergovog algoritma

Time smo dobili novi integracijski niz $I_2^{(1)}, I_4^{(1)}, I_8^{(1)}, \ldots$
Njegova je greška

$$I - I_n^{(1)} = \frac{d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{d_6^{(1)}}{n^6} + \cdots .$$

Sličan argument kao i prije možemo upotrijebiti i dalje.
Eliminirajmo prvi član pogreške iz $I_n^{(1)}$ i $I_{n/2}^{(1)}$,

$$I - I_{n/2}^{(1)} = \frac{16 d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{64 d_6^{(1)}}{n^6} + \cdots ,$$

uz uvjet da je funkcija dovoljno glatka i da je n djeljiv s 4.
Tada je

$$16(I - I_n^{(1)}) - (I - I_{n/2}^{(1)}) = \frac{-48 d_6^{(1)}}{n^6} + \cdots ,$$

Izvod Rombergovog algoritma

odnosno

$$I = \frac{16 I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15} - \frac{-48 d_6^{(1)}}{15 n^6} + \cdots .$$

Ponovno, prvi član s desne strane proglasimo za novu aproksimaciju integrala

$$I_n^{(2)} = \frac{16 I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15}, \quad n \text{ djeljiv s } 4, \quad n \geq 4.$$

Induktivno, nastavljanjem postupka, dobivamo Richardsonovu ekstrapolaciju

$$I_n^{(k)} = \frac{4^k I_n^{(k-1)} - I_{n/2}^{(k-1)}}{4^k - 1}, \quad n \geq 2^k.$$

Izvod Rombergovog algoritma

Pritom je greška jednaka

$$E_n^{(k)} = I - I_n^{(k)} = \frac{d_{2k+2}^{(k)}}{n^{2k+2}} + \cdots$$

$$= \beta_k (b-a) h^{2k+2} f^{(2k+2)}(\xi), \quad a \le \xi \le b.$$

Sada možemo složiti Rombergovu tablicu

$$\begin{array}{cccc}
I_1^{(0)} & & & \\
I_2^{(0)} & I_2^{(1)} & & \\
I_4^{(0)} & I_4^{(1)} & I_4^{(2)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}.$$

Poredak računanja

Poredak računanja u tablici je sljedeći:

$$
\begin{array}{llll}
1 & & & \\
2 & 3 & & \\
4 & 5 & 6 & \\
7 & 8 & 9 & \cdots
\end{array}
.
$$

Iz ocjene greške možemo izvesti omjere grešaka u stupcu Rombergove tablice, uz pretpostavku dovoljne glatkoće funkcije f. Dobivamo

$$
\frac{E_n^{(k)}}{E_{2n}^{(k)}} \approx 2^{2k+2},
$$

Omjeri grešaka u Rombergovoj tablici

tj. omjeri pogrešaka u stupcu se moraju ponašati kao

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
4 & 1 & & & \\
4 & 16 & 1 & & \\
4 & 16 & 64 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
.
$$

Puno ilustrativnije od omjera grešaka $E_n^{(k)}/E_{2n}^{(k)} \approx 2^{2k+2}$ je promatranje eksponenta omjera grešaka $2k+2$,

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
2 & 1 & & & \\
2 & 4 & 1 & & \\
2 & 4 & 6 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
.
$$

Primjeri za Rombergov algoritam

Omjeri grešaka u Rombergovoj tablici

Pokažimo na primjeru da prethodni omjeri pogrešaka u stupcu vrijede samo ako je funkcija dovoljno glatka.

Primjer. Rombergovim algoritmom s točnošću 10^{-12} nađite vrijednosti integrala

$$\int_0^1 e^x \, dx, \qquad \int_0^1 x^{3/2} \, dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{x} \, dx$$

i pokažite kako se ponašaju omjeri pogrešaka i eksponenti omjera pogrešaka u stupcima.

Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija ima beskonačno mnogo neprekidnih derivacija na $[0, 1]$, pa bi se računanje integrala moralo ponašati po predviđanju.

Ako uspoređujemo vrijednosti samo "po dijagonali" tablice, nakon $2^5 = 32$ podintervala u trapeznoj formuli, dobivamo približnu vrijednost integrala I_5 takvu da je

$$\begin{aligned} I_5 &= 1.7182818284590452\,4 \\ I &= e - 1 = 1.7182818284590452\,4 \\ I - I_5 &= 0. \end{aligned}$$

Eksponencijalna funkcija

Omjeri pogrešaka u stupcima su

0	1.0000					
1	3.9512	1.0000				
2	3.9875	15.6517	1.0000			
3	3.9969	15.9913	62.4639	1.0000		
4	3.9992	15.9777	63.6087	249.7197	1.0000	
5	3.9998	15.9944	63.9017	254.4010	1000.5738	1.0000

pa uz malo “kreativnog vida” vidimo da su omjeri prema predviđanju $4, 16, 64, 256, 1024, \ldots$

Eksponencijalna funkcija

Eksponenti omjera pogrešaka su

0	1.0000					
1	1.9823	1.0000				
2	1.9955	3.9682	1.0000			
3	1.9989	3.9920	5.9650	1.0000		
4	1.9997	3.9980	5.9912	7.9642	1.0000	
5	1.9999	3.9995	5.9978	7.9910	9.9666	1.0000

pa ponovno čitamo da su eksponenti omjera pogrešaka $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

Funkcija $x^{3/2}$

Funkcija $f(x) = x^{3/2}$ ima neograničenu drugu derivaciju u 0,

- pa bi "zanimljivo ponašanje" moralo početi već u drugom stupcu Rombergove tablice, jer
- za trapez je funkcija dovoljno glatka za ocjenu pogreške.

Nakon 2^{15} podintervala u trapeznoj formuli, dobivamo približnu vrijednost

$$
\begin{aligned}
I_{15} &= 0.4000000000004512 \\
I &= 2/5 = 0.4000000000000000 \\
I - I_{15} &= -0.0000000000004512.
\end{aligned}
$$

Primijetite da je broj intervala poprilično velik!

Funkcija $x^{3/2}$

Što je s omjerima pogrešaka?

0	1.0000						
1	3.7346	1.0000					
2	3.8154	5.4847	1.0000				
3	3.8721	5.5912	5.6484	1.0000			
4	3.9112	5.6331	5.6559	5.6566	1.0000		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$	$\ddots$	
15	3.9981	5.6569	$\cdots$		$\cdots$	5.6569	1.0000

Nakon prvog stupca omjeri pogrešaka su se stabilizirali.

Funkcija $x^{3/2}$

Bit će nam mnogo lakše provjeriti što se događa, ako napišemo samo eksponente omjera pogrešaka.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & 1.0000 & & & & & \\
1 & 1.9010 & 1.0000 & & & & \\
2 & 1.9318 & 2.4554 & 1.0000 & & & \\
3 & 1.9531 & 2.4832 & 2.4978 & 1.0000 & & \\
4 & 1.9676 & 2.4939 & 2.4998 & 2.4999 & 1.0000 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\
15 & 1.9993 & 2.5000 & \cdots & & \cdots & 2.5000 \quad 1.0000
\end{array}
$$

Eksponenti omjera pogrešaka od drugog stupca nadalje su za točno 1 veći od eksponenta same funkcije (integriramo!).

Funkcija $\sqrt{x}$

Situacija s funkcijom $f(x) = \sqrt{x}$ mora biti još gora, jer ona ima neograničenu prvu derivaciju u 0.

