Numerička matematika
9. predavanje

Saša Singer

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Ortogonalni polinomi:
  - Svojstva ortogonalnih polinoma.
    - Tročlana homogena rekurzija.
    - Nultočke ortogonalnih polinoma.
    - Christoffel–Darbouxov identitet.
  - Klasični ortogonalni polinomi.
- Računanje vrijednosti funkcija:
  - Polinomi i Hornerova shema.
  - Specijalne funkcije i generalizirana Hornerova shema.
  - Primjeri.
    - Razvoj po T_n i skoro minimaks aproksimacije.
    - Fourierov red.

Ortogonalni polinomi i njihova svojstva

Uvod = dobra svojstva polinoma

Uvod i motivacija. Polinomi imaju niz "dobrih" matematičkih svojstava. Algebarski gledano,

- polinomi stupnja $\leq n$ tvore vektorski prostor.

Ali, to nije sve. Kad "otpustimo" ograničenje na stupanj n,

- polinome možemo množiti, čak i uvrštavati jednog u drugog, a da opet dobijemo polinom.

Označimo s $\mathcal{P}$ skup svih polinoma, bilo kojeg stupnja, s koeficijentima iz nekog polja ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$),

$$\mathcal{P} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n.$$

Onda je $\mathcal{P}$ algebra i još je zatvoren na supstitucije.

Dobra svojstva polinoma, baza potencija

Iz perspektive analize ili numerike, polinomi imaju dobra svojstva aproksimacije. Poput ovog:

- Neprekidna funkcija na segmentu može se po volji dobro uniformno aproksimirati polinomom.

Na kraju, algoritamski gledano, za računanje s polinomima

- postoje brzi algoritmi, poput Hornerove sheme.

Uobičajeno, polinom $p \in \mathcal{P}$ zapisujemo u standardnoj bazi potencija $\{x^n \mid n \geq 0\}$,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Problem: Već smo vidjeli da je baza potencija često vrlo loše uvjetovana (na pr., najmanji kvadrati i Hilbertova matrica).

Posebna baza = familija ortogonalnih polinoma

Ako na prostoru $\mathcal{P}$ imamo definiran neki skalarni produkt, onda je puno bolje uzeti

- bazu koja je ortogonalna obzirom na taj skalarni produkt.

Takvih baza ili ortogonalnih sustava polinoma ima puno.

U nastavku gledamo posebne ortogonalne sustave polinoma, oblika

$$\{\, p_0,\, p_1,\, \ldots,\, p_n,\, \ldots \ \text{(dok ide)} \,\},$$

u kojima je stupanj polinoma p_n baš jednak n, za svaki $n \geq 0$. Takav ortogonalni sustav zovemo

- familija (ili sustav) ortogonalnih polinoma, obzirom na zadani skalarni produkt.

“Duljina” familije ovisi o vrsti skalarnog produkta.

Konstrukcija familije ortogonalnih polinoma

Neka je $\langle\ ,\ \rangle$ zadani skalarni produkt na prostoru polinoma $\mathcal{P}$. Pripadnu familiju ortogonalnih polinoma dobivamo

- Gram–Schmidtovim postupkom ortogonalizacije,
- na standardnoj bazi potencija $\{x^n \mid n \geq 0\}$,

i to u rastućem poretku po n (tj. poredak potencija je bitan).

Prvi ortogonalni polinom je $p_0(x) = 1$. Općenito, u n-tom koraku ovog postupka dobivamo polinom p_n, za kojeg vrijedi

$$\langle p_n, p_m \rangle = 0, \quad \text{za } m = 0, \ldots, n-1,$$

a skupovi $\{1, x, \ldots, x^n\}$ i $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ razapinju isti prostor,

$$\mathcal{L}(1, x, \ldots, x^n) = \mathcal{L}(p_0, p_1, \ldots, p_n) = \mathcal{P}_n.$$

Dokle ide konstrukcija?

Odavde vidimo da je $p_n \in \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}$, pa je

- stupanj dobivenog polinoma p_n zaista jednak n.

Pitanje: Uz koje uvjete je p_n "novi član" familije?

Bitno: Dobiveni polinom p_n smijemo dodati u raniju familiju ortogonalnih polinoma $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$, ako i samo ako je

$$\gamma_n := \|p_n\|_2^2 = \langle p_n, p_n \rangle > 0.$$

Inače nemamo ortogonalni sustav funkcija! Dakle, prostor $\mathcal{P}_n$ mora biti unitaran obzirom na zadani skalarni produkt.

Osim toga, postupak ortogonalizacije možemo nastaviti ako i samo ako je $\gamma_n > 0$. Naime, γ_n ide u nazivnik koeficijenata u sljedećem koraku postupka.

Diskretni ortogonalni polinomi

Ako dobijemo $\|p_n\|_2 = 0$, konstrukcija staje na prostoru $\mathcal{P}_{n-1}$.

Primjer. Za diskretni skalarni produkt oblika

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i \, u(x_i) v(x_i), \qquad w_1, \ldots, w_n > 0,$$

pripadna familija diskretnih ortogonalnih polinoma je

$$\{\, p_0,\, p_1,\, \ldots,\, p_{n-1} \,\}.$$

Sljedeći ortogonalni polinom je polinom čvorova $p_n = \omega$, ali je $\|\omega\|_2 = 0$, pa ga ne smijemo dodati u familiju. ■

Ovakva “diskretna ortogonalnost” u nultočkama “sljedećeg” ortogonalnog polinoma pojavit će se nekoliko puta u nastavku.

Familija ortogonalnih polinoma s težinom w

Neka je $\langle\ ,\ \rangle$ integralni skalarni produkt s težinskom funkcijom w na intervalu $[a, b]$, takav da je

- $\mathcal{P}$ unitarni prostor obzirom na taj skalarni produkt.

Onda za svaki polinom $p \neq 0$ vrijedi

$$\|p\|_2^2 = \int_a^b w(x)\, p^2(x)\, dx > 0.$$

U Gram–Schmidtovom postupku, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, dobivamo da je $\gamma_n > 0$. Dakle, "duljina" familije nije ograničena.

Dobivenu familiju ortogonalnih polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$ zovemo

- familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w.

Jedinstvenost familije ortogonalnih polinoma

Iz Gram–Schmidtovog postupka je očito da skalarni produkt

- jednoznačno određuje familiju ortogonalnih polinoma obzirom na taj skalarni produkt,
- do na konstantni faktor u svakom od polinoma p_n.

Naime, u postupku ortogonalizacije,

- dobivene ortogonalne polinome p_n ne treba normirati.

Čim dobijemo da je $\|p_n\|_2 > 0$, umjesto tog p_n, možemo uzeti i bilo koji drugi polinom $c_n p_n$, za neku konstantu $c_n \neq 0$.

Dakle, norme ili kvadrate normi γ_n, možemo birati po volji.

- Izbor tog konstantnog faktora c_n zove se standardizacija ili normalizacija pripadne familije ortogonalnih polinoma.

Osnovna svojstva ortogonalnih polinoma

Familija ortogonalnih polinoma obzirom na zadani skalarni produkt je (posebni) ortogonalni sustav funkcija, pa je onda i

- linearno nezavisna (v. prošli puta).

Isti zaključak slijedi i iz Gram–Schmidtovog postupka. Početni komad te familije je skup $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$,

- koji razapinje prostor polinoma $\mathcal{P}_m$ dimenzije $m + 1$,
- pa mora biti i linearno nezavisan, jer ima $m + 1$ funkcija.

Dakle, $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ ortogonalna baza u prostoru $\mathcal{P}_m$. ■

U nastavku dokazujemo još neka bitna svojstva ortogonalnih polinoma. Zbog veze s integracijskim formulama,

- tvrdnje iskazujemo za integralni skalarni produkt.

Težinske funkcije za ortogonalne polinome

Za integralni skalarni produkt uzimamo iste pretpostavke kao kod najmanjih kvadrata — za težinsku funkciju w vrijedi

- $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, s tim da w smije imati samo izolirane nultočke na $[a, b]$.

Zato što radimo s polinomima, treba dodati pretpostavku:

- svi polinomi su kvadratno integrabilni obzirom na w.

Dakle, dodatno pretpostavljamo da, za svaki polinom $p \neq 0$, sljedeći integral postoji, konačan je i pozitivan, tj. vrijedi

$$\|p\|_2^2 = \int_a^b w(x)\, p^2(x)\, dx > 0.$$

Razvoj polinoma po ortogonalnim polinomima

Teorem. Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a,b]$ s težinskom funkcijom w. Ako je f polinom stupnja m, tada vrijedi

$$f = \sum_{i=0}^{m} \frac{\langle f, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} \, p_i.$$

Dokaz. Početni komad familije $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ je ortogonalna baza prostora $\mathcal{P}_m$. Zbog $f \in \mathcal{P}_m$, slijedi da je f neka linearna kombinacija tih funkcija

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i p_i.$$

Formula za koeficijente a_i izlazi skalarnim množenjem s p_i, zbog ortogonalnosti polinoma $p_0, p_1, \ldots, p_m$. ∎

Ortogonalnost na polinome nižeg stupnja

Jednostavna posljedica prethodne tvrdnje je sljedeći rezultat, kojeg ćemo koristiti u nastavku.

Korolar. Neka je p_n ortogonalni polinom stupnja n, za $n \geq 0$, i neka je f bilo koji polinom stupnja strogo manjeg od n, tj. $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Onda je

$$\langle p_n, f \rangle = 0.$$

Drugim riječima,

- p_n je ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja od n.

Dokaz. Stavimo $m = n - 1$, pa tvrdnja ide direktno iz prikaza u prošlom teoremu i ortogonalnosti $\langle p_n, p_i \rangle = 0$, za $i = 0, \ldots, n-1$. ∎

Korist: Za nalaženje p_n “na ruke” — izaberemo bazu u $\mathcal{P}_{n-1}$.

Nultočke ortogonalnih polinoma

Teorem. Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w. Tada svaki polinom p_n ima točno n različitih (jednostrukih) realnih nultočaka na otvorenom intervalu (a, b).

Dokaz. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sve međusobno različite nultočke polinoma p_n, za koje vrijedi:

- $a < x_i < b$,
- $p_n(x)$ mijenja predznak u x_i.

Budući da je p_n stupnja n,

- po osnovnom teoremu algebre, p_n ima točno n nultočaka,
- a onih koje zadovoljavaju prethodna dva svojstva ima manje ili jednako n, tj. znamo da je $m \leq n$.

