

Numerička matematika

10. predavanje

Saša Singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Numerička integracija:
 - Općenito o integracijskim formulama.
 - Newton–Cotesove formule.
 - Trapezna formula.
 - Simpsonova formula.
 - Formula srednje točke.
 - Teorija integracijskih formula.
 - Težinske Newton–Cotesove formule.
 - Produljene Newton–Cotesove formule.
 - Produljena trapezna formula za trigonometrijske polinome.

Općenito o numeričkim integracijskim formulama

Općenito o integracijskim formulama

Zadana je funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je $I = [a, b]$ interval, $b > a$, koji može biti i beskonačan. Želimo izračunati integral

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Za relativno mali skup funkcija f

- ovaj se integral može **egzaktno** izračunati.

U suprotnom, preostaje **približno**, **numeričko** računanje $I(f)$.

Osnovna ideja **numeričke** integracije je **približno** računanje integrala $I(f)$, korištenjem:

- **vrijednosti** funkcije f (eventualno i vrijednosti derivacija) na nekom **konačnom** skupu točaka (\approx Darboux).

Općenito o integracijskim formulama

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je

- $m + 1 =$ broj korištenih **točaka** (tzv. čvorova integracije),
- $I_m(f) =$ pripadna **aproksimacija** integrala,
- $E_m(f) =$ pritom napravljena **greška**.

Ako koristimo **samo** funkcijske vrijednosti, aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}),$$

gdje je m neki **zadani** broj, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — tzv. **red** formule.

Općenito o integracijskim formulama

Točke $x_k^{(m)}$ zovu se **čvorovi integracije**, a brojevi $w_k^{(m)}$ **težinski koeficijenti**, ili samo **težine**.

U **općem** slučaju, za **fiksni** m , moramo odrediti $2m + 2$ **nepoznata** parametra formule — čvorove i težine.

- Najčešće se zahtijeva da su integracijske formule **egzaktne** na vektorskom prostoru **polinoma** \mathcal{P}_n što **višeg** stupnja n .

Zbog **linearnosti** integrala kao funkcionala

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx,$$

dovoljno je zahtijevati egzaktnost tih formula na **nekoj bazi** vektorskog prostora — recimo, na $\{1, x, x^2, \dots, x^m, \dots\}$.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Ako su svi čvorovi fiksirani (zadani), recimo ekvidistantni, onda dobivamo tzv. Newton–Cotesove formule.

- Za njih moramo odrediti $m + 1$ nepoznati težinski koeficijent.
- Uvjeti egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma \mathcal{P}_m , baš za $n = m$, vode na sustav linearnih jednažbi koji je regularan \Rightarrow težine postoje i jedinstvene su.
- Pokazat ćemo da se te formule mogu dobiti i kao integral interpolacijskog polinoma stupnja m , za funkciju f , na zadanoj (na primjer, ekvidistantnoj) mreži čvorova.
- Newton–Cotesove formule se obično koriste kao produljene formule — zbroj “po komadima” domene (integral splajna).

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Možemo i **fiksirati samo neke** čvorove, ili dozvoliti da su **svi** čvorovi “**slobodni**” (tako da dobijemo što veći stupanj n).

Ako su **svi** čvorovi **slobodni**, integracijske formule se zovu formule **Gaussovog tipa**.

Kod Gaussovih, ali i tzv. **težinskih** Newton–Cotesovih formula, integral, odnosno, **podintegralna** funkcija se zapisuje kao

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx,$$

pri čemu je funkcija $w \geq 0$ unaprijed zadana tzv. **težinska funkcija**. Ideja je “**razdvojiti**” podintegralnu funkciju na **dva** dijela, tako da eventualni **singulariteti** budu uključeni u w .

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Gaussove integracijske formule su **egzaktne** na vektorskom prostoru **polinoma** \mathcal{P}_{2m+1} , tj. za $n = 2m + 1$,

- što je prostor **dvostruko** veće dimenzije nego kod Newton–Cotesovih formula.
- Gaussove formule se nikad **ne** računaju “**direktno**” iz uvjeta **egzaktnosti**, jer to vodi na **nelinearni** sustav jednažbi.
- Pokazat ćemo **vezu** Gaussovih formula, funkcije w i **ortogonalnih polinoma** s težinom w na intervalu $[a, b]$.
 - To omogućava **efikasno** računanje **svih** parametara formule — i čvorova i težina!
- Za Gaussove formule **nema** puno smisla tražiti **produljene** formule (jer w **nije** ista na raznim komadima domene).

Tipovi Newton–Cotesovih formula

U praksi se koriste **dva tipa** Newton–Cotesovih formula:

- **zatvorene** formule — rubovi intervala a i b **su** čvorovi,
- **otvorene** formule — rubovi intervala a i b **nisu** čvorovi.

Katkad se koriste i

- **poluotvorene** formule — **jedan** od rubova, a ili b , **je** čvor, a **drugi nije**.

Primjena je u integraciji diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetom.

Za početak, uzimamo **standardnu** težinsku funkciju $w(x) = 1$ (najčešći slučaj u praksi za Newton–Cotesove formule) i **ekvidistantnu** mrežu čvorova integracije na intervalu $[a, b]$.

Zatvorene Newton–Cotesove formule

Za **zatvorenu** (često se ispušta) Newton–Cotesovu formulu s $m + 1$ točaka, interval $[a, b]$ podijelimo na m podintervala **jednake** duljine h_m . **Čvorovi** su

$$x_k^{(m)} = a + kh_m, \quad k = 0, \dots, m, \quad h_m = \frac{b - a}{m},$$

pa je **osnovni** oblik **zatvorenih** Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(a + kh_m).$$

Ova suma ide po **svim** točkama, **uključivo** i **rubove** intervala.

Otvorene Newton–Cotesove formule

Da bismo dobili **otvorene** Newton–Cotesove formule s $m + 1$ točaka, definiramo

$$x_{-1}^{(m)} := a, \quad x_{m+1}^{(m)} := b.$$

Interval $[a, b]$ podijelimo na $m + 2$ podintervala, a **čvorovi** su

$$x_k^{(m)} = a + (k + 1)h_m, \quad k = 0, \dots, m, \quad h_m = \frac{b - a}{m + 2},$$

pa je **osnovni** oblik **otvorenih** Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(a + (k + 1)h_m).$$

Ova suma ide samo po “**unutarnjim**” točkama.

Osnovna trapezna formula

Osnovna trapezna formula

Najjednostavnija (zatvorena) Newton–Cotesova formula — za $m = 1$ (s 2 čvora), zove se **trapezna formula**. Ona ima oblik

$$I_1(f) = w_0^{(1)} f(x_0) + w_1^{(1)} f(x_0 + h_1),$$

pri čemu je

$$h := h_1 = \frac{b - a}{1} = b - a,$$

pa je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Napomena. Promjenom reda m , promijenit će se i težine $w_k^{(m)}$,
• tj. $w_k^{(m)}$ vrijede za **točno određenu** formulu (**fiksni** m).

Dogovor: Ako **znamo** za koji red formule m računamo težine, zapis skraćujemo na $w_k := w_k^{(m)}$.

Osnovna trapezna formula

Dakle, osnovna **trapezna** formula ima oblik

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_1(f) = w_0 f(a) + w_1 f(b).$$

Moramo pronaći **težinske** koeficijente w_0 i w_1 , tako da

- integracijska formula **egzaktno** integrira **bazu** $\{1, x, \dots\}$ vektorskog prostora **polinoma** \mathcal{P}_n što višeg stupnja n .

Zato trebamo izračunati integrale oblika

$$\int_a^b x^k dx, \quad k \geq 0,$$

a zatim rezultat koristiti za razne k — redom, $k = 0, 1, \dots$.

Osnovna trapezna formula

Vrijedi

$$\int_a^b x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \quad k \geq 0.$$

☞ Za $k = 0$, tj. za $f(x) = x^0 = 1$, iz egzaktnosti dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0 dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1.$$

Jedna jednačba **nije dovoljna** za određivanje **dva** nepoznata parametra, pa zahtijevamo **egzaktnost** integracijske formule i na polinomima stupnja 1.

Osnovna trapezna formula

• Za $k = 1$, tj. $f(x) = x$, izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x \, dx = w_0 \cdot a + w_1 \cdot b.$$

Sada imamo **dvije** jednačbe s **dvije** nepoznanice

$$w_0 + w_1 = b - a$$

$$aw_0 + bw_1 = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Množenjem **prve** jednačbe s $-a$ i dodavanjem **drugoj**, izlazi

$$(b - a)w_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} - a(b - a) = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} = \frac{(b - a)^2}{2}.$$

Osnovna trapezna formula

Budući da je $b > a$ (granice!), dijeljenjem s $b - a$, dobivamo

$$w_1 = \frac{1}{2} (b - a) = \frac{h}{2}.$$

Drugu težinu w_0 lako izračunamo iz prve jednačbe linearnog sustava

$$w_0 = b - a - w_1 = \frac{1}{2} (b - a) = \frac{h}{2},$$

pa je $w_0 = w_1 = h/2$. Dakle, integracijska formula $I_1(f)$ glasi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(a) + f(b)).$$

Zadatak. Ponovite izvod na “simetričnoj” bazi $1, x - (a + b)/2$.

Zašto baš trapezna formula?

Odakle ime **trapeznoj** formuli? Napišemo li je na malo drugačiji način, kao

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a),$$

vidimo da je

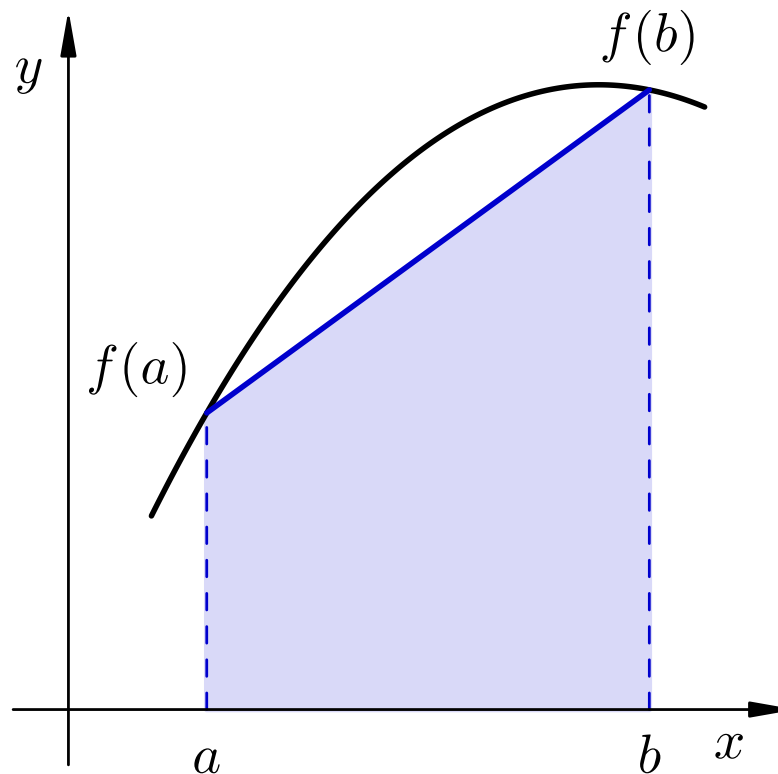
- $(f(a) + f(b))/2 =$ **srednjica** trapeza (stoji okomito), a
- $b - a =$ **visina** trapeza (leži vodoravno, kao “širina”),

za **trapez** na slici — v. sljedeća stranica.