Nakon 2^{15} podintervala u trapeznoj formuli, ne dobivamo željenu točnost

$$
\begin{aligned}
I_{15} &= 0.66666665510837633 \\
I &= 2/3 = 0.66666666666666667 \\
I - I_{15} &= 0.00000001155829033.
\end{aligned}
$$

Funkcija $\sqrt{x}$

Omjeri pogrešaka u tablici su:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
0 & 1.0000 \\
1 & 2.6408 & 1.0000 \\
2 & 2.6990 & 2.8200 & 1.0000 \\
3 & 2.7393 & 2.8267 & 2.8281 & 1.0000 \\
4 & 2.7667 & 2.8281 & 2.8284 & 2.8284 & 1.0000 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots \\
15 & 2.8271 & 2.8284 & \cdots & & \cdots & 2.8284 & 1.0000
\end{array}
$$

Funkcija $\sqrt{x}$

Pripadni eksponenti su

0	1.0000						
1	1.4010	1.0000					
2	1.4324	1.4957	1.0000				
3	1.4538	1.4991	1.4998	1.0000			
4	1.4681	1.4998	1.5000	1.5000	1.0000		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$	$\ddots$	
15	1.4993	1.5000	$\cdots$		$\cdots$	1.5000	1.0000

Produljena trapezna formula još uvijek konvergira, ali konvergencija više nije $O(h^2)$, već samo $O(h^{3/2})$.

Zadaci

U posljednja dva primjera, Rombergovom algoritmu može se "pomoći" tako da supstitucijom u integralu dobijemo glatku funkciju.

- U oba slučaja, supstitucija je $x = t^2$.

Provjerite što se događa u Rombergovom algoritmu nakon ove supstitucije.

Ako u posljednjem integralu promijenimo granice integracije

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$$

što mislite kojoj će se funkciji iz prethodnih primjera najsličnije ponašati omjeri pogrešaka?

Druge oznake

U literaturi postoji i drugačija oznaka za aproksimacije integrala u Rombergovoj tablici

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}.$$

Sama tablica ima oblik

$$\begin{array}{llll}
T_0^{(0)} & & & \\
T_0^{(1)} & T_1^{(0)} & & \\
T_0^{(2)} & T_1^{(1)} & T_2^{(0)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}.$$

Još malo o Rombergovoj tablici

Tvrdnja. Drugi stupac Rombergove tablice odgovara produljenoj Simpsonovoj formuli — redom, s $2, 4, 8, 16, \ldots$ podintervala.

Nađimo eksplicitnu formulu za $I_n^{(1)}$. Ako trapezna formula ima

- n podintervala, onda je pripadni $h = (b - a)/n$,
- $n/2$ podintervala, onda je pripadni $h_1 = 2(b - a)/n = 2h$.

Iz trapeznih formula za n i $n/2$ podintervala,

$$I_n^{(0)} = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \cdots 2f_{n-1} + f_n)$$

$$I_{n/2}^{(0)} = \frac{h_1}{2}(f_0 + 2f_2 + \cdots 2f_{n-2} + f_n),$$

Još malo o Rombergovoj tablici

uvrštavanjem u $I_n^{(1)}$, dobivamo

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\ &\quad - \frac{1}{3} \cdot \frac{h_1}{2}(f_0 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + f_n) \\ &= \frac{2h}{3}(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) \\ &\quad - \frac{h}{3}(f_0 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + f_n) \\ &= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n), \end{aligned}$$

što je Simpsonova formula s n podintervala.

Zadatak

Odgovaraju li ostali stupci u Rombergovoj tablici sljedećim Newton–Cotesovim formulama (Simpsonovoj formuli $3/8$, Booleovoj formuli, …)?

Na sreću, odgovor je ne!

U protivnom, Rombergov algoritam ne bi konvergirao, recimo, za funkciju Runge. Za točnost 10^{-12}, ako uspoređujemo "dijagonalni dio" tablice, potrebno je $2^{10} = 1024$ podintervala, a dobiveni rezultat je

$$\begin{aligned} I_{10} &= 2.7468015338900318\,3 \\ I &= 2.7468015338900317\,2 \\ I - I_{10} &= -0.0000000000000001\,1. \end{aligned}$$

Oprez s oscilirajućim funkcijama

Primjer. Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 \sin(17\pi x)\, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-4}.