Nultočke ortogonalnih polinoma

Polinom p_n onda možemo prikazati u obliku produkta

$$p_n(x) = h(x)\,(x - x_1)^{r_1} \cdots (x - x_m)^{r_m},$$

pri čemu

- svi eksponenti r_i moraju biti neparni, a
- polinom $h(x)$ ne smije promijeniti predznak na (a, b).

Pretpostavimo da nultočaka koje zadovoljavaju tražena dva svojstva ima striktno manje od n, tj. $m < n$.

Pokažimo da je to nemoguće. Definiramo polinom

$$B(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m).$$

Nultočke ortogonalnih polinoma

Množenjem s $p_n(x)$, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x)B(x) &= p_n(x)\,(x - x_1)\cdots(x - x_m) \\ &= h(x)\,(x - x_1)^{r_1+1}\cdots(x - x_m)^{r_m+1}. \end{aligned}$$

Po definiciji točaka $x_1, \ldots, x_m$, ovaj polinom ne mijenja znak prolaskom kroz točke $x_1, \ldots, x_m$ (eksponenti $r_i + 1$ su parni).

Osim toga, $h(x)$ ne mijenja znak na (a, b), tj.

- čitav polinom $p_n(x)B(x)$ ne mijenja znak na (a, b).

Zato vrijedi

$$\int\limits_a^b w(x)\,p_n(x)B(x)\,dx \neq 0,$$

jer je to integral funkcije fiksnog predznaka (plus ili minus).

Nultočke ortogonalnih polinoma

S druge strane, prethodni integral je skalarni produkt polinoma p_n (stupnja n) i polinoma B (stupnja $m < n$).

- Svaki ortogonalni polinom p_n je okomit na sve polinome nižeg stupnja (v. korolar), pa je

$$\int_a^b w(x)\, p_n(x) B(x)\, dx = \langle p_n, B \rangle = 0,$$

što je kontradikcija.

Zaključak. Pretpostavka o stupnju polinoma B je bila pogrešna, tj. mora biti $m = n$.

Dakle, p_n ima točno n nultočaka $x_1, \ldots, x_n$ u kojima mijenja predznak, pa one moraju biti jednostruke, jer je $p_n'(x_i) \neq 0$. ■

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zadana je familija ortogonalnih polinoma $\{p_n \mid n \geq 0\}$ na intervalu $[a, b]$ i neka su A_n i B_n vodeća dva koeficijenta polinoma p_n, tj.

$$p_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots,$$

s tim da je $A_n \neq 0$ (uz $B_0 = 0$). Tada p_n možemo napisati kao

$$p_n(x) = A_n (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \cdots (x - x_{n,n}).$$

Definiramo još i

$$a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \qquad \gamma_n = \|p_n\|^2 = \langle p_n, p_n \rangle > 0.$$

Uočite: a_n je omjer vodećih koeficijenata susjednih polinoma.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Teorem. Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w.
Za svaki $n \geq 1$ vrijedi tročlana homogena rekurzija

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + b_n) p_n(x) - c_n p_{n-1}(x),$$

pri čemu su koeficijenti u rekurziji dani formulama

$$b_n = a_n \left(\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n} \right) = -\frac{a_n}{\gamma_n} \, \langle x p_n, p_n \rangle,$$

$$c_n = \frac{A_{n+1} A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} = \frac{a_n \gamma_n}{a_{n-1} \gamma_{n-1}}.$$

Za polinome p_n s vodećim koeficijentom $A_n = 1$, ove formule su još jednostavnije, jer je $a_n = 1$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Dokaz. Definiramo polinom G na sljedeći način — tako da poništimo vodeći koeficijent u p_{n+1}, tj. dobijemo $\deg G \leq n$.

$$
\begin{aligned}
G(x) = p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x) \\
&= \left(A_{n+1} x^{n+1} + B_{n+1} x^n + \cdots\right) \\
&\qquad - \frac{A_{n+1}}{A_n}\, x \left(A_n x^n + B_n x^{n-1} + \cdots\right) \\
&= \left(B_{n+1} - \frac{A_{n+1} B_n}{A_n}\right) x^n + \cdots .
\end{aligned}
$$

Dakle, G je zaista stupnja manjeg ili jednakog n.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Polinom G onda možemo napisati kao linearnu kombinaciju ortogonalnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog n,

$$G(x) = d_n p_n(x) + \cdots + d_0 p_0(x).$$

Računanjem koeficijenata d_i (v. prvi teorem o prikazu) izlazi

$$d_i = \frac{\langle G, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} = \frac{1}{\gamma_i} \big(\langle p_{n+1}, p_i \rangle - a_n \langle x p_n, p_i \rangle \big), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Treba još izračunati oba skalarna produkta na desnoj strani.

Za prvi produkt, iz ortogonalnosti odmah dobivamo

$$\langle p_{n+1}, p_i \rangle = 0, \quad i \leq n,$$

tj. tog člana nema u relaciji za koeficijente d_i, $i = 0, \ldots, n$.

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Za drugi produkt $\langle xp_n, p_i \rangle$ dobivamo

$$\langle xp_n, p_i \rangle = \int\limits_a^b w(x)\, p_n(x) x p_i(x)\, dx = \langle p_n, xp_i \rangle.$$

Polinom $xp_i(x)$ je stupnja $i+1$. Nadalje, polinom p_n je ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja.

Dakle, za sve $i \leq n-2$, stupanj polinoma $xp_i(x)$ je manji ili jednak $n-1$, pa je

$$\langle xp_n, p_i \rangle = \langle p_n, xp_i \rangle = 0, \quad i \leq n-2.$$

Kombiniranjem ta dva rezultata, dobivamo

$$d_i = 0, \quad \text{za} \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Tročlana rekurzija za ortogonalne polinome

Zbog toga je

$$G(x) = d_n p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Kad uvrstimo $G(x) = p_{n+1}(x) - a_n x p_n(x)$ i sredimo, izlazi

$$p_{n+1}(x) = (a_n x + d_n) p_n(x) + d_{n-1} p_{n-1}(x).$$

Dakle, vrijedi tročlana rekurzija, s $b_n = d_n$ i $c_n = -d_{n-1}$.

Iz prve relacije, uspoređivanjem vodećih koeficijenata funkcije G i funkcije s desne strane, slijedi prva formula za $b_n = d_n$.

Iz opće relacije za d_i, za koeficijente d_{n-1} i d_n dobivamo

$$d_i = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle x p_n, p_i \rangle = -\frac{a_n}{\gamma_i} \langle p_n, x p_i \rangle, \quad i = n-1, n.$$

Odavde izlaze i preostale dvije formule. ∎

Christoffel–Darbouxov identitet

Mnoge korisne relacije za ortogonalne polinome izvode se korištenjem sljedećeg teorema.

Teorem. (Christoffel–Darbouxov identitet.) Neka je $x \neq y$ i neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom w. Za njih vrijedi

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x)p_j(y)}{\gamma_j} = \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}(x-y)}, \quad n \geq 1.$$

Dokaz. Manipulacijom tročlane rekurzije (nije za slajdove). ■

Ako su x i y dvije različite nultočke polinoma p_n (ili p_{n-1}), desna strana je nula. Iz lijeve strane dobivamo tzv.

- diskretnu ortogonalnost ortogonalnih polinoma!

Christoffel–Darbouxov identitet u jednoj točki

Prijelazom na limes $y \to x$, dobivamo Christoffel–Darbouxov identitet u jednoj točki x

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\big(p_j(x)\big)^2}{\gamma_j} = \frac{p_n'(x)p_{n-1}(x) - p_{n-1}'(x)p_n(x)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}}.$$

Uz oznaku za vektor vrijednosti normaliziranih polinoma u točki x

$$\widetilde{z}(x) = \left[\frac{p_0(x)}{\|p_0\|}, \ldots, \frac{p_{n-1}(x)}{\|p_{n-1}\|} \right]^T \in \mathbb{R}^n,$$

lijeva strana je jednaka $\|\widetilde{z}(x)\|_2^2$.

Posebno, ako je x nultočka polinoma p_n (ili p_{n-1}), na desnoj strani ostaje samo jedan član!

To ćemo iskoristiti kod Gaussovih integracijskih formula.

Matrica Z_n — pridružena polinomu p_n

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ sve nultočke polinoma p_n. Pogledajmo matricu Z_n, reda n, zadanu stupcima $\widetilde{z}(x_1), \ldots, \widetilde{z}(x_n)$,

$$Z_n := \begin{bmatrix} \dfrac{p_0(x_1)}{\|p_0\|} & \dfrac{p_0(x_2)}{\|p_0\|} & \cdots & \dfrac{p_0(x_n)}{\|p_0\|} \\[2ex] \dfrac{p_1(x_1)}{\|p_1\|} & \dfrac{p_1(x_2)}{\|p_1\|} & \cdots & \dfrac{p_1(x_n)}{\|p_1\|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{p_{n-1}(x_1)}{\|p_{n-1}\|} & \dfrac{p_{n-1}(x_2)}{\|p_{n-1}\|} & \cdots & \dfrac{p_{n-1}(x_n)}{\|p_{n-1}\|} \end{bmatrix}.$$

Zaključci:

- Stupci $\widetilde{z}(x_k)$ matrice Z_n su međusobno ortogonalni i imamo izraz za Euklidske norme $\|\widetilde{z}(x_k)\|_2$ tih stupaca.

Ortogonalna matrica V_n i diskretna ortog.

Zatim, normiramo stupce matrice Z_n, tj. definiramo vektore

$$v_k := \frac{\widetilde{z}(x_k)}{\|\widetilde{z}(x_k)\|_2}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Neka je $V_n := [\, v_1 \ \ldots \ v_n \,]$ matrica generirana ovim stupcima, ili

$$V_n := Z_n \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\|\widetilde{z}(x_1)\|_2}, \ldots, \frac{1}{\|\widetilde{z}(x_n)\|_2} \right).$$

Stupci matrice V_n su ortonormirani, tj. vrijedi $V_n^* V_n = I_n$, što znači da je V_n ortogonalna matrica.

No, onda V_n mora imati i ortonormirane retke, tj. $V_n V_n^* = I_n$.

- To su relacije tzv. diskretne ortogonalnosti ortogonalnih polinoma $p_0, \ldots, p_{n-1}$ u nultočkama polinoma p_n.

Klasični ortogonalni polinomi

Klasični ortogonalni polinomi — uvod

U praksi često susrećemo pet tipova "klasičnih" ortogonalnih polinoma. Oni su ortogonalni obzirom na

- integralne skalarne produkte s pripadnom težinom w, na odgovarajućem intervalu $[a, b]$.