Drugim riječima, **površinu** ispod **krivulje** aproksimirali smo **površinom trapeza**.

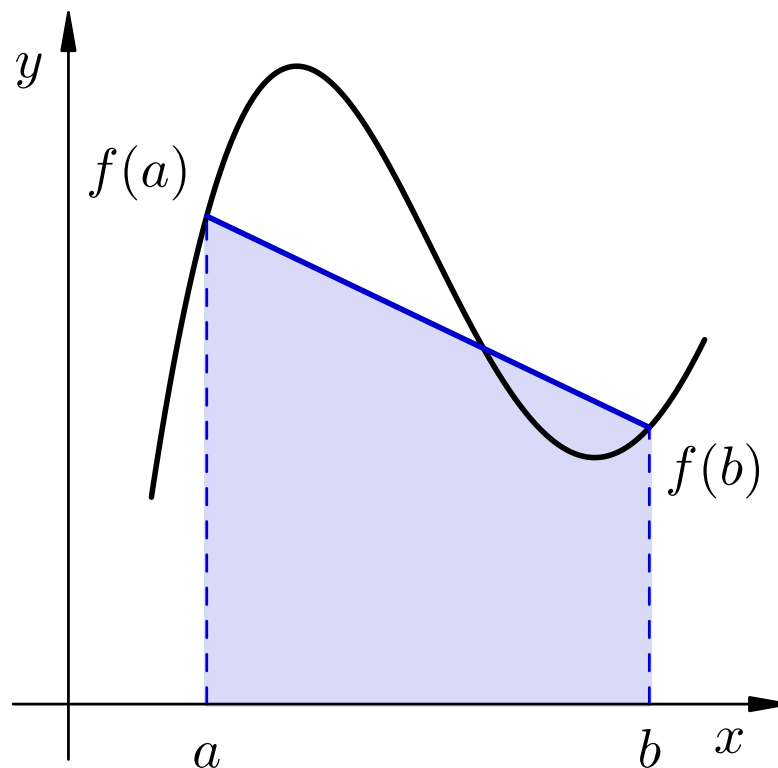
Zašto baš trapezna formula?

Slika aproksimacije **integrala** funkcije f površinom **trapeza**.



Zašto baš trapezna formula?

Ovisno o “obliku” funkcije f , slika može izgledati i ovako:



Koje polinome egzaktno integrira trapezna f.?

Trapeznu formulu smo **izveli** iz uvjeta **egzaktnosti** prostoru polinoma \mathcal{P}_1 stupnja 1.

- Zato formula **egzaktno** integrira sve polinome stupnja 1.
- Međutim, ona **neće** egzaktno integrirati **sve** polinome stupnja 2, jer **ne** integrira egzaktno

$$f(x) = x^2.$$

Naime, vrijedi

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx \neq I_1(x^2) = \frac{a^2 + b^2}{2} (b - a).$$

Dakle, tzv. **polinomi stupanj egzaktnosti** trapezne formule je 1.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Do trapezne formule možemo doći i na drugačiji način — iz interpolacije.

- Kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ povučemo interpolacijski polinom stupnja 1 za funkciju f ,
- a zatim ga egzaktno integriramo.

Dobivamo opet trapeznu formulu (dokaz na sljedećoj stranici).

Dakle, vidimo da vrijedi

$$\text{aproksimacija integrala} = \text{integral aproksimacije (interpolacije)}.$$

Ovaj zaključak nam omogućava nalaženje greške trapezne formule! Slično vrijedi i za ostale integracijske formule.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Interpolacijski **pravac** za funkciju f , koji prolazi zadanim točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, je

$$p_1(x) = f(a) + f[a, b] (x - a).$$

Njegov **integral** na $[a, b]$ je

$$\begin{aligned} \int_a^b p_1(x) dx &= \left(f(a)x + f[a, b] \frac{(x - a)^2}{2} \right) \Big|_a^b \\ &= (b - a)f(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f[a, b] \\ &= (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Greška trapezne formule

Neka je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ (inače nema smisla).

Grešku integracijske formule dobit ćemo kao integral greške interpolacijskog polinoma — zapis je u Newtonovom obliku.

- Greška interpolacijskog polinoma stupnja 1, koji funkciju f interpolira u točkama $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, na intervalu $[a, b]$ jednaka je

$$e_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x - a)(x - b) f[a, b, x].$$

- Greška trapezne formule je

$$E_1(f) = \int_a^b e_1(x) dx = \int_a^b (x - a)(x - b) f[a, b, x] dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ostaje samo izračunati $E_1(f)$. Iskoristit ćemo generalizaciju teorema srednje vrijednosti za integrale.

Teorem (Ocjena za integrale s težinama). Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je g ograničena, uz

$$m = \inf_{x \in [a, b]} g(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} g(x).$$

Dodatno, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$. Onda vrijedi

$$m \int_a^b w(x) dx \leq \int_a^b w(x)g(x) dx \leq M \int_a^b w(x) dx.$$

Napomena. Za $w(x) = 1$, ovo ste sigurno već vidjeli!

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Dokaz. Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, za svaki $x \in [a, b]$, vrijedi

$$m \leq g(x) \leq M \implies mw(x) \leq g(x)w(x) \leq Mw(x).$$

Tvrdnja izlazi integriranjem, koristeći **monotonost** integrala. ■

Teorem (Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama).

Neka su funkcije g i w **integrabilne** na $[a, b]$ i neka je g **ograničena**, uz

$$m = \inf_{x \in [a, b]} g(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} g(x).$$

Nadalje, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Tada postoji broj μ , takav da je $m \leq \mu \leq M$, za kojeg vrijedi

$$\int_a^b w(x)g(x) dx = \mu \int_a^b w(x) dx.$$

Posebno, ako je g neprekidna na $[a, b]$, onda postoji broj $\zeta \in [a, b]$, takav da je

$$\int_a^b w(x)g(x) dx = g(\zeta) \int_a^b w(x) dx.$$

Napomena. I ovo znate za $w(x) = 1$, tj. za $\int_a^b w(x) dx = b - a$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Dokaz. Ako je

$$\int_a^b w(x) dx = 0,$$

onda, po teoremu o ocjeni integrala s težinama, mora vrijediti

$$\int_a^b w(x)g(x) dx = 0,$$

pa za μ možemo uzeti proizvoljan realan broj između m i M .
Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, ostaje pogledati slučaj kad je

$$\int_a^b w(x) dx > 0.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Onda, iz teorema o ocjeni integrala s težinama, dijeljenjem dobivamo da za

$$\mu := \frac{\int_a^b w(x)g(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}$$

vrijedi tvrdnja i

$$m \leq \mu \leq M.$$

Zaključak o neprekidnom g slijedi iz činjenice da

- neprekidna funkcija na segmentu postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma, pa mora postići i μ (neprekidna slika segmenta je segment).
- Prema tome, postoji $\zeta \in [a, b]$, takav da je $\mu = g(\zeta)$. ■

Greška trapezne formule

Vratimo se na **grešku trapezne** formule. Već smo pokazali da je

$$E_1(f) = \int_a^b (x - a)(x - b) f[a, b, x] dx,$$

gdje je $(x - a)(x - b)$ **polinom čvorova** pripadne **interpolacije**.

Očito je

$$(x - a)(x - b) \leq 0 \quad \text{na} \quad [a, b],$$

pa možemo uzeti

$$w(x) = -(x - a)(x - b), \quad g(x) = -f[a, b, x].$$

Uočiti: funkcija $g(x) = -f[a, b, x]$ je **neprekidna**, čim je f **neprekidna** na $[a, b]$ i postoje **derivacije** f' u rubovima a i b .

Greška trapezne formule

Po teoremu srednje vrijednosti za integrale s težinama, postoji $\eta \in [a, b]$, takav da vrijedi

$$E_1(f) = -f[a, b, \eta] \int_a^b -(x - a)(x - b) dx.$$

Ovaj se integral jednostavno računa. Integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b (b - x)(x - a) dx &= \left((b - a) \frac{(x - a)^2}{2} - \frac{(x - a)^3}{3} \right) \Big|_a^b \\ &= (b - a)^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{(b - a)^3}{6}. \end{aligned}$$

Na početku smo iskoristili rastav $b - x = (b - a) - (x - a)$.

Greška trapezne formule

Dakle, za **grešku** vrijedi

$$E_1(f) = -f[a, b, \eta] \frac{(b-a)^3}{6}, \quad \eta \in [a, b].$$

Standardni izraz za **grešku trapezne** formule dobivamo uz **jače** pretpostavke na f .

Ako f'' **postoji** na cijelom $[a, b]$, onda podijeljenu razliku možemo napisati preko f'' , tj. **postoji** $\zeta \in [a, b]$ za kojeg je

$$f[a, b, \eta] = \frac{f''(\zeta)}{2},$$

pa je

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta).$$

Pogrešan izvod greške trapezne formule

Ako f'' postoji na $[a, b]$, onda grešku interpolacije možemo napisati u obliku (raniji teorem)

$$e_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x - a)(x - b) \frac{f''(\xi)}{2},$$

gdje je $\xi = \xi(x)$ (ovisi o x). Greška trapezne formule je onda

$$E_1(f) = \int_a^b e_1(x) dx = \int_a^b (x - a)(x - b) \frac{f''(\xi(x))}{2} dx.$$

Znajući da je $\omega(x) = (x - a)(x - b) \leq 0$ na $[a, b]$, mogli bismo uzeti

$$w(x) = -\frac{(x - a)(x - b)}{2}, \quad g(x) = -f''(\xi(x)).$$

Pogrešan izvod greške trapezne formule

Uz dodatnu pretpostavku $f \in C^2[a, b]$, tj. f'' je neprekidna na $[a, b]$, zaista vrijedi:

• funkcija $g(x) = -f''(\xi(x))$ je neprekidna funkcija od x .