Podintegralna funkcija je relativno brzo oscilirajuća i ima 17 “grba”.

Tablicu ispisujemo samo na prvih par decimala (a računamo u punoj točnosti tipa `extended`).

Oprez s oscilirajućim funkcijama

Rombergova tablica:

0	0.0000							
1	0.5000	0.6667						
2	0.6036	0.6381	0.6362					
3	0.6284	0.6367	0.6366	0.6366				
4	−0.0063	−0.2177	−0.2746	−0.2891	−0.2927			
5	0.0283	0.0398	0.0598	0.0622	0.0636	0.0640		
6	0.0352	0.0376	0.0374	0.0371	0.0370	0.0370	0.0370	
7	0.0369	0.0375	0.0374	0.0374	0.0374	0.0375	0.0375	0.0375

Rezultat (sa svim znamenkama):

$$I_7 = 0.03744821953512704$$
$$I = 0.03744822190397537$$

$$I - I_7 = 0.0000000023688483 4.$$

Oprez s oscilirajućim funkcijama

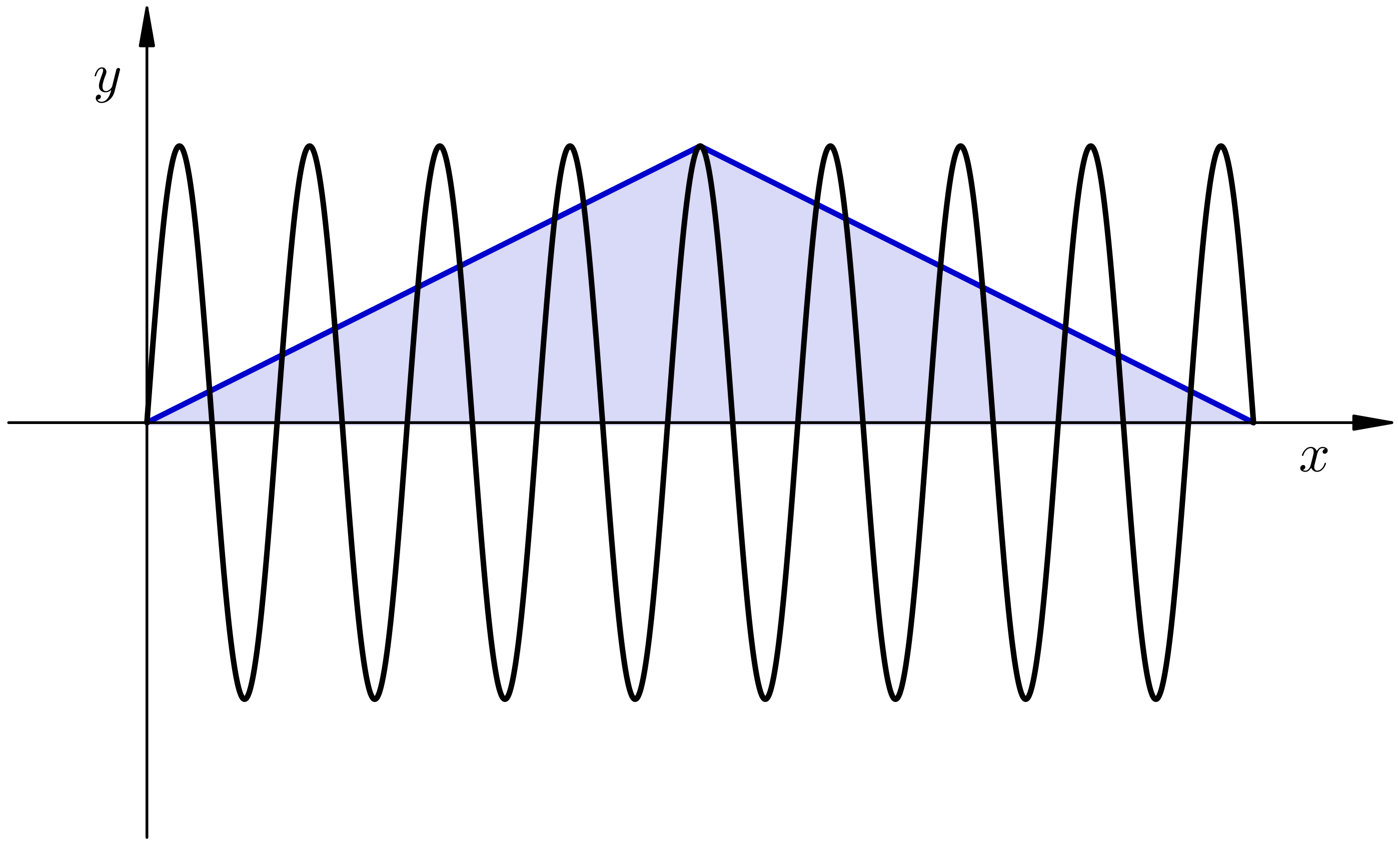
Što je razlog stabilizacije oko jedne, pa oko druge vrijednosti?