Kao zajednička svojstva ortogonalnih polinoma navodimo:

- odgovarajuću relaciju ortogonalnosti i standardnu normalizaciju (izbor γ_n),
- pripadnu tročlanu homogenu rekurziju,
- a svojstvo da se nultočke ortogonalnih polinoma uvijek nalaze unutar intervala $[a, b]$, ilustrirano je slikama.

Dodatak: "Klasični" ortogonalni polinomi zadovoljavaju još i posebnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda, koju navodimo.

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Čebiševljevi polinomi prve vrste

- označavaju se s T_n,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Za njih postoji i eksplicitna formula

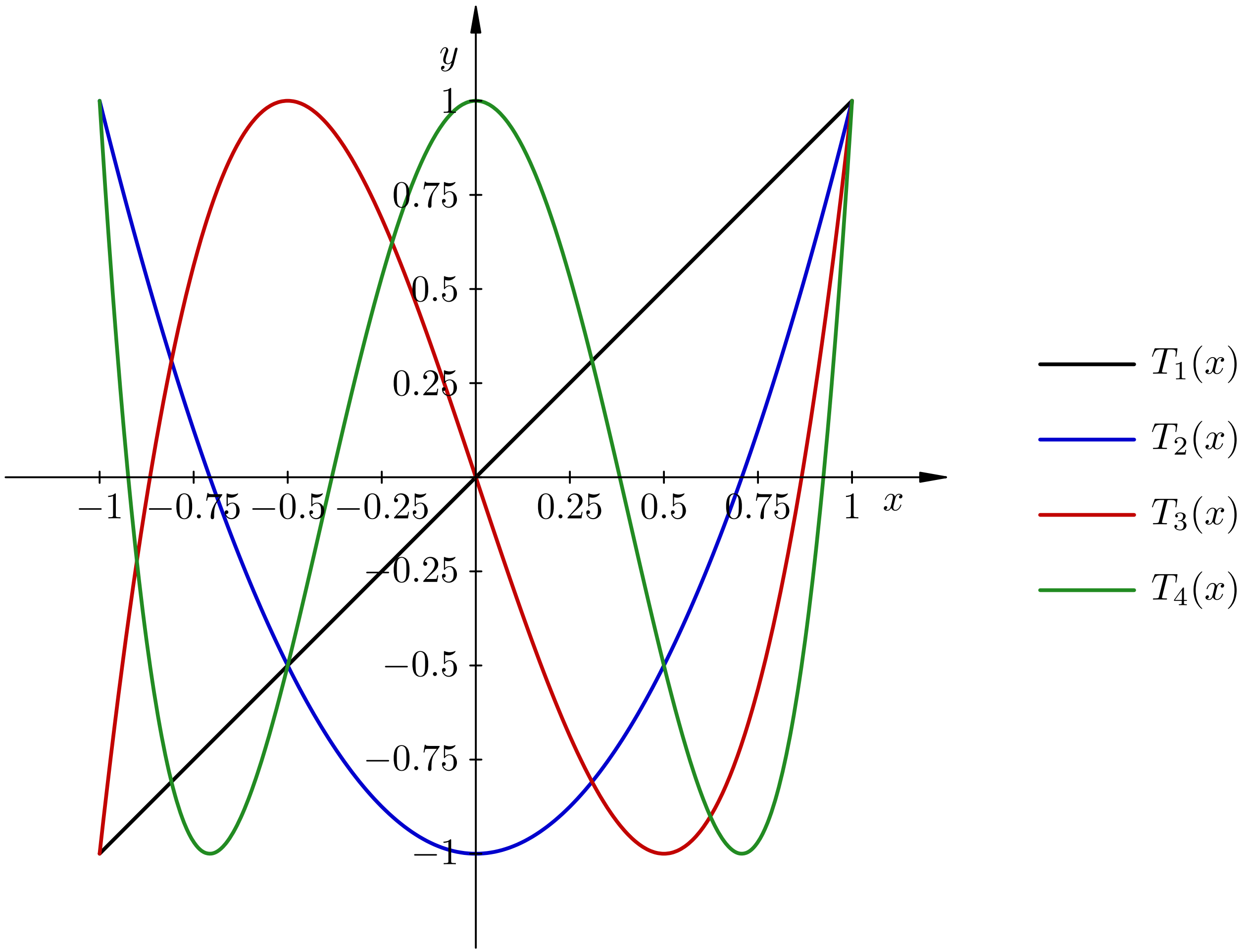
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Čebiševljev polinom prve vrste T_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste

Graf prvih par polinoma izgleda ovako



Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0,1]$

Katkad se koriste i Čebiševljevi polinomi prve vrste

- transformirani na interval $[0,1]$,
- u oznaci T_n^*.

Dobivaju se iz T_n, linearnom (točnije, afinom) transformacijom

$$[0,1] \ni x \mapsto \xi := 2x - 1 \in [-1,1].$$

Relacija ortogonalnosti postaje

$$\int_0^1 \frac{T_m^*(x)\, T_n^*(x)}{\sqrt{x - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n = 0, \\ \pi/2, & \text{za } m = n \neq 0. \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste na $[0, 1]$

Rekurzivna relacija je

$$T^*_{n+1}(x) - 2(2x - 1)T^*_n(x) + T^*_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

$$T^*_0(x) = 1, \quad T^*_1(x) = 2x - 1.$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Čebiševljevi polinomi druge vrste

- označavaju se s U_n,
- ortogonalni su na intervalu $[-1, 1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, U_m(x)\, U_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi/2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Zadovoljavaju istu rekurziju kao i polinomi prve vrste

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,$$

uz malo drugačiji start

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

Za njih postoji i eksplicitna formula

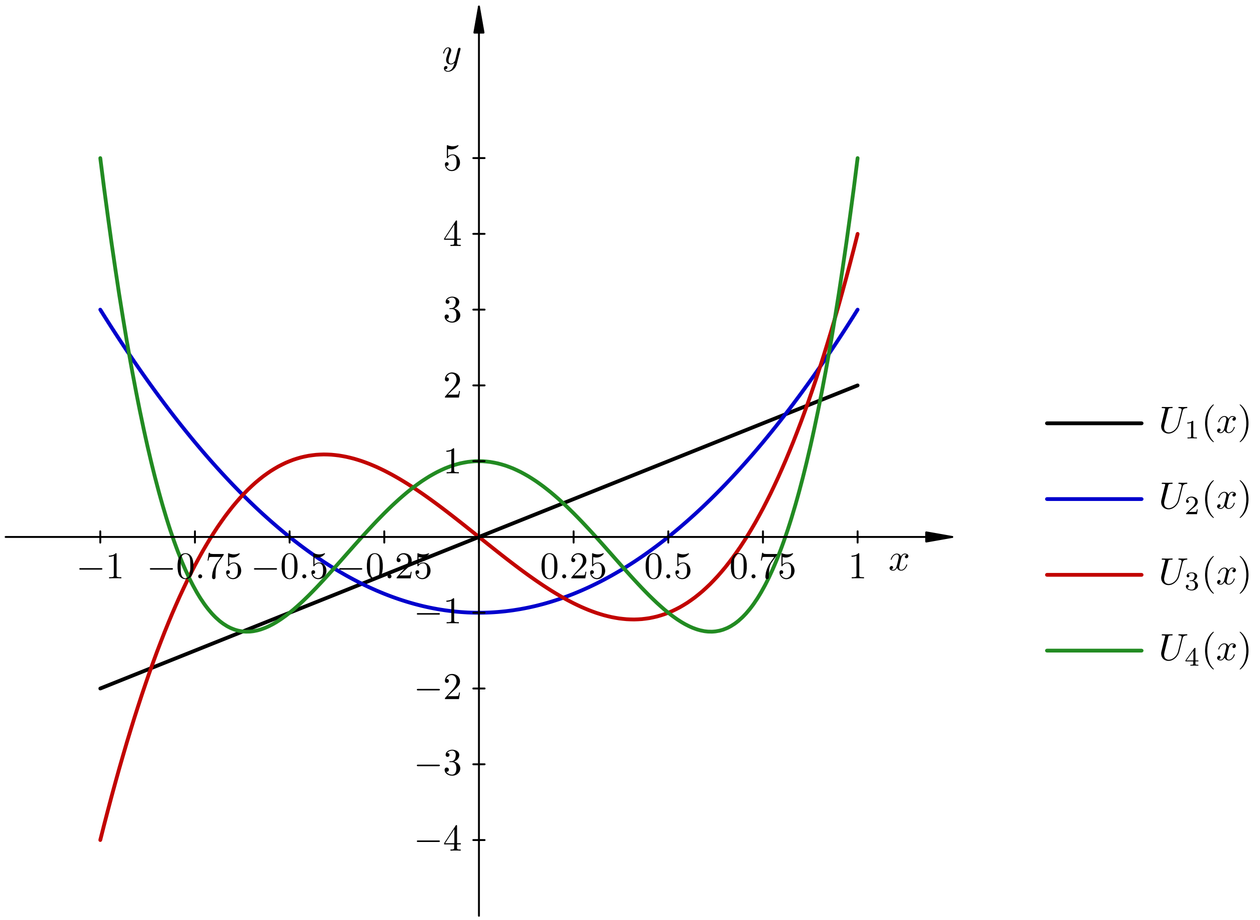
$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad x \in [-1, 1].$$

Čebiševljev polinom druge vrste U_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0.$$

Čebiševljevi polinomi druge vrste

Graf prvih par polinoma izgleda ovako



Legendreovi polinomi

Legendreovi polinomi

- označavaju se s P_n,
- ortogonalni su na intervalu $[-1,1]$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = 1.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2/(2n+1), & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Legendreovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