Međutim, dokaz te činjenice ide izravno iz greške interpolacije (ima nešto posla)!

Pogrešno: Zaključak argumentom “kompozicije neprekidnih” funkcija, nakon uvrštavanja neke “postojeće” točke $\xi = \xi(x)$.

• Takvih “postojećih” ξ -ova može biti više za isti x , a nema jednostavnog načina za izbor koji osigurava da je $\xi = \xi(x)$ neprekidna funkcija od x .

Nažalost, tim pogrešnim/nepotpunim zaključivanjem dolazimo do korektnog rezultata!

Osnovna Simpsonova formula

Osnovna Simpsonova formula

Izvedimo **sljedeću** (zatvorenu) Newton–Cotesovu formulu za $m = 2$ (s 3 čvora), poznatu pod imenom **Simpsonova formula**. Ona ima oblik

$$I_2(f) = w_0^{(2)} f(x_0) + w_1^{(2)} f(x_0 + h_2) + w_2^{(2)} f(x_0 + 2h_2),$$

pri čemu je

$$h := h_2 = \frac{b - a}{2}.$$

Ponovno, da bismo olakšali pisanje, izostavimo gornje indekse. Kad h uvrstimo u formulu, dobivamo

$$I_2(f) = w_0 f(a) + w_1 f\left(\frac{a + b}{2}\right) + w_2 f(b).$$

Osnovna Simpsonova formula

Imamo **tri** nepoznata parametra, pa moramo postaviti **najmanje tri** uvjeta za **egzaktnost** ove formule na vektorskom prostoru polinoma \mathcal{P}_n što višeg stupnja n . Krećemo s $n = 2$.

• Za $f(x) = 1$ dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0 dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1.$$

• Za $f(x) = x$ izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x dx = w_0 \cdot a + w_1 \frac{a + b}{2} + w_2 \cdot b.$$

Osnovna Simpsonova formula

• Konačno, za $f(x) = x^2$ dobivamo

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx = w_0 \cdot a^2 + w_1 \frac{(a+b)^2}{4} + w_2 \cdot b^2.$$

Sada imamo linearni sustav s **tri** jednačbe i **tri** nepoznanice

$$w_0 + w_1 + w_2 = b - a$$

$$aw_0 + \frac{a+b}{2} w_1 + bw_2 = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$a^2w_0 + \frac{(a+b)^2}{4} w_1 + b^2w_2 = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Osnovna Simpsonova formula

Rješavanjem ovog sustava (izračunajte sami!), dobivamo

$$w_0 = w_2 = \frac{h}{3} = \frac{b-a}{6}, \quad w_1 = \frac{4h}{3} = \frac{4(b-a)}{6},$$

Integracijska formula $I_2(f)$ dobivena je iz **egzaktnosti** na svim polinomima iz \mathcal{P}_2 , stupnja **manjeg ili jednakog 2**, i glasi

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Zadatak. Ponovite izvod na “**simetričnoj**” bazi potencija

$$1, \quad x - \frac{a+b}{2}, \quad \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Egzaktna integracija x^3

Simpsonova formula, iako je dobivena iz uvjeta **egzaktnosti** na vektorskom prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog **2**,

● **egzaktno** integrira i **sve** polinome stupnja **3**.

Pokažimo da je **polinomi stupanj egzaktnosti** Simpsonove formule jednak **3** — za **jedan više** nego što bismo očekivali!

● Dovoljno je pokazati da formula egzaktno integrira

$$f(x) = x^3.$$

Egzaktni integral jednak je

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Egzaktna integracija x^3

Po Simpsonovoj formuli, za $f(x) = x^3$ dobivamo

$$\begin{aligned} I_2(x^3) &= \frac{b-a}{6} \left(a^3 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 + b^3 \right) \\ &= \frac{b-a}{6} \cdot \frac{3}{2} (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}. \end{aligned}$$

Nije teško pokazati da je i Simpsonova formula **interpolacijska**.

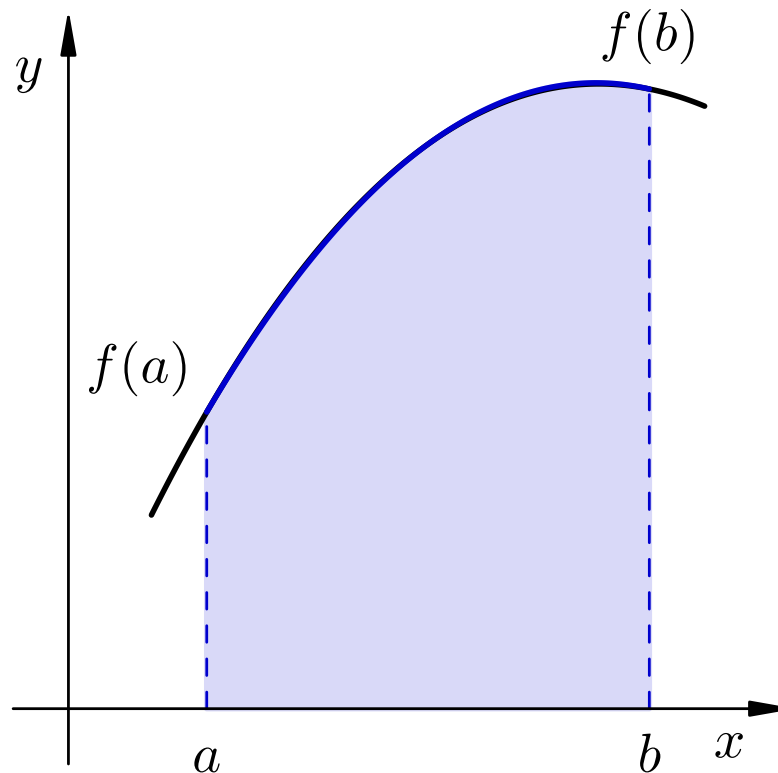
Ako povučemo **kvadratni interpolacijski** polinom kroz **3** točke

$$(a, f(a)), \quad \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right), \quad (b, f(b)),$$

a zatim ga **egzaktno** integriramo od a do b , dobivamo upravo **Simpsonovu** formulu. Provjerite sami!

Točnost Simpsonove formule

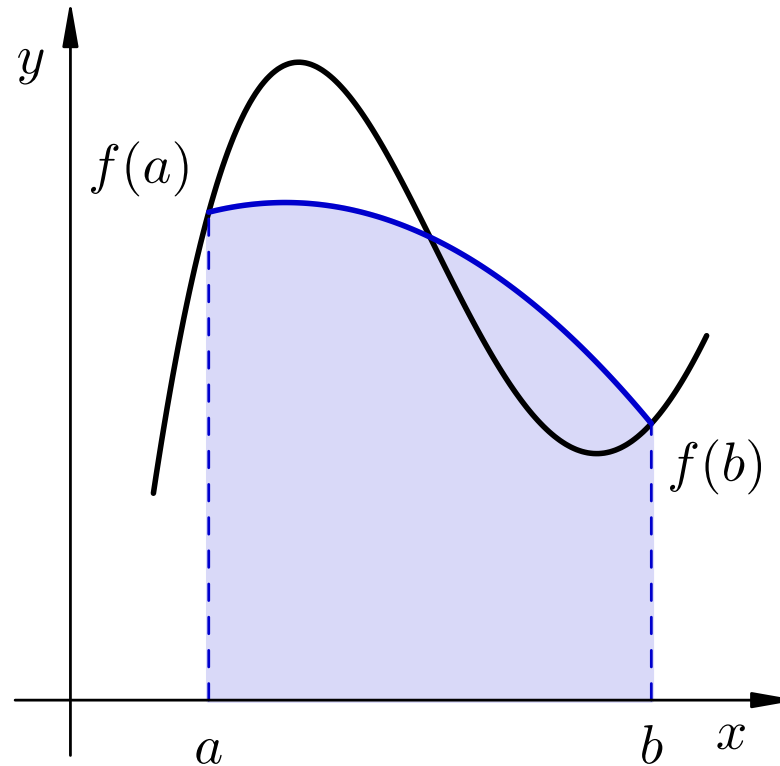
Ilustrirajmo kako **Simpsonova** formula funkcionira na **integralu** kojeg smo aproksimirali **trapeznom** formulom.



Ovdje je aproksimacija integrala **vrlo dobra**.

Točnost Simpsonove formule

Ovisno o “obliku” funkcije f , slika može izgledati i ovako:



Dakle, aproksimacija **ne mora** biti tako dobra.

Greška Simpsonove formule

Označimo, za kraći zapis,

$$c := \frac{a + b}{2}.$$

Grešku Simpsonove formule računamo slično kao kod trapezne, integracijom greške kvadratnog interpolacijskog polinoma p_2 .