- Nedovoljan broj podintervala u trapeznoj formuli, koji ne opisuje dobro ponašanje funkcije.
- Rješenje problema: u svaku "grbu" treba staviti barem nekoliko točaka.

Sljedeće slike nam to zorno i pokazuju. Tek kad smo stavili 16 točaka u trapeznu formulu,

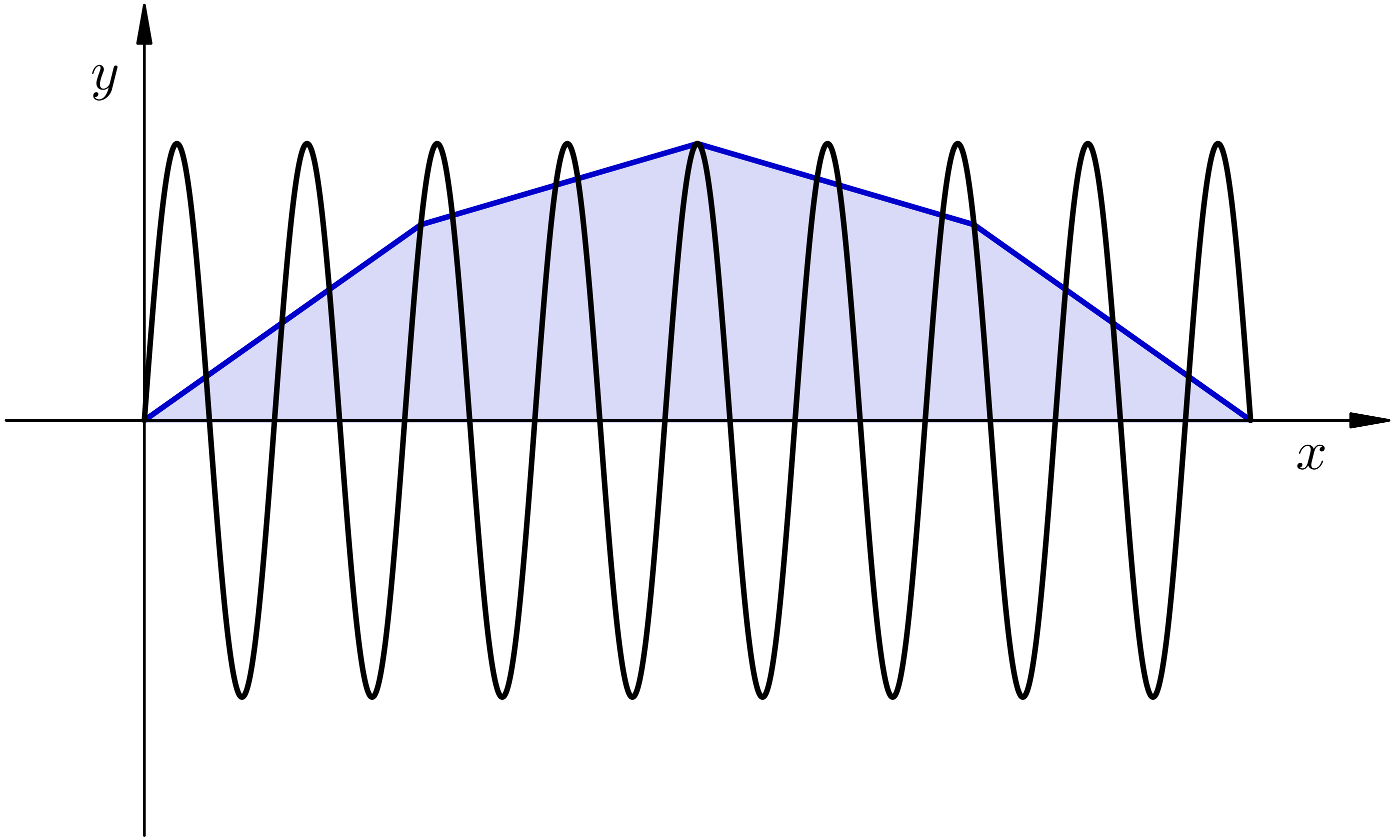
- stavili smo skoro jednu točku po grbi
- i trapezna formula je počela "prepoznavati oblik" podintegralne funkcije.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