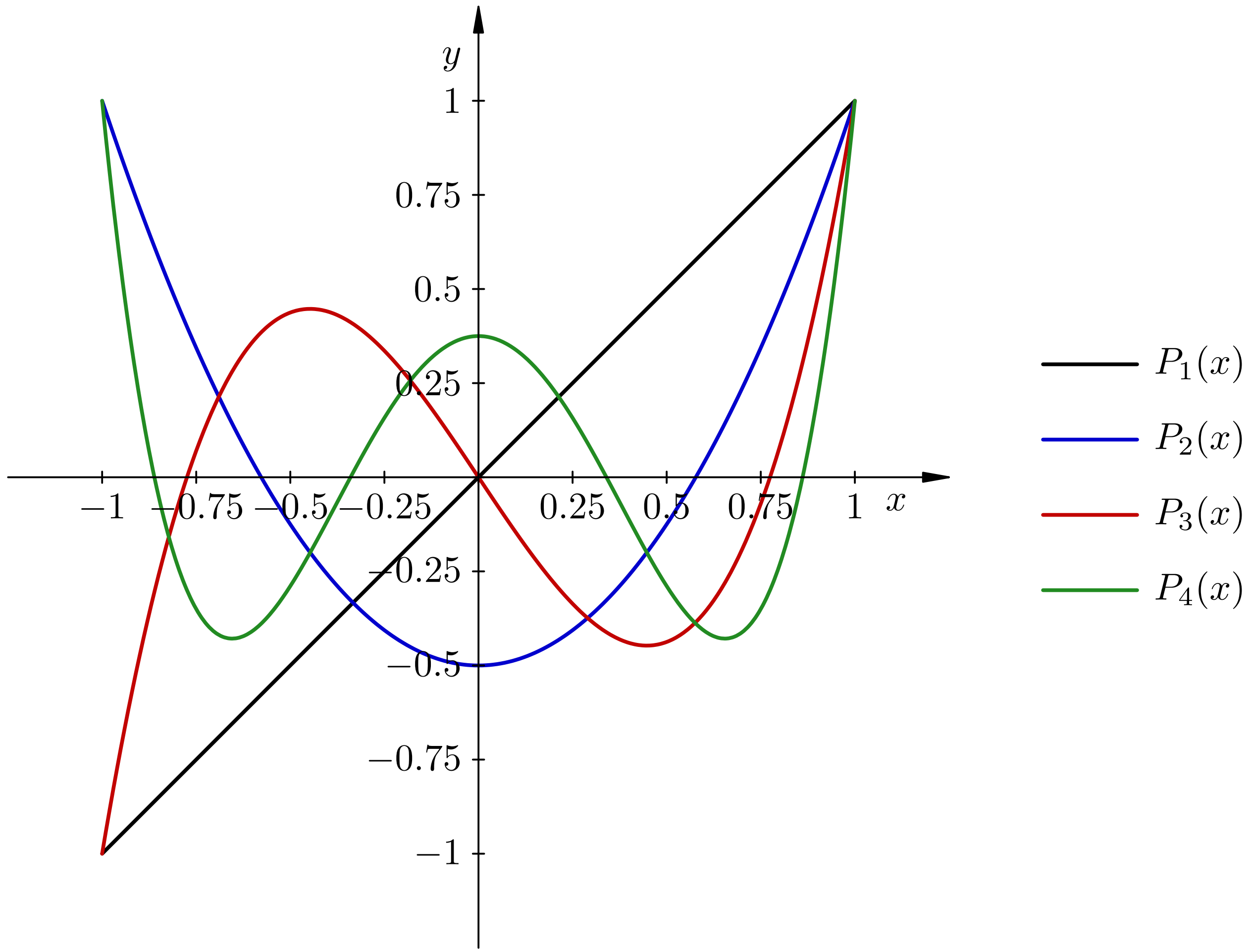
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Legendreov polinom P_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Legendreovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako



Laguerreovi polinomi

Laguerreovi polinomi

- označavaju se s L_n,
- ortogonalni su na intervalu $[0, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_0^\infty e^{-x}\, L_m(x)\, L_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 1, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Laguerreovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

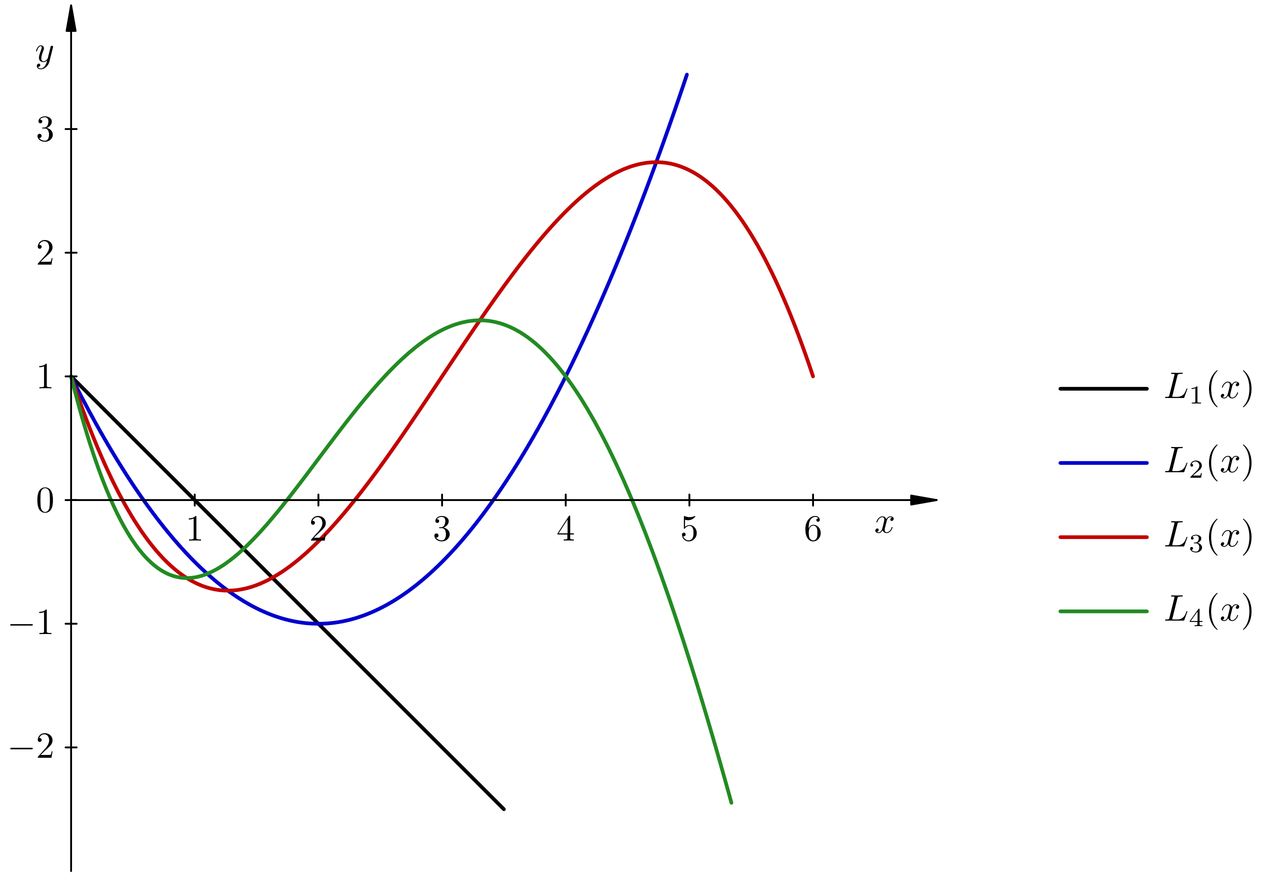
$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x.$$

Laguerreov polinom L_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

Laguerreovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako



Laguerreovi polinomi

Često se nađe još jedna rekurziju za Laguerreove polinome

$$\widetilde{L}_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)\widetilde{L}_n(x) + n^2 \widetilde{L}_{n-1}(x) = 0,$$

uz jednaki start

$$\widetilde{L}_0(x) = 1, \quad \widetilde{L}_1(x) = 1 - x.$$

Uspoređivanjem ove i prethodne rekurzije dobivamo da je

$$\widetilde{L}_n(x) = n!\, L_n(x),$$

tj. radi se samo o drugačijoj normalizaciji

$$\int_0^\infty e^{-x}\, \widetilde{L}_m(x)\, \widetilde{L}_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ (n!)^2, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Hermiteovi polinomi

Hermiteovi polinomi

- označavaju se s H_n,
- ortogonalni su na intervalu $(-\infty, \infty)$
- obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Relacija ortogonalnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, H_m(x)\, H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ 2^n\, n! \sqrt{\pi}, & \text{za } m = n. \end{cases}$$

Hermiteovi polinomi

Oni zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

uz start

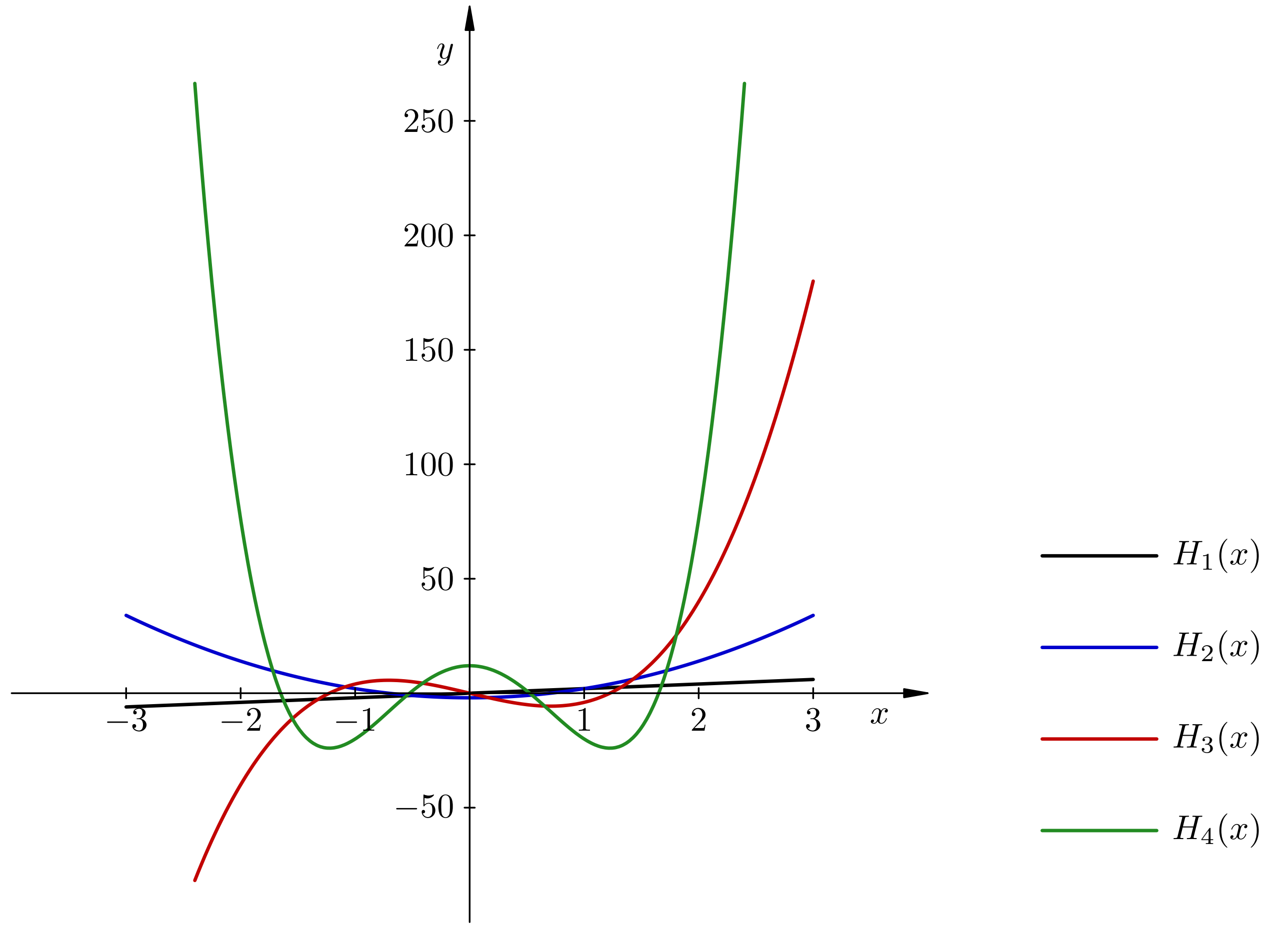
$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Hermiteov polinom H_n zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Hermiteovi polinomi

Graf prvih par polinoma izgleda ovako



Hornerova shema

Hornerova shema i ortogonalni polinomi

Napomena. Pojam “izvrednjavanje” znači

- računanje vrijednosti zadane funkcije u zadanoj točki.