Zapis je u Newtonovom obliku — preko podijeljene razlike

$$e_2(x) = f(x) - p_2(x) = (x - a)(x - c)(x - b) f[a, b, c, x].$$

Za grešku Simpsonove formule vrijedi

$$E_2(f) = \int_a^b e_2(x) dx.$$

Greška Simpsonove formule

Nažalost, pripadni **polinom čvorova**

$$\omega(x) = (x - a)(x - c)(x - b)$$

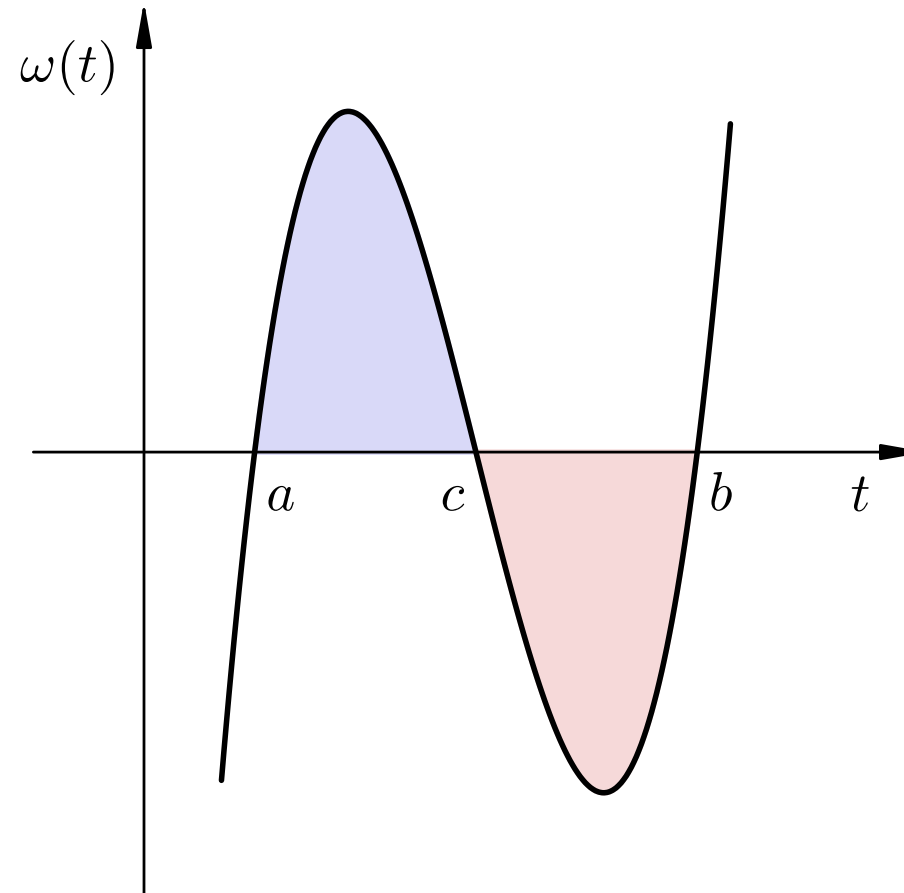
nije fiksnog znaka na $[a, b]$, pa ne možemo direktno primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti za integrale.

Zato definiramo $w(x)$ kao **integral** polinoma čvorova od a do x

$$w(x) = \int_a^x \omega(t) dt = \int_a^x (t - a)(t - c)(t - b) dt.$$

Skiciramo li graf **polinoma čvorova** $\omega(t) = (t - a)(t - c)(t - b)$, odmah vidimo da je taj graf **centralno simetričan** oko srednje točke c , pa zaključujemo ...

Greška Simpsonove formule



da će integral **rasti** od 0 do svog maksimuma (**plava** površina),
a zatim **padati** (kad dođe u **crveno** područje), upravo do 0 .

Greška Simpsonove formule

Dakle, za polinom w vrijedi $w' = \omega$ i još je

$$w(a) = w(b) = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in (a, b).$$

Onda **grešku Simpsonove formule** možemo napisati kao

$$E_2(f) = \int_a^b \underbrace{w'(x)}_{\omega(x)} f[a, b, c, x] dx.$$

Parcijalnom integracijom ovog integrala dobivamo

$$E_2(f) = w(x) f[a, b, c, x] \Big|_a^b - \int_a^b w(x) \frac{d}{dx} f[a, b, c, x] dx.$$

Prvi član je očito jednak 0, jer je $w(a) = w(b) = 0$.

Greška Simpsonove formule

Ostaje još “srediti” drugi član. Već znamo da je podijeljena razlika s dvostrukim čvorom jednaka derivaciji funkcije.

- Analogno, derivacija treće podijeljene razlike $f[a, b, c, x]$ po x , je isto što i
- četvrta podijeljena razlika s dvostrukim čvorom x .

Prema tome, dobivamo formulu za grešku u obliku

$$E_2(f) = - \int_a^b w(x) f[a, b, c, x, x] dx.$$

Funkcija $g(x) = f[a, b, c, x, x]$ je neprekidna na $[a, b]$, čim je f' neprekidna na $[a, b]$ i postoje druge derivacije f'' u čvorovima a , b i c .

Greška Simpsonove formule

Sad je funkcija w nenegativna i možemo primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti za integrale. Izlazi

$$E_2(f) = -f[a, b, c, \eta, \eta] \int_a^b w(x) dx,$$

za neki $\eta \in [a, b]$.

Ako $f^{(4)}$ postoji na cijelom $[a, b]$, napišemo $f[a, b, c, \eta, \eta]$ kao četvrtu derivaciju od f u nekoj točki $\zeta \in [a, b]$, pa dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!} \int_a^b w(x) dx.$$

Ostaje još samo integrirati funkciju w .

Greška Simpsonove formule

Za **samu** funkciju w vrijedi da je integral polinoma čvorova ω

$$\begin{aligned}w(x) &= \int_a^x (t - a)(t - c)(t - b) dt \\&= (\text{zamjena varijable } y = t - c) \\&= \int_{-h}^{x-c} (y - h)y(y + h) dy = \int_{-h}^{x-c} (y^3 - h^2y) dy \\&= \left(\frac{y^4}{4} - h^2 \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-h}^{x-c} = \frac{(x - c)^4}{4} - h^2 \frac{(x - c)^2}{2} + \frac{h^4}{4}.\end{aligned}$$

Greška Simpsonove formule

Za **integral** funkcije w onda dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x) dx &= \int_a^b \left(\frac{(x-c)^4}{4} - h^2 \frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dx \\ &= (\text{zamjena varijable } y = x - c) \\ &= \int_{-h}^h \left(\frac{y^4}{4} - h^2 \frac{y^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dy \\ &= \left(\frac{y^5}{20} - h^2 \frac{y^3}{6} + \frac{h^4 y}{4} \right) \Big|_{-h}^h = 2 \left(\frac{h^5}{20} - \frac{h^5}{6} + \frac{h^5}{4} \right) \\ &= \frac{4}{15} h^5.\end{aligned}$$

Greška Simpsonove formule

Kad to uključimo u formulu za grešku, dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{4}{15} h^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\zeta)}{24} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta).$$

Dakle, greška Simpsonove formule je

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta).$$

Dobivena greška je za red veličine bolja, no što bi trebala biti, prema upotrijebljenom interpolacijskom polinomu.

Razlog tome je centralna simetrija polinoma čvorova w oko srednje točke c , pa je $w(a) = w(b) = 0$. To vrijedi za sve integracijske formule s neparnim brojem čvorova $m + 1$, uz uvjet da su čvorovi simetrični oko polovišta intervala.

Povećana točnost Simpsonove formule

Zadatak. Pokažite da se Simpsonova formula može dobiti integracijom (proširenog) Hermiteovog interpolacijskog polinoma $p_3 \in \mathcal{P}_3$, koji interpolira

- funkciju f u čvorovima a , $(a + b)/2$, b ,
- i prvu derivaciju f' u srednjem čvoru $(a + b)/2$.

U dobivenoj integracijskoj formuli, koeficijent uz vrijednost derivacije

$$f' \left(\frac{a + b}{2} \right)$$

jednak je **nuli**, zbog simetrije čvorova i težinske funkcije $w(x) = 1$ oko polovišta intervala.

Izvedite **grešku Simpsonove** formule — integracijom greške polinoma p_3 . Polinom čvorova za p_3 ima **fiksni** znak na $[a, b]$!

Osnovna formula srednje točke

Osnovna formula srednje točke

Izvedimo prvu **otvorenu** Newton–Cotesovu formulu, za $m = 0$ (samo 1 čvor), poznatu pod imenom **formula srednje točke**, ili pod engleskim nazivom “**midpoint**” formula.

Formula srednje točke je otvorena formula, pa definiramo

$$x_{-1} := a, \quad x_0 := \frac{a+b}{2}, \quad x_1 := b \quad \text{i} \quad h := h_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Da bismo odredili formulu srednje točke, moramo naći **težinski** koeficijent $w_0 := w_0^{(0)}$, takav da je formula

$$I_0(f) = w_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

egzaktna na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

Osnovna formula srednje točke

• Za $f(x) = 1$, imamo

$$b - a = \int_a^b 1 \, dx = w_0,$$

odakle odmah slijedi da je

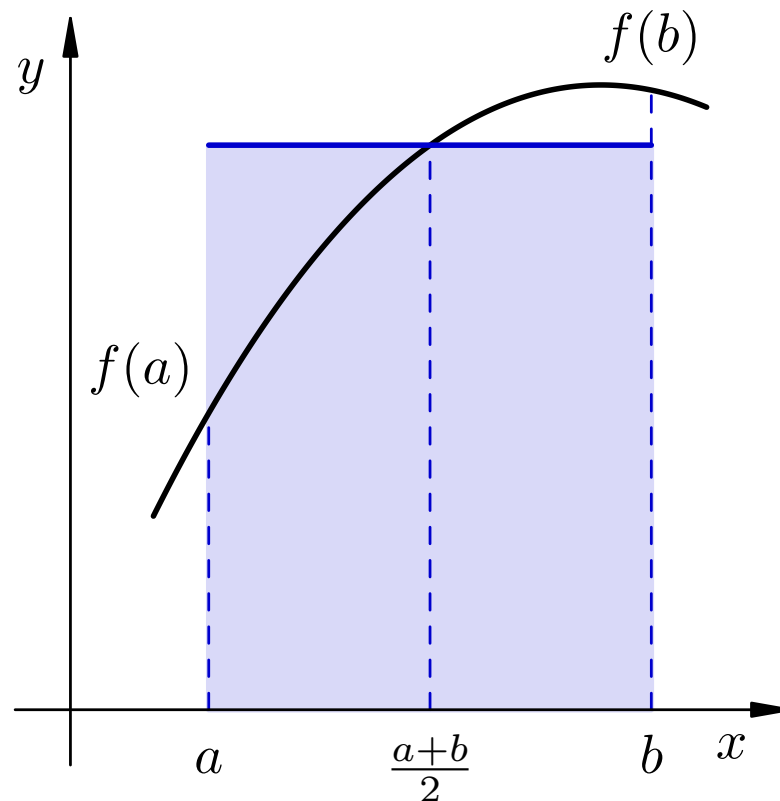
$$\int_a^b f(x) \, dx \approx 2hf\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I ova formula je **interpolacijska**, tj. možemo ju dobiti i tako da

- funkciju f **interpoliramo** polinomom stupnja 0, tj. konstantom, u **srednjoj** točki $(a+b)/2$,
- a onda **egzaktno** integriramo tu konstantu na $[a, b]$.