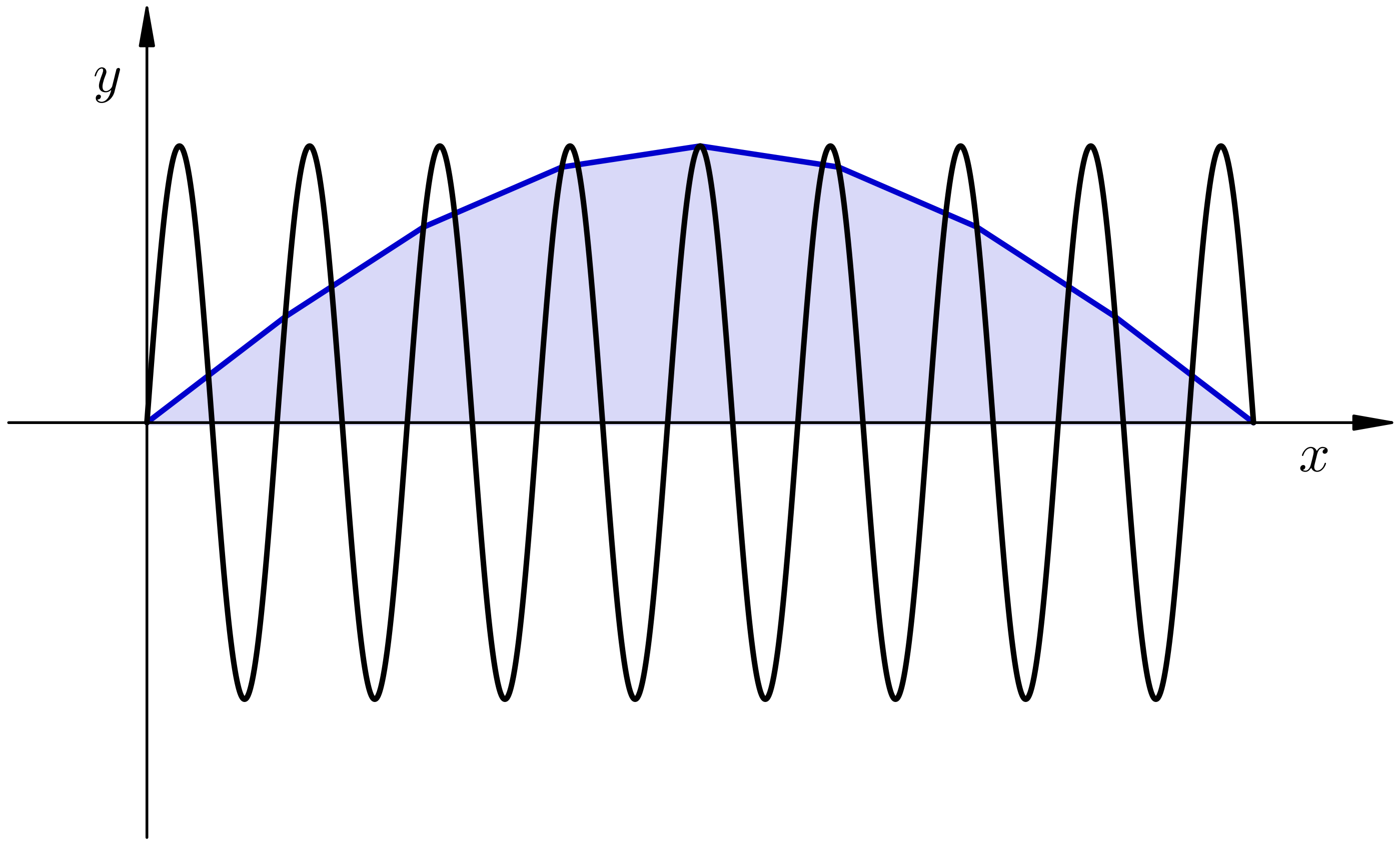
Produljena trapezna formula s 2 podintervala.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