Na kraju Prog1, radi se Hornerova shema za izvrednjavanje polinoma, zapisanog u bazi potencija.

- Postoji vrlo slična shema za izvrednjavanje u bazi ortogonalnih polinoma.

Za početak, ponovimo svojstva Hornerove sheme za polinome.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Zadan je polinom p_n, stupnja n,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_n \neq 0,$$

kojemu treba izračunati vrijednost u zadanoj točki x_0. To se može napraviti na više načina.

- Prvo, napravimo to direktno po zapisu, potencirajući.

Krenemo li od nulte potencije $x^0 = 1$, svaka sljedeća potencija dobiva se rekurzivno (ili iterativno)

$$x^i = x \cdot x^{i-1}.$$

Imamo li zapamćen x^{i-1}, lako je izračunati x^i — korištenjem samo jednog množenja.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Vrijednost polinoma u točki `x_0` s pamćenjem potencija

```
sum = a[0];
pot = 1;
za i = 1 do n radi {
  pot = pot * x_0;
  sum = sum + a[i] * pot;
};
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum.  */
```

U unutarnjoj petlji javljaju se 2 množenja i 1 zbrajanje.
Petlja se izvršava n puta, pa ukupno imamo

$$2n \text{ množenja } + \ n \text{ zbrajanja.}$$

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Izvrednjavanje polinoma u točki može se izvesti i s manje množenja — ako polinom zapišemo u obliku

$$p_n(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

Algoritam koji po prethodnoj relaciji izvrednjava polinom zove se Hornerova shema.

Hornerova shema

```
sum = a[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  sum = sum * x_0 + a[i];
};
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum.  */
```

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Očito je da smo, ovim algoritmom, prepolovili broj množenja, tj. da je njegova složenost

$$n \text{ množenja } + \ n \text{ zbrajanja.}$$

Hornerova shema je optimalan algoritam za izvrednjavanje zadanog polinoma u zadanoj točki.

- Ulaz algoritma su: polinom i točka!

Napomena: za izvrednjavanje fiksnog polinoma u puno točaka

- postoje i brži algoritmi — tzv. prethodna obrada koeficijenata, brza Fourierova transformacija (FFT).

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Za opći polinom (ulaz u Horner) automatski pretpostavljamo da je većina koeficijenata različita od nule.

Ako imamo fiksni polinom s malo koeficijenata različitih od nule — postoje i bolji algoritmi! Na primjer, polinom

$$p_{100}(x) = x^{100} + 1$$

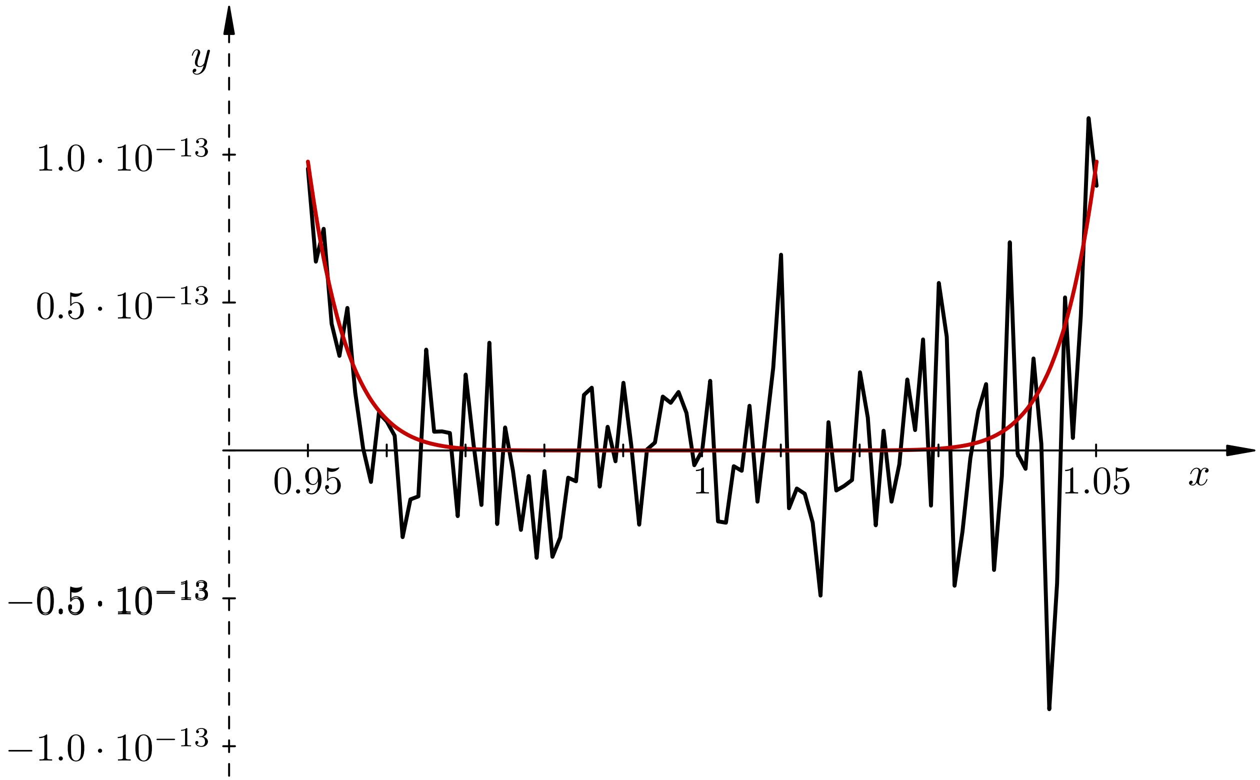
nema smisla izvrednjavati Hornerovom shemom, jer predugo traje. Binarno potenciranje je brže. Sastavite takav algoritam.

Dodatna prednost Hornerove sheme:

- Hornerova shema može biti stabilnija od direktnog potenciranja, zbog redova veličine članova u sumi.

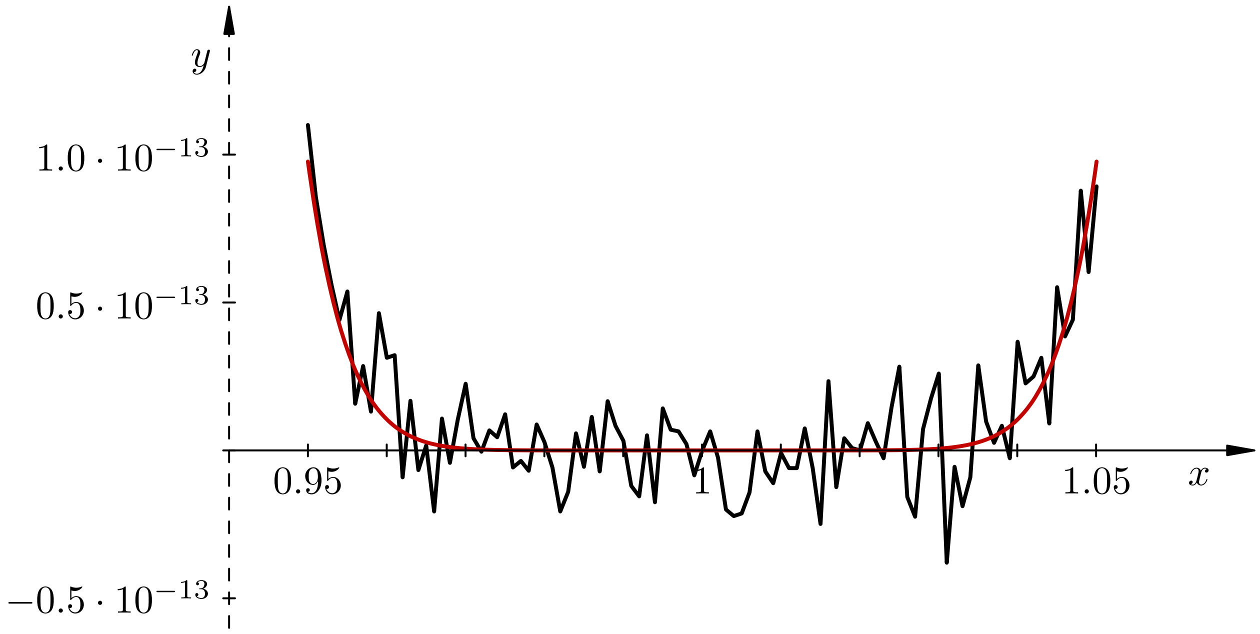
Ilustracija je na sljedeće dvije stranice.

Stabilnost direktnog potenciranja



Izvrednjavanje $(x-1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x: direktnim potenciranjem (dvostruka točnost).

Stabilnost Hornerove sheme



Izvrednjavanje $(x-1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x: Hornerovom shemom (dvostruka točnost).

Hornerova shema “na ruke”

Hornerova shema “na ruke” radi se tako da se napravi tablica s dva reda.

- U gornjem redu popišu se svi koeficijenti polinoma p_n, redom — od a_n, do a_0.
- Donji red se računa korištenjem gornjeg reda i točke x_0.