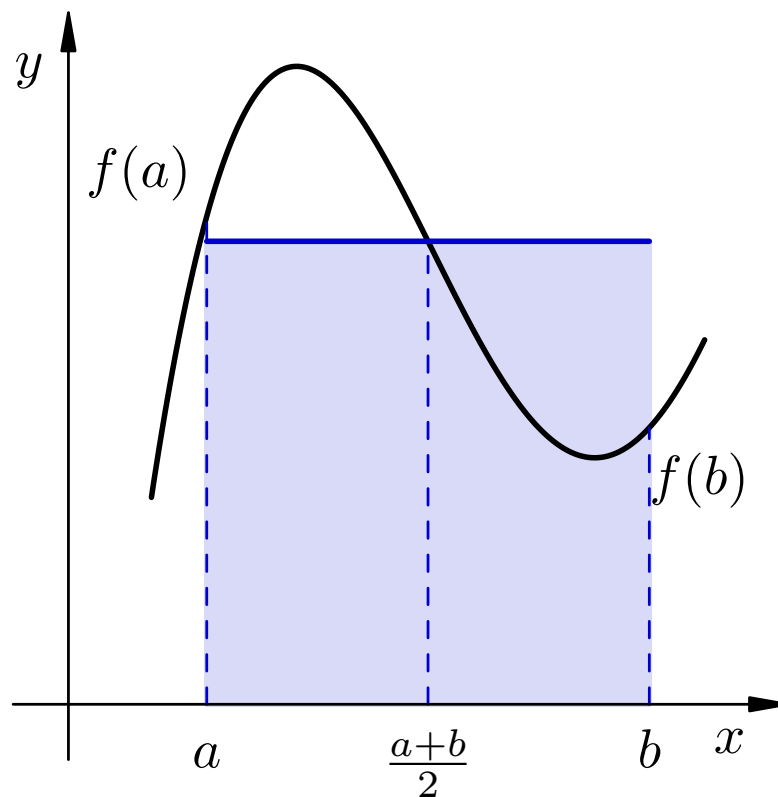
Pravokutna formula u srednjoj točki

Aproksimacija **integrala** funkcije f površinom **pravokutnika**.



Pravokutna formula u srednjoj točki

Ovisno o “obliku” funkcije f , slika može izgledati i ovako:



Egzaktna integracija polinoma stupnja 1

Slično kao i Simpsonova formula,

- formula srednje točke egzaktno integrira i polinome stupnja za jedan većeg — sljedećeg neparnog stupnja.

Pokažimo da formula srednje točke egzaktno integrira i sve polinome stupnja 1.

- Za $f(x) = x$, egzaktni integral je

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

a aproksimacija integrala po formuli srednje točke je

$$I_0(f) = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) = (b - a)\frac{a + b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Greška osnovne formule srednje točke

Greška formule srednje točke je **integral** greške konstantnog interpolacijskog polinoma p_0 , koji funkciju f interpolira u srednjoj točki $c := (a + b)/2$.

Ako definiramo $w(x)$ kao **integral** polinoma čvorova $\omega(t)$

$$w(x) = \int_a^x \omega(t) dt = \int_a^x (t - c) dt,$$

korištenjem iste tehnike kao kod izvoda greške za Simpsonovu formulu, izlazi da je **greška** formule **srednje točke**

$$E_0(f) = \int_a^b e_0(x) dx = \frac{h^3}{3} f''(\zeta) = \frac{(b - a)^3}{24} f''(\zeta),$$

uz $\zeta \in [a, b]$.

Formula srednje točke i trapezna formula

Napomena. Za istu duljinu intervala $b - a$,

- formula srednje točke, iako ima samo jednu točku,
- približno je dva puta točnija
- od trapezne formule, koja ima dvije točke.

Greška prve formule ima 24 u nazivniku, a greška druge 12.

Trapeznu formulu možemo dobiti iz formule srednje točke

- linearnom interpolacijom funkcije u srednjoj točki, preko funkcijskih vrijednosti u rubovima intervala

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \approx \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

To unosi dodatnu pogrešku — istog reda veličine kao i u originalnoj formuli (zato dodatni faktor 2). Dokažite to!

Povećana točnost “midpoint” formule

Zadatak. Pokažite da se formula srednje točke može dobiti integracijom Hermiteovog interpolacijskog polinoma $p_1 \in \mathcal{P}_1$, koji interpolira

- funkciju f i prvu derivaciju f' u srednjoj točki $(a + b)/2$.

U dobivenoj integracijskoj formuli, koeficijent uz vrijednost derivacije $f'((a + b)/2)$ jednak je nuli, zbog simetrije težinske funkcije $w(x) = 1$ oko polovišta intervala.

Izvedite grešku formule srednje točke — integracijom greške polinoma p_1 . Polinom čvorova za p_1 ima fiksni znak na $[a, b]$!

Napomena. Uočite da je formula srednje točke, ujedno, i Gaussova integracijska formula — red je $m = 0$, a egzaktna je na polinomima stupnja $2m + 1 = 1$ (v. sljedeći puta).

Teorija integracijskih formula

Interpolacijske integracijske formule — uvod

Nije teško pokazati da su sve **obične Newton–Cotesove** formule **integrali interpolacijskih polinoma** na **ekvidistantnoj** mreži.

Ovaj rezultat vrijedi i **općenitije** — za bilo kakvu **težinsku** integracijsku formulu, koja koristi **samo** vrijednosti funkcije

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_m(f) + E_m(f),$$

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}),$$

na **bilo kojoj** (zadanoj) mreži različitih čvorova $x_0^{(m)}, \dots, x_m^{(m)}$.

Napomene. Radi jednostavnosti pisanja, ponovno ispuštamo gornje indekse m . Ovdje je **red** $m = \text{broj čvorova} - 1$.

Težinska funkcija u integracijskoj formuli

Pretpostavljamo da je **težinska** funkcija w

● **pozitivna** (ili barem **nenegativna**) i **integrabilna** na $[a, b]$.

Ako je interval $[a, b]$ **beskonačan**, moramo osigurati da prethodni integral **postoji**, bar u slučaju kad je

● funkcija f **polinom**, neovisno o stupnju.

To postizemo **zahtjevom** da svi **momenti** težinske funkcije w

$$\mu_k := \int_a^b x^k w(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

postoje (kao integrali) i da su **konačni**.

Takve težinske funkcije w zovemo **polinomno** dopustivima.

Nadalje pretpostavljamo da je w takva!

Polinomni stupanj egzaktnosti formule

Definicija. Za integracijsku formulu I_m , reda m , kažemo da ima **polinomni stupanj egzaktnosti** (barem) d , ako je

$$I_m(f) = I(f) \quad \text{ili} \quad E_m(f) = 0, \quad \text{za sve } f \in \mathcal{P}_d,$$

pri čemu je \mathcal{P}_d vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog d . Uočiti da d **nije** jednoznačno definiran kao **najveći** stupanj egzaktnosti — na primjer, zbog **Simpsonove** formule!

Integracijska formula I_m je **interpolacijska**, ako je $d = m$. ■

Preciznije, trebalo bi reći $d \geq m$, tj. stupanj egzaktnosti je **barem** m , a može biti i **veći**. Bitno je samo da je

$$E_m(f) = 0, \quad \text{za sve } f \in \mathcal{P}_m.$$

Interpolacijske formule

Teorem (Ekvivalencija tvrdnji **A**, **B**, **C**). Integracijska formula

$$\int_a^b w(x)f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

ima stupanj **egzaktnosti** (barem) m (**A**), **ako i samo ako** je

• $I_m(f)$ = integral **interpolacijskog** polinoma p_m za funkciju f u čvorovima x_0, \dots, x_m (**B**),

odnosno, **ako i samo ako** za težinske koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x)l_k(x) dx, \quad k = 0, \dots, m,$$

gdje je l_k k -ti polinom **Lagrangeove** baze, za $k = 0, \dots, m$ (**C**).

Interpolacijske formule

Dokaz. Ide u 3 koraka: (C) \Rightarrow (B), (B) \Rightarrow (A), (A) \Rightarrow (C).

1. korak: Pretpostavimo da vrijedi formula za w_k (C). Onda je

$$\begin{aligned} I_m(f) &= \sum_{k=0}^m w_k f(x_k) = \sum_{k=0}^m f(x_k) \int_a^b w(x) \ell_k(x) dx \\ &= \int_a^b w(x) \left(\sum_{k=0}^m f(x_k) \ell_k(x) \right) dx = \int_a^b w(x) p_m(x) dx, \end{aligned}$$

pa je integracijska formula $I_m(f) = \text{integral interpolacijskog polinoma } p_m \text{ za funkciju } f \text{ u čvorovima } x_0, \dots, x_m$. Dakle, vrijedi (B).

Interpolacijske formule

2. korak: Pretpostavimo da vrijedi $I_m(f) = I(p_m)$ (B).

Neka je $f = p \in \mathcal{P}_m$ i neka je $p_m \in \mathcal{P}_m$ pripadni interpolacijski polinom za p . Iz **jedinstvenosti** interpolacije slijedi $p = p_m$, pa je $I_m(p) = I(p)$, za svaki $p \in \mathcal{P}_m$, tj. vrijedi (A).

3. korak: Pretpostavimo da je I_m **interpolacijska** formula (A).

Za p uzmemo, redom, polinome **Lagrangeove** baze $l_r \in \mathcal{P}_m$, za $r = 0, \dots, m$. Iz **egzaktne** integracije l_r slijedi formula (C)

$$\int_a^b w(x) l_r(x) dx = \sum_{k=0}^m w_k l_r(x_k) = w_r, \quad r = 0, \dots, m. \quad \blacksquare$$

Korolar. Standardne **Newton–Cotesove** formule su integrali interpolacijskih polinoma na **ekvidistantnoj** mreži na $[a, b]$. ■

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

Prethodni korolar kaže još i ovo:

- ako interpolacijski polinomi loše aproksimiraju funkciju, ni integracijske formule neće biti ništa bolje!

Primjer. Uzmimo $f =$ funkcija Runge i pogledajmo kako se ponašaju aproksimacije integrala $I_m(f)$, kad dižemo stupanj m interpolacijskog polinoma. Prava vrijednost integrala je

$$I(f) = \int_{-5}^5 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} 5 \approx 2.74680153389003172.$$

Tablice na sljedeće dvije stranice su aproksimacije integrala, izračunate običnim Newton–Cotesovim formulama $I_m(f)$, i pripadne greške $E_m(f) = I(f) - I_m(f)$, za rastuće redove m .