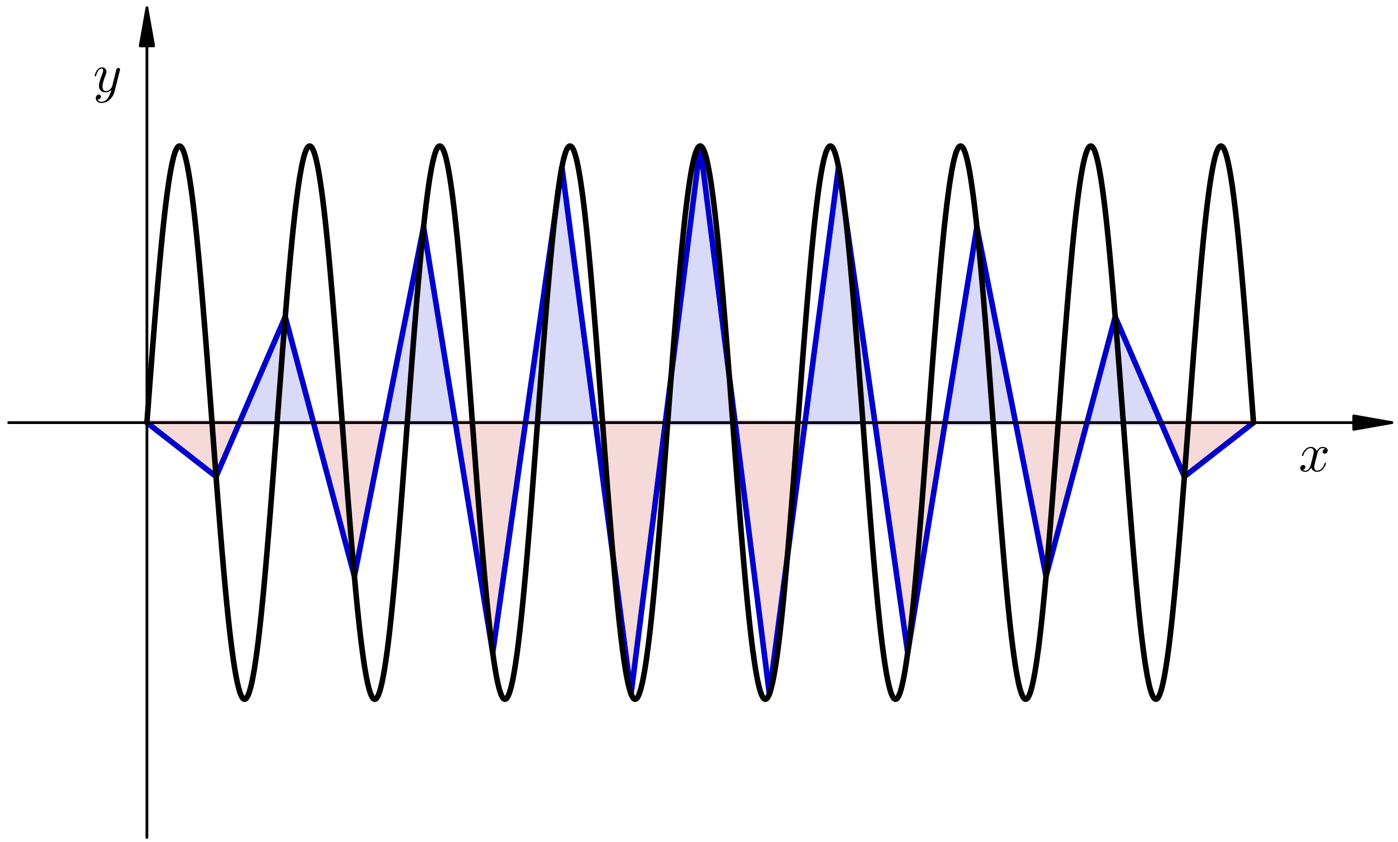
Produljena trapezna formula s 4 podintervala.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