Elemente donjeg reda, slijeva nadesno, označimo s

$$x_0,\ c_{n-1},\ c_{n-2}, \ldots,\ c_0,\ r_0,$$

tako da se c_{n-1} nalazi ispod a_n:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline x_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 & r_0 \end{array}.$$

Hornerova shema “na ruke”

Elementi donjeg reda računaju se ovako:

$$
\begin{aligned}
c_{n-1} &:= a_n, \\
c_{i-1} &:= c_i * x_0 + a_i, \qquad i = n-1, \dots, 1, \\
r_0 &:= c_0 * x_0 + a_0.
\end{aligned}
$$

Dakle,

- vodeći koeficijent a_n se prepiše,
- svi ostali se računaju tako da se posljednji izračunati c_i pomnoži s x_0, a zatim mu se doda a_i (napiše se ispod a_i).

Na kraju je $p_n(x_0) = r_0$.

Hornerova shema "na ruke"

Primjer. Izračunajmo vrijednost polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki $x_0 = -1$.

Formirajmo tablicu:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}.$$

Dakle, $p_5(-1) = 4$. ∎

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Koeficijenti c_i u donjem redu tablice imaju posebno značenje.

Promatrajmo polinom koji dobijemo dijeljenjem polinoma p_n s polinomom stupnja 1, oblika $x - x_0$.

- Kvocijent ta dva polinoma nazovimo q_{n-1} — to je ponovno polinom, stupnja $n - 1$,
- a ostatak je broj (mora biti stupnja manjeg od polinoma kojim dijelimo) — označimo ga s b_0.

Tada vrijedi
$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + b_0.$$

Uvrštavanje $x = x_0$ u prethodnu relaciju pokazuje da je
$$b_0 = p_n(x_0) = r_0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Označimo koeficijente polinoma q_{n-1} s b_i, za $i = 1, \ldots, n$,

$$q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i.$$

Kad to uvrstimo u relaciju za dijeljenje i sredimo koeficijenate uz odgovarajuće potencije, izlazi

$$\begin{aligned} p_n(x) = b_n x^n + (b_{n-1} - x_0\, b_n) x^{n-1} + \cdots + (b_1 - x_0\, b_2) x \\ + b_0 - x_0\, b_1. \end{aligned}$$

Za vodeći koeficijent b_n, odmah vidimo da je $b_n = a_n$, a za ostale koeficijente dobivamo

$$a_i = b_i - x_0 \cdot b_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Dakle, b_i možemo izračunati iz b_{i+1} rekurzijom

$$b_i = a_i + x_0 \cdot b_{i+1}.$$

Primijetite da je to relacija istog oblika kao za dobivanje c_i, samo s pomaknutim indeksima. Kako je na startu $b_n = c_{n-1}$, zaključujemo da je

$$b_i = c_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zaključak: koeficijenti koje dobijemo u Hornerovoj shemi su

- koeficijenti kvocijenta i ostatka pri dijeljenju polinoma p_n linearnim faktorom $x - x_0$.

Primjer

Primjer. Podijelimo

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

linearnim polinomom $x + 1$.

Primijetite da je to ista tablica kao u prošlom primjeru, pa imamo

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r} & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}.$$

Odatle lako čitamo

$$2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1 = (x + 1)\left(2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 3\right) + 4.$$

Algoritam za dijeljenje polinoma s $x - x_0$

Dijeljenje polinoma s $(x - x_0)$

```
b[n] = a[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  b[i] = b[i + 1] * x_0 + a[i];
};
/* Polinom-kvocijent:  */
/* q_{n-1}(x) = b[n] · x^{n-1} + ··· + b[2] · x + b[1].   */
```

Potpuna Hornerova shema

Što se događa ako postupak dijeljenja polinoma linearnim faktorom nastavimo, tj. ponovimo više puta (dok ide)?

Dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (x - x_0) q_{n-1}(x) + r_0 \\ &= (x - x_0) \big[(x - x_0) q_{n-2}(x) + r_1 \big] + r_0 \\ &= (x - x_0)^2 q_{n-2}(x) + r_1 (x - x_0) + r_0 \\ &= \quad \cdots \\ &= r_n (x - x_0)^n + \cdots + r_1 (x - x_0) + r_0. \end{aligned}$$

Dakle, polinom p_n razvijen je po potencijama od $(x - x_0)$.

Koja su značenja koeficijenata r_i?

Potpuna Hornerova shema

Usporedimo dobiveni oblik s Taylorovim polinomom oko x_0

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!} \,(x - x_0)^i,$$

pa zaključujemo da vrijedi

$$r_i = \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Dakle, potpuna Hornerova shema računa

- sve Taylorove koeficijente polinoma u zadanoj točki x_0,

tj. sve derivacije polinoma u točki x_0, podijeljene pripadnim faktorijelima.

Primjer

Primjer. Nađimo sve derivacije polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki -1.

Formirajmo potpunu Hornerovu tablicu.

	2	0	−1	4	0	1
−1	2	−2	1	3	−3	4
−1	2	−4	5	−2	−1	
−1	2	−6	11	−13		
−1	2	−8	19			
−1	2	−10				
−1	2					

Primjer

Odatle lako čitamo

$$p_5(-1) = 4, \qquad p_5^{(1)}(-1) = -1 \cdot 1! = -1,$$

$$p_5^{(2)}(-1) = -13 \cdot 2! = -26, \qquad p_5^{(3)}(-1) = 19 \cdot 3! = 114,$$

$$p_5^{(4)}(-1) = -10 \cdot 4! = -240, \qquad p_5^{(5)}(-1) = 2 \cdot 5! = 240.$$

Algoritam za Taylorov razvoj polinoma

Taylorov razvoj polinoma oko x_0

Algoritam nalazi koeficijente r_i u Taylorovom razvoju zadanog polinoma oko točke x_0, koristeći jedno jednodimenzionalno polje (ono izlazno, bez pomoćnih).

```
za i = 0 do n radi {
  r[i] = a[i];
};
za i = 1 do n radi {
  za j = n - 1 do i - 1 radi {
    r[j] = r[j + 1] * x_0 + r[j];
  };
};
```

Generalizirana Hornerova shema

Razvoji po ortogonalnim polinomima

U primjenama se često koriste razvoji oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

gdje je $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ neki ortogonalni sustav funkcija na domeni aproksimacije (ne moraju biti polinomi).

- Razvoj funkcije f u red po ortogonalnim polinomima je očita generalizacija reda potencija.
- Takvi redovi koriste se za aproksimaciju funkcije f, ako znamo da red konvergira prema f na nekoj domeni.

Razvoji po ortogonalnim polinomima

"Rezanjem" reda dobivamo aproksimaciju funkcije f

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x).$$

Posebno se često koriste razvoji po Čebiševljevim polinomima prve vrste T_n (i to u smislu neprekidnih najmanjih kvadrata)

- za aproksimaciju elementarnih i "manje elementarnih" specijalnih funkcija,
- zbog skoro jednolikog rasporeda greške na domeni — tj. dobivamo tzv. "skoro minimaks aproksimacije".

Primjer ide malo kasnije!

Razvoji po ortogonalnim polinomima

Da bismo izračunali $f_N(x)$, moramo znati sve koeficijente a_n i sve funkcije p_n.

- Najčešće nemamo formulu za p_n, nego znamo da funkcije p_n zadovoljavaju jednostavnu tročlanu rekurziju po n.

Pristup računanju vrijednosti $f_N(x)$ je isti kao i ranije.

- Ako unaprijed ne znamo N, onda se sumacija vrši unaprijed, a $p_n(x)$ se računa redom iz rekurzije.

Iz teorije aproksimacija ili iz vrijednosti koeficijenata a_n, često je moguće unaprijed naći koliko članova N treba uzeti za (uniformnu) zadanu točnost.

- Tada se koristi generalizacija Hornerove sheme za brzo izvrednjavanje f_N.

Izvrednjavanje tročlanih homogenih rekurzija

Ortogonalni polinomi, ali i mnoge druge specijalne funkcije (koje ne moraju biti ortogonalne), zadovoljavaju tročlanu homogenu rekurziju oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x) p_n(x) + \beta_n(x) p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

s tim da su poznate "početne" funkcije p_0 i p_1, i sve funkcije α_n, β_n, za $n \in \mathbb{N}$.

- Naglasak je na obliku rekurzije, a ne na ortogonalnosti.

Definiramo silaznu rekurziju za koeficijente B_n:

$$\begin{aligned} B_{N+2} &= B_{N+1} = 0, \\ B_n &= a_n - \alpha_n(x) B_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Generalizirana Hornerova shema

Uvrštavanjem u formulu za $f_N(x)$, dobivamo

$$
\begin{aligned}
f_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x) = (\text{uvrstimo } a_n \text{ iz rekurzije za } B_n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \big(B_n + \alpha_n(x) B_{n+1} + \beta_{n+1}(x) B_{n+2}\big)\, p_n(x) \\
&= \sum_{n=-1}^{N-1} B_{n+1} p_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) B_{n+1} p_n(x) \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{N+1} \beta_n(x) B_{n+1} p_{n-1}(x) \\
&= (\text{rastavimo indekse na } 1 \text{ do } N-1 \text{ i ostale}) = \cdots
\end{aligned}
$$

Generalizirana Hornerova shema

$$\cdots = \sum_{n=1}^{N-1} B_{n+1}\big(p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x)\big)$$
$$+ B_0p_0(x) + B_1p_1(x) + \alpha_0(x)B_1p_0(x)$$
$$= \text{(iskoristimo da je tročlana rekurzija homogena)}$$
$$= B_0p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)\big).$$

U pripadnom silaznom algoritmu, uobičajeno je napraviti jedan korak rekurzije za koeficijente B_n “na ruke”, tako da

- algoritam počinje indeksima $B_{N+1} = 0$, $B_N = a_N$.