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
1	0.38461538461538462	2.36218614927464711
2	6.79487179487179487	-4.04807026098176315
3	2.08144796380090498	0.66535357008912674
4	2.37400530503978780	0.37279622885024392
5	2.30769230769230769	0.43910922619772403
6	3.87044867347079978	-1.12364713958076805
7	2.89899440974837875	-0.15219287585834703
8	1.50048890712791179	1.24631262676211993
9	2.39861789784183472	0.34818363604819700
10	4.67330055565349876	-1.92649902176346704

Zelene znamenke u aproksimaciji su **točne**, a sve ostale **nisu**!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
11	3.24477294027858525	-0.49797140638855353
12	-0.31293651575343889	3.05973804964347061
13	1.91979721683238891	0.82700431705764282
14	7.89954464085193082	-5.15274310696189909
15	4.15555899270655713	-1.40875745881652541
16	-6.24143731477308329	8.98823884866311501
17	0.26050944143760372	2.48629209245242800
18	18.87662129010920670	-16.12981975621917490
19	7.24602608588196936	-4.49922455199193763
20	-26.84955208882447960	29.59635362271451140

Očito je da aproksimacije $I_m(f)$ **ne konvergiraju** prema pravoj vrijednosti integrala, kad m raste.

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f .

Pogledajmo kako izgledaju težinski koeficijenti w_k zatvorenih običnih Newton–Cotesovih formula, za redove $m \geq 1$.

Zbog simetrije težina, u tablici je naveden samo dio w_k .

• Dovoljno je napisati prvu polovinu w_k , za $0 \leq k \leq \lfloor m/2 \rfloor$.

• Za preostale w_k vrijedi $w_k = w_{m-k}$, za $\lfloor m/2 \rfloor < k \leq m$.

Radi preglednosti, koeficijenti w_k prikazani su faktorizirano, kao zajednički faktor A i cjelobrojni faktor W_k , tj. u obliku

$$w_k = A W_k h, \quad h = (b - a)/m.$$

U tablici su popisane i konstante C_m, p , za grešku formule

$$E_m(f) = C_m h^{p+1} f^{(p)}(\zeta), \quad p = \begin{cases} m + 1, & \text{za } m \text{ neparan,} \\ m + 2, & \text{za } m \text{ paran.} \end{cases}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f .

m	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	C_m	p
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$-\frac{1}{12}$	2
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$-\frac{1}{90}$	4
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$-\frac{3}{80}$	4
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$-\frac{8}{945}$	6
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	$-\frac{275}{12096}$	6
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	$-\frac{9}{1400}$	8
7	$\frac{7}{17280}$	751	3577	1323	2989	2989	$-\frac{8183}{518400}$	8
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	$-\frac{2368}{467775}$	10

Imena: $m = 3$ — Simpsonova $3/8$, $m = 4$ — Booleova formula.

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f .

Pogledajmo kako izgledaju težinski koeficijenti w_k otvorenih običnih Newton–Cotesovih formula, za redove $m \geq 0$.

Slično kao kod zatvorenih formula, zbog simetrije, u tablici je naveden samo dio koeficijenata w_k .

Koeficijenti w_k prikazani su u istom obliku $w_k = A W_k h$, s tim da je za otvorene formule

$$h = \frac{b - a}{m + 2}.$$

U tablici su popisane i konstante C_m , p , za grešku formule

$$E_m(f) = C_m h^{p+1} f^{(p)}(\zeta), \quad p = \begin{cases} m + 2, & \text{za } m \text{ paran,} \\ m + 1, & \text{za } m \text{ neparan.} \end{cases}$$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f .

m	A	W_0	W_1	W_2	C_m	p
0	2	1			$\frac{1}{3}$	2
1	$\frac{3}{2}$	1	1		$\frac{3}{4}$	2
2	$\frac{4}{3}$	2	-1	2	$\frac{14}{45}$	4
3	$\frac{5}{24}$	11	1	1	$\frac{95}{144}$	4
4	$\frac{3}{10}$	11	-14	26	$\frac{41}{140}$	4

Zaključak. Koeficijenti u integracijskim formulama, za **veće** m ,

- poprimaju i **pozitivne** i **negativne** predznake,
- **rastu** po apsolutnoj vrijednosti.

Zbog **kraćenja**, može (mora) doći do velike **greške** u rezultatu.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f .

Zadatak. Pokažite da koeficijenti w_k običnih (ekvidistantnih) Newton–Cotesovih formula moraju biti simetrični, tj. ako je

$$\int_a^b f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

integracijska formula reda m , onda za koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = w_{m-k}, \quad 0 \leq k \leq \lfloor m/2 \rfloor \quad (\text{može i do } m).$$

Uputa. Uzeti “simetričnu” (par–nepar) bazu potencija oko polovišta

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k, \quad k = 0, \dots, m,$$

i napisati jednadžbe **egzaktne** integracije na toj bazi.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f .

Alternativa: Zbog ekvidistantnosti, čvorovi x_k , pa onda i Lagrangeova baza ℓ_k , za $k = 0, \dots, m$, moraju biti simetrični (parni) oko polovišta intervala. Zaključak slijedi iz formule

$$w_k = \int_a^b \ell_k(x) dx, \quad k = 0, \dots, m.$$

Isti zaključak vrijedi i za težinske Newton–Cotesove formule

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^m w_k f(x_k),$$

uz pretpostavke da su čvorovi x_k simetrični oko polovišta intervala i da je težinska funkcija w parna oko polovišta.

Produljene Newton–Cotesove formule

Produljene formule

Umjesto **dizanja** reda m osnovne formule, puno **bolje** je

- interval $[a, b]$ **podijeliti** na n podintervala,
- na **svakom** podintervalu primijeniti **osnovnu** formulu,
- i dobivene rezultate **zbrojiti**.

Tako dobivene formule zovemo **produljene** formule.

Kod dijeljenja na podintervale treba biti oprezan, jer se **osnovna** formula izvodi za odgovarajući **broj** podintervala.

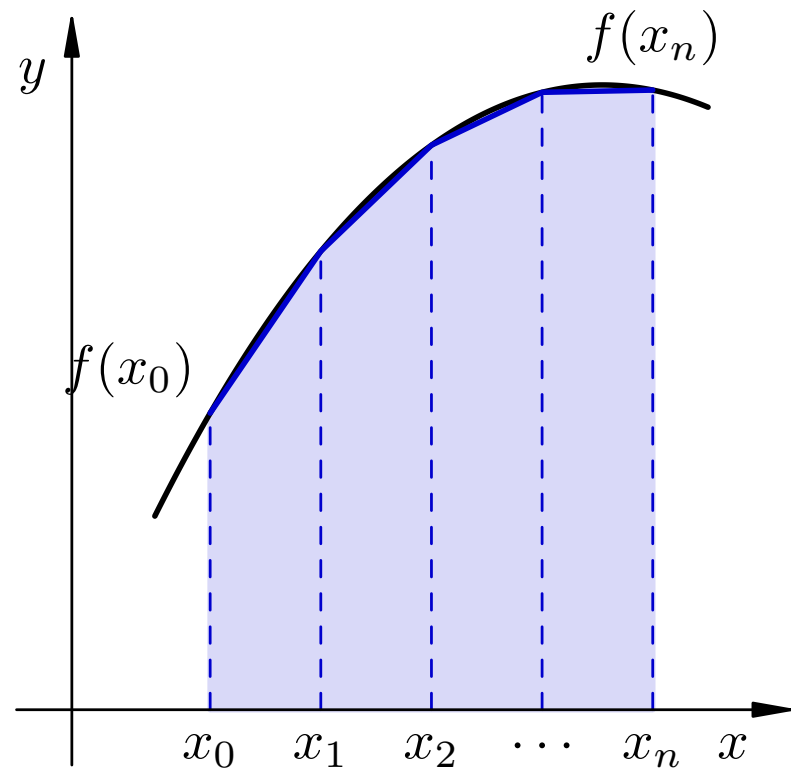
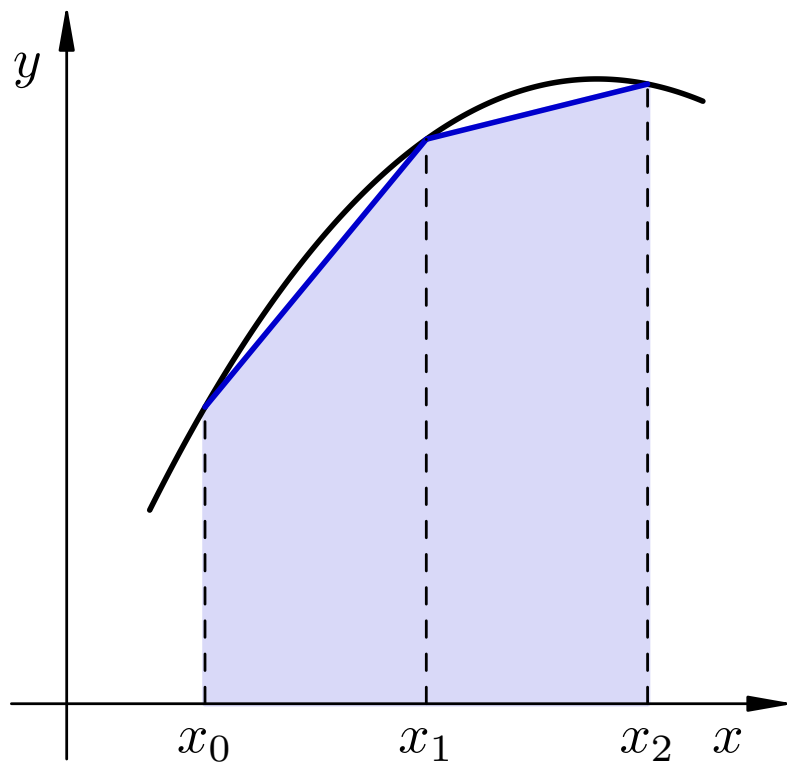
- Na primjer, **osnovna Simpsonova** formula zahtijeva **2** podintervala, pa n mora biti **paran**.

Produljenu formulu možemo interpretirati i kao **integral**

- odgovarajućeg **interpolacijskog splajna** za funkciju f .

Produljene formule

Na primjer, **produljene trapezne** formule, s $n = 2$ i $n = 4$ podintervala, izgledaju ovako:



Produljena trapezna formula

Produljenu trapeznu formulu dobivamo tako da cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \dots, n$, s tim da je

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada je

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

Na **svakom** podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \dots, n$,

- iskoristimo “običnu” trapeznu formulu
- i dobivene aproksimacije **zbrojimo** u **produljenu** trapeznu aproksimaciju.