Produljena trapezna formula s 8 podintervala.

Oprez s oscilirajućim funkcijama



Produljena trapezna formula sa 16 podintervala.

Zadatak

Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 \sin(257\pi x)\, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-12}.

Oprez, ako u Rombergovom algoritmu

- ne zahtijevate stavljanje dovoljnog broja podintervala,

dobiveni rezultat bit će pogrešan!

Trapez može biti brži od Romberga

Primjer. Korištenjem Rombergovog algoritma izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 e^{\cos(\pi x)} \cos(\pi x)\, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-4}.

U ovom primjeru događa se zanimljiv fenomen:

- produljena trapezna formula može brže izračunati točan rezultat nego Rombergov algoritam.

Razlog: "Dobro" ponašanje produljene trapezne formule za periodičke funkcije!

Trapez može biti brži od Romberga

Početni dio Rombergove tablice:

0	1.17520119364380146		
1	0.58760059682190073	0.39173373121460049	
2	0.56516070872910212	0.55768074603150258	0.56874388035262938
3	0.56515910399248505	0.56515856908027936	0.56565709061686448
4	0.56515910399248503	0.56515910399248502	0.56515913965329873
5	0.56515910399248503	0.56515910399248503	0.56515910399248503

Crveno označeni brojevi imaju sve znamenke točne.

Rombergov algoritam daje netočniju aproksimaciju

$$I_5 = 0.56515914375273593.$$

Trapez može biti brži od Romberga

Sporost Rombergovog algoritma posljedica je činjenice da

- trapezna formula s jednim podintervalom ima veliku grešku.
- Budući da ona ulazi u ekstrapolaciju rezultata na "dijagonali", dijagonalni rezultati su dosta pogrešni.

Stvarno, za produljenu trapeznu formulu ne vrijedi isti razvoj pogreške (puno je točnija — zbog periodičnosti funkcije f, za koeficijente u Euler–MacLaurinovoj formuli vrijedi $d_{2i} = 0$)!

Rješenje problema:

- usporedimo susjedne rezultate u stupcima tablice i ako se oni "slože" na odgovarajuću točnost, uzmemo ih kao aproksimaciju.