Produljena trapezna formula

Najjednostavniji je slučaj kad su točke x_k ekvidistantne, tj. kad je svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ iste duljine h . To znači da je

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Za skraćenje zapisa formula, uvedimo još oznaku

$$f_k = f(x_k), \quad k = 0, \dots, n.$$

Obična trapezna formula na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_{k-1} + f_k) + E_{1,k}(f),$$

gdje je $E_{1,k}(f)$ pripadna greška.

Produljena trapezna formula

Znamo da za greške vrijedi (ako f'' postoji na cijelom $[a, b]$)

$$E_{1,k}(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\zeta_k), \quad \text{za neki } \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{h}{2}(f_{k-1} + f_k) + E_{1,k}(f) \right) \\ &= \frac{h}{2}((f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \cdots + (f_{n-1} + f_n)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n E_{1,k}(f). \end{aligned}$$

Produljena trapezna formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n) + E_n^T(f).$$

U ovoj formuli,

- prvi član je aproksimacija integrala produljenom trapeznom formulom,
- a drugi član $E_n^T(f)$ je greška produljene formule.

Greška $E_n^T(f)$ je zbroj grešaka osnovnih trapezних formula

$$E_n^T(f) = \sum_{k=1}^n E_{1,k}(f) = \sum_{k=1}^n -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k).$$

Greška produljene trapezne formule

Greška, ovako napisana, nije naročito korisna, pa ju treba napisati u drugačijem obliku — “proširimo” faktorom n/n i stavimo zagrade na pravo mjesto:

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f''(\zeta_k) \right).$$

- Izraz u zagradi je aritmetička sredina vrijednosti drugih derivacija funkcije f u točkama ζ_k .
- Taj se broj sigurno nalazi između najmanje i najveće vrijednosti druge derivacije funkcije f na intervalu $[a, b]$.
- Ako je f'' još i neprekidna na $[a, b]$, onda je broj u zagradi = vrijednost druge derivacije u nekoj točki $\xi \in [a, b]$.

Greška produljene trapezne formule

Dakle, ako je $f \in C^2[a, b]$, onda postoji točka $\xi \in [a, b]$, takva da je

$$f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f''(\zeta_k).$$

Stoga, formulu za grešku možemo napisati kao

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

Tu smo iskoristili da je $nh = b - a$.

Ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^T(f)$. Dobivamo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Iz ocjene greške produljene trapezne formule

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|,$$

možemo naći i broj podintervala n , koji je potreban da se postigne neka zadanu točnost aproksimacije integrala.

Želimo li da je $|E_n^T(f)| \leq \varepsilon$, gdje je ε tražena točnost, dovoljno je tražiti da je

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

pa treba uzeti

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}, \quad n \text{ cijeli broj.}$$

Produljena Simpsonova formula

Na sličan se način izvodi i **produljena Simpsonova formula**, koja mora imati **paran** broj podintervala n . Ograničimo se samo na **ekvidistantni** slučaj. Imamo

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom Simpsonovom formulom dobivamo iz

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx,$$

tako da na **svakom** podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \dots, n/2$, primijenimo “**običnu**” Simpsonovu formulu.

Produljena Simpsonova formula

Obična Simpsonova formula na podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) + E_{2,k}(f),$$

gdje je $E_{2,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{2,k}(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k), \quad \text{za neki } \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}],$$

uz pretpostavku da $f^{(4)}$ postoji na cijelom $[a, b]$.

Produljena Simpsonova formula

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^{n/2} \left(\frac{h}{3} (f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}) + E_{2,k}(f) \right) \\ &= \frac{h}{3} ((f_0 + 4f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots \\ &\quad + (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f).\end{aligned}$$

Produljena Simpsonova formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) + E_n^S(f),$$

pri čemu je $E_n^S(f)$ greška produljene formule. Ova greška je zbroj grešaka osnovnih Simpsonovih formula na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$

$$E_n^S(f) = \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f) = \sum_{k=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k).$$

Greška produljene Simpsonove formule

Slično kao kod trapezne formule, **grešku** je korisno napisati malo drugačije

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\zeta_k) \right).$$

Ako je $f^{(4)}$ još i **neprekidna**, tj. ako je $f \in C^4[a, b]$, onda izraz u zagradi možemo zamijeniti s $f^{(4)}(\xi)$, za neki $\xi \in [a, b]$, pa je

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Ponovno, **ocijenimo** po apsolutnoj vrijednosti $E_n^S(f)$

$$|E_n^S(f)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Želimo li da je $|E_n^S(f)| \leq \varepsilon$, dovoljno je tražiti da bude

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \leq \varepsilon,$$

pa treba uzeti

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad n \text{ paran cijeli broj.}$$

Produljena formula srednje točke

Da bismo izveli **produljenu formulu srednje točke**, podijelimo interval $[a, b]$ na n podintervala, gdje je n **paran** broj.

U **ekvidistantnom** slučaju je

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom formulom srednje točke dobivamo iz

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx,$$

tako da na **svakom** podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \dots, n/2$, primijenimo “**običnu**” formulu srednje točke.

Produljena formula srednje točke

Obična formula srednje točke na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx = 2h f_{2k-1} + E_{0,k}(f),$$

gdje je $E_{0,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki } \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

uz pretpostavku da f'' postoji na cijelom $[a, b]$.

Zbrajanjem po $k = 1, \dots, n/2$, dobivamo

$$I_n(f) = 2h(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + E_n^M(f).$$

Greška produljene formule srednje točke

Za $f \in C^2[a, b]$, ukupna greška $E_n^M(f)$ produljene formule je

$$\begin{aligned} E_n^M(f) &= \sum_{k=1}^{n/2} \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{3} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f''(\zeta_k) \right) \\ &= \frac{h^3 n}{6} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi), \end{aligned}$$

za neki $\xi \in [a, b]$. Ocjena greške $E_n^M(f)$ ima oblik

$$|E_n^M(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{6} M_2 = \frac{(b-a)^3}{6n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala, za zadanu apsolutnu točnost ε , dobivamo na isti način kao prije, s tim da n mora biti **paran**.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Katkad se **produljena** formula **srednje točke** piše s **polovičnim** (a ne cjelobrojnim) indeksima!

Ovaj oblik formule dobiva se primjenom **obične** formule srednje točke

• na podintervalima oblika $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \dots, n$,

• s tim da n više **ne mora** biti **paran**,

tj., **isto** kao kod produljene trapezne formule.

U **ekvidistantnom** slučaju je

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

Ovaj h odgovara **ranijem** $2h$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Srednja točka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ je

$$x_{k-1/2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \quad k = 1, \dots, n.$$

Uz oznaku $f_{k-1/2} = f(x_{k-1/2})$, za $k = 1, \dots, n$, obična formula srednje točke na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = hf_{k-1/2} + E_{0,k}(f),$$

a pripadna greška $E_{0,k}(f)$ je sada

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki } \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke onda ima oblik

$$I_n(f) = h(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{n-1/2}) + E_n^M(f).$$

Uz pretpostavku $f \in C^2[a, b]$, greška $E_n^M(f)$ ove produljene formule jednaka je

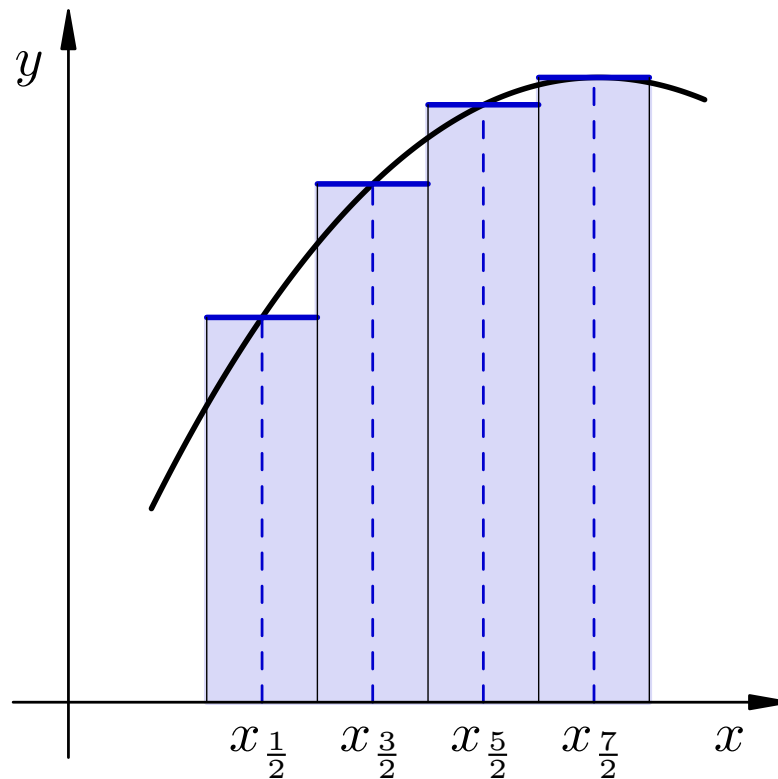
$$\begin{aligned} E_n^M(f) &= \sum_{k=1}^n \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{24} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f''(\zeta_k) \right) \\ &= \frac{h^3 n}{24} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi), \end{aligned}$$

za neki $\xi \in [a, b]$.

Opet, greška je upola manja od $E_n^T(f)$ i suprotnog znaka.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke s $n = 4$ podintervala izgleda ovako:



Produljena trapezna formula za periodičke funkcije

Prednosti produljene trapezne metode

Iako produljena trapezna metoda egzaktno integrira samo polinome stupnja 1 (odnosno, linearne splajnove), ona “puno bolje” integrira trigonometrijske, odnosno, periodičke funkcije.

Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je $[a, b]$ interval $[0, 2\pi]$ i neka je \mathcal{T}_N familija trigonometrijskih funkcija (“polinoma”)

$$\mathcal{T}_N[0, 2\pi] = \left\{ f \mid f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right\}.$$

Tvrdnja. Neka je $E_n^T(f)$ greška produljene trapezne formule s n ekvidistantnih podintervala za funkciju f . Tada vrijedi

$$E_n^T(f) = 0 \quad \text{za svaki } f \in \mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi],$$

tj. imamo egzaktnu integraciju na prostoru $\mathcal{T}_{n-1}[0, 2\pi]$.

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Dokaz. Provjeru je najlakše napraviti korištenjem kompleksne eksponencijalne funkcije

$$e_k(x) := e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Greška **produljene trapezne formule** za funkciju e_k je prava vrijednost integrala **minus** aproksimacija po trapeznoj formuli

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= \int_0^{2\pi} e_k(x) dx - \frac{\pi}{n} \left(e_k(0) + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} e_k\left(\frac{2\pi\ell}{n}\right) + e_k(2\pi) \right) \\ &= (\text{periodičnost}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{i2\pi k\ell/n}. \end{aligned}$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Kad je $k = 0$, onda je

$$E_n^T(e_0) = \int_0^{2\pi} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = x \Big|_0^{2\pi} - \frac{2\pi}{n} \cdot n = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Kad je $k > 0$, imamo

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx - \frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{i2\pi k\ell/n} \\ &= \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} \Big|_0^{2\pi} = 0 \right\} = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(e^{i2\pi k/n} \right)^\ell. \end{aligned}$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Ako $n|k$, tj. ako je $k = 0 \pmod{n}$, onda je $e^{i2\pi k/n} = 1$, pa je

$$E_n^T(e_k) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} 1 = -2\pi.$$

Ako $n \nmid k$, tj. ako je $k \neq 0 \pmod{n}$, onda je $e^{i2\pi k/n} \neq 1$, pa je

$$\begin{aligned} E_n^T(e_k) &= -\frac{2\pi}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} (e^{i2\pi k/n})^\ell = \text{(geometrijska suma)} \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - e^{i2\pi kn/n}}{1 - e^{i2\pi k/n}} = -\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{i2\pi k/n}} = 0. \end{aligned}$$

Greška trapezne metode za trig. funkcije

Zaključujemo da je

$$E_n^T(e_k) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

Uzimanjem **realnog** i **imaginarnog** dijela dobivamo

$$E_n^T(\cos(kx)) = \begin{cases} -2\pi, & \text{za } k > 0 \text{ i } k = 0 \pmod{n}, \\ 0, & \text{za } k = 0 \text{ ili } k > 0 \text{ i } k \neq 0 \pmod{n}, \end{cases}$$

$$E_n^T(\sin(kx)) = 0, \quad \text{za } k \geq 0.$$

Posebno, iz prve relacije odmah **slijedi** da je

$$E_n^T(e_k) = 0 \quad \text{za } k = 0, \dots, n-1. \quad \blacksquare$$

Integral Fourierovog reda

Neka je f periodička funkcija s periodom 2π , koja ima **uniformno konvergentan** Fourierov razvoj (smijemo integrirati član po član!)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

pri čemu su a_k i b_k **Fourierovi koeficijenti** za funkciju f .

Greška aproksimacije za integral funkcije f , korištenjem **produljene trapezne** formule, je

$$E_n^T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k E_n^T(\cos(kx)) + b_k E_n^T(\sin(kx))) = -2\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell \cdot n}.$$

Što je funkcija f **gladja**, to Fourierovi koeficijenti **brže** teže u 0.

Integral Fourierovog reda

Neka je f periodička funkcija s periodom 2π , za koju vrijedi:

- **periodičko** proširenje od f je klase $C^r(\mathbb{R})$,
- $f^{(r+1)}$ ima najviše **konačno** prekida na intervalu perioda.

Onda za koeficijente **Fourierovog** reda od f vrijedi ocjena

$$a_k = O(k^{-(r+2)}), \quad b_k = O(k^{-(r+2)}), \quad \text{za } k \rightarrow \infty.$$

Za **uniformnu** konvergenciju Fourierovog reda, **mora** biti $r \geq 0$.

To znači da je greška $E_n^T(f)$ **približno jednaka prvom** članu sume, za $\ell = 1$,

$$E_n^T(f) \approx -2\pi a_n,$$

odakle slijedi

$$E_n^T(f) = O(n^{-(r+2)}), \quad \text{za } n \rightarrow \infty.$$

Integral Fourierovog reda

Općenito je $h = (b - a)/n$, a ovdje je $h = 2\pi/n$, pa ovu ocjenu možemo napisati u terminima koraka integracije h

$$E_n^T(f) = O(h^{r+2}), \quad \text{za } h \rightarrow 0.$$

Ako je $r > 0$, onda je ova asimptotska ocjena za **periodičke** funkcije, bitno **bolja** od “standardne” relacije

$$E_n^T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) = O(h^2), \quad \text{za } h \rightarrow 0,$$

koja vrijedi za “obične” **neperiodičke** funkcije f . Drugi zapis zadnje relacije je $E_n^T(f) = O(n^{-2})$, za $n \rightarrow \infty$.

Posebno, ako je $r = \infty$, onda **produljena trapezna** formula za **periodičke** funkcije konvergira **brže** od bilo koje potencije od h .

Još jedno dobro svojstvo produljene trapezne f .

Slično vrijedi i na cijelom skupu \mathbb{R} , uz “periodičnost” u $\pm\infty$.

Neka je f definirana na \mathbb{R} i za neki $r \geq 1$ ima sljedeća svojstva:

$$f \in C^{2r+1}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2r+1)}(x)| dx < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(2\rho-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(2\rho-1)}(x) = 0, \quad \rho = 1, \dots, r.$$

Za bilo koji korak integracije $h > 0$, može se pokazati da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) + E^T(f; h),$$

pri čemu greška zadovoljava $E^T(f; h) = O(h^{2r+1})$, kad $h \rightarrow 0$.

Brza konvergencija produljene trapezne formule

Primjer. Korištenjem produljene trapezne formule izračunajte

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

za razne vrijednosti h .

Funkcija e^{-x^2} zadovoljava sva svojstva s prethodne stranice, i to za svaki $r \in \mathbb{N}$. Onda možemo upotrijebiti formulu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh),$$

s tim da za grešku vrijedi $E^T(f; h) = O(h^{2r+1})$, kad $h \rightarrow 0$.

Primjenom za $r = 1, 2, 3, \dots$, vidimo da greška teži u nulu brže od bilo koje potencije od h .

Brza konvergencija produljene trapezne formule

Prethodnu formulu **koristimo** tako da u sumi, umjesto ∞ , uzmemo **dovoljno veliki** prirodni broj M ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-M}^M f(kh).$$

Budući da e^{-x^2} **brzo trne** za $x \rightarrow \infty$, odredimo M tako da je $Mh = 10$, što odgovara granicama integracije od -10 do 10 .

Prava vrijednost integrala je 1 , a za razne h dobivamo

h	n	Aproksimacija $I_n(f)$	Greška $I(f) - I_n(f)$
1	20	1.000103446372407640	-0.000103446372407639
0.5	40	1.00000000000000000010	-0.00000000000000000015
0.25	80	1.00000000000000000000	-0.00000000000000000000

Integracija singularne funkcije

Pretpostavimo da integriramo funkciju f na **konačnoj** domeni, s tim da f **može** imati **singularitet** u **jednoj** ili **obje** granice.

Ideja. Napraviti takvu transformaciju (supstituciju) da

- **granice** integracije postanu $\pm\infty$, a
- dobivena funkcija zadovoljava “**lijepa svojstva**” za **brzu** integraciju **produljenom** trapeznom formulom.

Treba izračunati “**singularni**” integral

$$I := \int_a^b f(x) dx,$$

u kojem su **obje** granice a i b **konačne**.

Integracija singularne funkcije — transformacija

Konstruiramo **preslikavanje**

$$z = z(x) \quad \text{ili, ekvivalentno,} \quad x = x(z),$$

takvo da je

$$z(a) = -\infty, \quad z(b) = \infty.$$

Tada se **zamijeni** varijabla $x = x(z)$ u integralu I , pa imamo

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x(z)) \left(\frac{dx}{dz} \right) dz.$$

Točnost numeričke integracije ovisi o izabranoj **transformaciji**.

Cilj transformacije = što jače “**prigušiti**” **novu** podintegralnu funkciju u $\pm\infty$, **zajedno** sa singularitetom iz f .

Integracija — eksponencijalne transformacije

Primjeri takvih transformacija:

- eksponencijalna transformacija

$$x = \frac{1}{2}(a + b + (b - a) \operatorname{th}(z)),$$

pri čemu je

$$\frac{dx}{dz} = \frac{b - a}{2 \operatorname{ch}^2(z)},$$

- dvostruka eksponencijalna transformacija (jako dobra)

$$x = \frac{1}{2} \left[a + b + (b - a) \operatorname{th} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z) \right) \right],$$

pri čemu je

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\pi(b - a) \operatorname{ch}(z)}{4 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(z) \right)}.$$

Primjer — duljina luka parabole

Primjer. Izračunajmo **duljinu luka** parabole $y = 2\sqrt{x}$ nad intervalom $[0, 2]$.

Opća formula za **duljinu luka** krivulje $y = g(x)$ nad intervalom $[a, b]$ je

$$\ell := \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

Za $g(x) = 2\sqrt{x}$, derivacija je $g'(x) = 1/\sqrt{x}$, pa treba izračunati integral

$$I := \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx.$$

Uočite da podintegralna funkcija $f(x) = \sqrt{1 + 1/x}$ ima **singularitet** u 0, ali je **integrabilna**.

Eksponencijalna transformacija na $[-64, 64]$

Aproksimacije računamo produljenom trapeznom formulom s korakom $h_m = 128/2^m$. Crvene znamenke su pogrešne.

m	Aproksimacija $I_{E,m}(f)$
0	5.80641564901262124E-0026
1	9.05096679918780831E+0001
2	4.52548339959401878E+0001
3	2.26274220907317372E+0001
4	1.13213061090209500E+0001
5	5.87447526582032100E+0000
6	3.88345935688302037E+0000
7	3.59974858254657929E+0000
8	3.59570600053947672E+0000
9	3.59570557756376920E+0000
10	3.59570557756376694E+0000
11	3.59570557756376694E+0000

Dvostruka eksponencijalna transf. na $[-8, 8]$

Aproksimacije računamo produljenom trapeznom formulom s korakom $h_m = 16/2^m$. Crvene znamenke su pogrešne.

m	Aproksimacija $I_{DE,m}(f)$
0	1.73012649532660890E-1012
1	1.77715317526334650E+0001
2	8.88576587631673261E+0000
3	4.55571940599190836E+0000
4	3.62887375546996532E+0000
5	3.59570963124237984E+0000
6	3.59570557756275617E+0000
7	3.59570557756376694E+0000
8	3.59570557756376694E+0000

Prva aproksimacija je “kontrola odbacivanja” pri prijelazu s $(-\infty, +\infty)$ na $[-8, 8]$, jer ima samo vrijednosti u rubovima.