Algoritam za generaliziranu Hornerovu shemu

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ (silazni algoritam)

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] - alpha_k(x) * B_1 - beta_k+1(x) * B_2;
};
f_N(x) = B_0 * p_0(x)
            + B_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
```

Ovaj algoritam se još zove i Clenshaw-ov algoritam.

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Ako trebamo izračunati i derivaciju $f'_N(x)$, do pripadnog algoritma dolazimo deriviranjem rekurzije za B_n.

- Koeficijente B_n shvatimo kao funkcije od x.
- Deriviramo $B_n = a_n - \alpha_n(x) B_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}$, s tim da B'_n označava derivaciju B_n po x, u točki x.

"Formalnim" deriviranjem dobivamo rekurziju za B'_n

$$B_{N+2} = B_{N+1} = 0,$$

$$B'_{N+2} = B'_{N+1} = 0,$$

$$\begin{aligned} B_n &= a_n - \alpha_n(x) B_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0, \\ B'_n &= -\alpha'_n(x) B_{n+1} - \alpha_n(x) B'_{n+1} \\ &\qquad - \beta'_{n+1}(x) B_{n+2} - \beta_{n+1}(x) B'_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Odavde je vidljivo da je i $B'_N = 0$. Uz standardnu oznaku

$$b_n = -\alpha'_n(x)B_{n+1} - \beta'_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0,$$

vidimo da je $b_N = 0$. Onda rekurziju za B'_n pišemo u obliku

$$B'_n = b_n - \alpha_n(x)B'_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B'_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Ovo ima skoro isti oblik kao i rekurzija za B_n, osim zamjene a_n s b_n.

Vrijednost $f'_N(x)$ dobivamo deriviranjem $f_N(x)$ po x,

$$f_N(x) = B_0p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)\big).$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Deriviranjem izlazi

$$
\begin{aligned}
f_N'(x) = B_0 p_0'(x) + B_0' p_0(x) \\
&+ B_1 \big(p_1'(x) + \alpha_0'(x) p_0(x) + \alpha_0(x) p_0'(x)\big), \\
&+ B_1' \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big).
\end{aligned}
$$

Zaključak. Da bismo izračunali $f_N'(x)$, dovoljno je znati samo derivacije "početnih" funkcija p_0' i p_1', kao i α_n' i β_n'.

- Za računanje $f_N'(x)$ treba i rekurzija za $f_N(x)$, pa se te dvije vrijednosti obično zajedno računaju.
- Rekurzije za B_n i B_n' provodimo u istoj petlji.

Algoritam za funkciju i derivaciju

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ i $f'_N(x)$

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
B'_1 = 0;
B'_0 = 0;
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] - alpha_k(x) * B_1 - beta_k+1(x) * B_2;
  B'_2 = B'_1;
  B'_1 = B'_0;
  b = - alpha'_k(x) * B_1 - beta'_k+1(x) * B_2;
  B'_0 = b - alpha_k(x) * B'_1 - beta_k+1(x) * B'_2;
};
```

Algoritam za funkciju i derivaciju

```
f_N(x) = B_0 * p_0(x)
            + B_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
f'_N(x) = B_0 * p'_0(x) + B'_0 * p_0(x)
            + B_1 * (p'_1(x) + alpha'_0(x) * p_0(x)
                    + alpha_0(x) * p'_0(x))
            + B'_1 * (p_1(x) + alpha_0(x) * p_0(x));
```

Na isti način možemo izvesti i rekurzije za računanje viših derivacija $f_N^{(k)}(x)$, za $k \geq 2$.

- Međutim, u praksi to gotovo nikada nije potrebno.
- Sve "korisne" familije funkcija p_n, $n \in \mathbb{N}$, zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe drugog reda, s parametrom n.

Primjer: Klasični ortogonalni polinomi!

Generalizirana Hornerova shema — primjeri

Parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma

Tvrdnja. Neparni Čebiševljevi polinomi su neparne, a parni su parne funkcije.

Dokaz se provodi indukcijom. Za nulti i prvi polinom, tvrdnja očito vrijedi, jer je $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.
Pretpostavimo da su svi parni polinomi (do nekog stupnja n), parne, a svi neparni, neparne funkcije. Iz rekurzije

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

vidimo da je

- član $2xT_n(x)$ suprotne parnosti od $T_n(x)$, tj.
- $2xT_n(x)$ je iste parnosti kao T_{n-1},
- pa je T_{n+1} iste parnosti kao T_{n-1}. ■

Rekurzija za parne/neparne Čebiševljeve pol.

Isti dokaz kao za parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma vrijedi i za:

- Čebiševljeve polinome druge vrste,
- Legendreove polinome,
- Hermiteove polinome.

Sada je jasno da se parne funkcije razvijaju po parnim, a neparne po neparnim Čebiševljevim polinomima.

Zaključak. Za sve polinome koji su parne/neparne funkcije, korisno je imati rekurziju samo za parne/neparne polinome.

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Napišimo rekurziju za dva susjedna parna polinoma

$$T_{2n+2}(x) - 2xT_{2n+1}(x) + T_{2n}(x) = 0$$

$$T_{2n}(x) - 2xT_{2n-1}(x) + T_{2n-2}(x) = 0,$$

kao i rekurziju za srednji, neparni član

$$T_{2n+1}(x) - 2xT_{2n}(x) + T_{2n-1}(x) = 0.$$

Zbrojimo rekurzije za parne članove. Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2T_{2n}(x) - 2x\big(T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x)\big) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Iz rekurzije za neparni član iskoristimo da je

$$T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x) = 2xT_{2n}(x).$$

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Početak te rekurzije su prva dva parna polinoma

$$T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Za neparne polinome, rekurzija se dobiva na sličan način. Pokažite da je rekurzija za neparne Čebiševljeve polinome istog oblika kao za parne

$$T_{2n+1}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) = 0,$$

uz početak te rekurzije

$$T_1(x) = x, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Rekurzije za ostale ortogonalne polinome

Napomena. Za sve ostale klasične ortogonalne polinome (osim Laguerreovih), rekurzija za parne/neparne polinome izvodi se na isti način.

Napomena. Rekurziju za parne/neparne Čebiševljeve polinome mogli smo i lakše izvesti, korištenjem

- adicijske formule za trigonometrijske funkcije,
- i eksplicitne formule za $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

odnosno, $T_n(x) = \cos(n\varphi)$, uz $x = \cos\varphi$.

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \cos x$$

ima razvoj po parnim normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k}\left(\frac{2x}{\pi}\right), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.47200121576823476745	6	0.00000000021934576590
1	-0.49940325827040708740	7	-0.00000000000074816487
2	0.02799207961754761751	8	0.00000000000000193230
3	-0.00059669519654884650	9	-0.00000000000000000391
4	0.00000670439486991684	10	0.00000000000000000001
5	-0.00000004653229589732		

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x. Testirati za razne n i x.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x.

Kosinus je parna funkcija, pa je treba aproksimirati parnim funkcijama.

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Supstitucijom

$$y = \frac{2x}{\pi}$$

prethodni se razvoj svodi na razvoj funkcije kosinus na intervalu $[-1, 1]$ po parnim Čebiševljevim polinomima.

U algoritmu za generaliziranu Hornerovu shemu treba uvrstiti da je za parne Čebiševljeve polinome

$$\alpha(x) = 2(1 - 2x^2), \qquad \beta(x) = 1,$$

$$p_0(x) = T_0(x), \qquad p_1(x) = T_2(x).$$

Koeficijenti a_k u razvoju brzo padaju, pa su greške u aproksimaciji vrlo male i približno jednake prvom odbačenom članu.

Razvoj $\ln(x+1)$ *po Čebiševljevim polinomima*

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \ln(1+x)$$

ima razvoj po normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[0,1]$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k^*(x), \quad x \in [0,1],$$

gdje je $T_k^*(x) = T_k(2x-1)$.

Sami izvedite rekurziju za $T_k^*(x)$ i pripadnu generaliziranu Hornerovu shemu.

Razvoj $\ln(x+1)$ po Čebiševljevim polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.37645281291919543163	13	0.00000000001717587317
1	0.34314575050761980479	14	-0.00000000000273642009
2	-0.02943725152285941438	15	0.00000000000043819577
3	0.00336708925556438925	16	-0.00000000000007048360
4	-0.00043327588861004446	17	0.00000000000001138172
5	0.00005947071198957983	18	-0.00000000000000184431
6	-0.00000850296754120286	19	0.00000000000000029978
7	0.00000125046736220057	20	-0.00000000000000004886
8	-0.00000018772799565082	21	0.00000000000000000798
9	0.00000002863025064840	22	-0.00000000000000000131
10	-0.00000000442095698068	23	0.00000000000000000021
11	0.00000000068956027323	24	-0.00000000000000000004
12	-0.00000000010845068551	25	0.00000000000000000001

Razvoj $\ln(x+1)$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x. Testirati za razne n i x.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x.

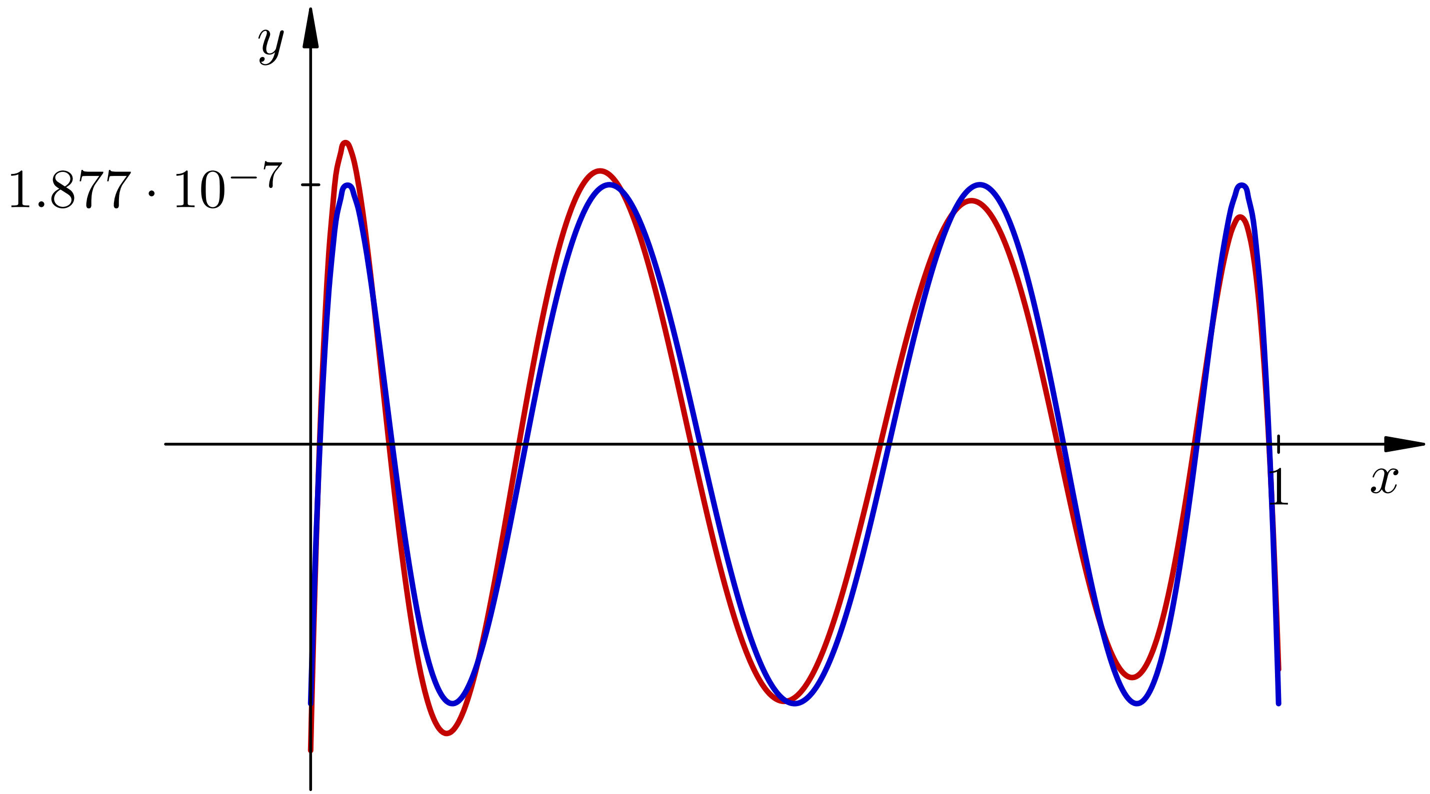
U prethodnom razvoju za $\ln(x+1)$ uzmemo samo članove do indeksa 7, tj. neka je prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$.

$$f_7(x) = \sum_{k=0}^{7} a_k T_k^*(x), \quad e_7(x) = a_8 T_8^*(x) + \sum_{k=9}^{\infty} a_k T_k^*(x).$$

Razvoj $\ln(x+1)$ po Čebiševljevim polinomima

Na sljedećem grafu je

- greška $e_7(x) = f(x) - f_7(x)$ prikazana crvenom bojom,
- prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$ plavom bojom.



Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Konačno, treba reći kako se dobivaju koeficijenti a_k u ovakvom razvoju.

Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da radimo na standardnom intervalu $[-1, 1]$.

Relacija ortogonalnosti za Čebiševljeve polinome prve vrste ima oblik

$$\langle T_k, T_\ell \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)\, T_\ell(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k \neq \ell, \\ \pi, & \text{za } k = \ell = 0, \\ \pi/2, & \text{za } k = \ell \neq 0. \end{cases}$$

Vidimo da je $\|T_0\|^2 = 2\, \|T_k\|^2$, za bilo koji $k \geq 1$.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Zato se razvoj zadane funkcije f po T_k obično piše u obliku

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x).$$

Pripadne formule za koeficijente u razvoju su onda

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad k \geq 0.$$

Ove integrale možemo izračunati analitički

- tek za poneke funkcije f.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Aproksimacija f_n funkcije f po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata je

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k T_k(x).$$

Za numeričko računanje koeficijenata a_k, za $k \leq n$, postoje dva pristupa:

- Gauss–Čebiševljeva integracija reda većeg od n,
- diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma u nultočkama ili ektremima Čebiševljevog polinoma T_{N+1}, za $N \geq n$.

Ova dva pristupa su ekvivalentna, za razvoje po T_k i općenito.

Prednost razvoja po T_k = nultočke T_{N+1} se lako računaju!

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Budući da su Čebiševljevi polinomi T_k zapravo kosinusi, za njih vrijede

- vrlo slične relacije diskretne ortogonalnosti kao kod trigonometrijskih funkcija (v. malo kasnije).

Neka su x_j sve različite nultočke Čebiševljevog polinoma T_{N+1}, tj. neka je

$$T_{N+1}(x_j) = \cos(N+1)\vartheta_j = 0.$$

Nije teško izračunati da je tada

$$x_j = \cos\vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2(N+1)}, \quad j = 0, \ldots, N.$$

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za Čebiševljeve polinome, na skupu nultočaka $\{x_0, \ldots, x_N\}$ polinoma T_{N+1}, vrijede sljedeće relacije ortogonalnosti

$$\sum_{j=0}^{N} T_k(x_j)\, T_\ell(x_j) = \sum_{j=0}^{N} \cos(k\vartheta_j) \cdot \cos(\ell\vartheta_j)$$

$$= \begin{cases} 0 & k \neq \ell, \text{ uz } k, \ell \leq N, \\ (N+1)/2 & k = \ell, \text{ uz } 0 < k \leq N, \\ N+1 & k = \ell = 0. \end{cases}$$

Skica dokaza: Produkt kosinusa pretvorimo u zbroj kosinusa.

- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume ($N+1$-i korijeni iz jedinice).

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Dakle, $\{T_0, T_1, \ldots, T_N\}$ je ortogonalna baza u prostoru polinoma $\mathcal{P}_N$ obzirom na diskretni skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, g(x_j).$$

Uočite da ovom sustavu funkcija ne možemo dodati sljedeći Čebiševljev polinom T_{N+1}, jer je

- njegov vektor vrijednosti u zadanim točkama nul-vektor.

Napomena: Unitarni prostor "događaja" je $\mathbb{R}^{N+1}$, s tim da

- svakoj funkciji f pridružujemo
- vektor njezinih vrijednosti u točkama $x_0, \ldots, x_N$.

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Neka je f_n aproksimacija za f po pripadnoj diskretnoj ortogonalnoj metodi najmanjih kvadrata, oblika

$$f_n(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} d_k T_k(x), \quad n \leq N.$$

Za koeficijente vrijedi standardna formula $\langle f, T_k \rangle / \|T_k\|^2$ u pripadnom skalarnom produktu, pa je

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \quad k = 0, \ldots, N.$$

Napomena: koeficijenti d_k ovise o N, samo to nije posebno označeno!

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za zadane f i N, ovi koeficijenti

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \qquad k = 0, \ldots, N,$$

se jednostavno računaju!

Ako koeficijenti a_k relativno brzo padaju, onda za relativno male vrijednosti N (na pr. $N = 31$, ili $N = 63$) dobivamo

- da se a_k i d_k podudaraju na punu točnost računala (double, extended)!

Slične relacije diskretne ortogonalnosti vrijede i u ekstremima polinoma T_{N+1}.

Računanje koeficijenata iz diskretne ortog.

Standardno se koristi $N+1=2^m$. Za fiksni N (odnosno, m):

- tablica vrijednosti $f(x_j)$ se pripremi jednom, za sve k,
- vrijednosti $T_k(x_j)$ mogu se računati direktno preko cos, ili iz pripremljene tablice svih potrebnih kosinusa.

Literatura:

- Luke Y. L., "Mathematical functions and their approximations", Academic Press, 1975.

Ilustracija brzine konvergencije koeficijenata $d_k^{(N+1)}$ prema pravim koeficijentima a_k, u ovisnosti o broju točaka $N+1$:

- `09_PROGS\TN_COEF\tn_28.out` za $\cos x$ na $[-\pi/2, \pi/2]$,
- `09_PROGS\TN_COEF\tn_04.out` za $\ln(1+x)$ na $[0,1]$.

Koeficijenti za $\cos x$ na $[-\pi/2, \pi/2]$

Koeficijent a_0 (uz T_0) i njegove aproksimacije:

$N+1$	$d_0^{(N+1)}$	greška
1	1.00000 00000 00000 000	−5.2800E−01
2	0.44401 58403 26213 234	2.7985E−02
4	0.47199 45113 73366 783	6.7044E−06
8	0.47200 12157 68232 835	1.9320E−15
16	0.47200 12157 68234 768	−3.2526E−19
32	0.47200 12157 68234 768	−3.5237E−19
$a_0 =$	0.47200 12157 68234 767	

Koeficijent a_8 (uz T_{16}) i njegove aproksimacije:

$N+1$	$d_8^{(N+1)}$	greška
32	0.00000 00000 00001 932	9.5100E−20
$a_8 =$	0.00000 00000 00001 932	

Koeficijenti za $\ln(x+1)$ ***na*** $[0,1]$

Koeficijent a_0 (uz T_0^*) i njegove aproksimacije:

$N+1$	$d_0^{(N+1)}$	greška
1	0.40546 51081 08164 382	−2.9012E−02
2	0.37688 59011 88190 076	−4.3309E−04
4	0.37645 30006 47120 599	−1.8773E−07
8	0.37645 28129 19265 915	−7.0484E−14
16	0.37645 28129 19195 432	−1.0842E−19
32	0.37645 28129 19195 432	−1.0842E−19
$a_0 =$	0.37645 28129 19195 432	

Koeficijent a_{16} (uz T_{16}^*) i njegove aproksimacije:

$N+1$	$d_{16}^{(N+1)}$	greška
32	0.00000 00000 00070 484	2.5896E−21
$a_{16} =$	0.00000 00000 00070 484	

Trigonometrijski polinomi — primjeri

Razvoj periodičkih funkcija

Za aproksimaciju periodičkih funkcija standardno koristimo Fourierove redove.

- Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je f periodička funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$.

Fourierov red za funkciju f je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gdje su

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Napomena. Zbog periodičnosti, granice integracije mogu biti bilo koji c, $c + 2\pi$!

Konvergencija Fourierovog reda

Konvergencija Fourierovog reda riješena je Dirichletovim teoremom.

Teorem (Dirichlet). Pretpostavimo da je

(a) f funkcija, osim možda u konačno mnogo točaka na $\langle -\pi, \pi \rangle$ (u tim točkama može imati i više vrijednosti),

(b) f je periodična s periodom 2π,

(c) f i f' su po dijelovima neprekidne funkcije na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Tada red Fourierov red konvergira prema

(1) $f(x)$, ako je x točka u kojoj je funkcija f neprekidna,

(2) $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, ako u točki x funkcija ima prekid (skok).

Razvoj periodičkih funkcija

Pretpostavimo da su koeficijenti a_n i b_n poznati i da želimo izračunati aproksimaciju trigonometrijskim polinomom

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx),$$

gdje je N unaprijed zadan (zanemarimo poseban "status" a_0).

Trigonometrijski polinom sastoji se iz dva dijela: kosinusnog i sinusnog (to ćemo iskoristiti u algoritmu).

Nadalje, Fourierov red

- parne funkcije $f(x) = f(-x)$ ima samo kosinusni dio, a
- neparne funkcije $f(x) = -f(-x)$ ima samo sinusni dio razvoja.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f parna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx).$$

- U direktnoj sumaciji trebamo N računanja funkcije $\cos$, za $\cos(nx)$, uz $n \geq 1$.
- Možemo koristiti i generaliziranu Hornerovu shemu, samo treba naći tročlanu homogenu rekurziju za

$$p_n(x) = \cos(nx).$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu kosinusa pretvara u produkt

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Ako stavimo $a = (n+1)x$ i $b = (n-1)x$, dobivamo

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2\cos x\, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, u općoj tročlanoj rekurziji treba uzeti

$$\alpha_n(x) = -2\cos x, \quad \beta_n(x) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Rekurzija za B_n ima oblik

$$
\begin{aligned}
&B_{N+2} = B_{N+1} = 0, \\
&\quad B_n = a_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \qquad n = N, \ldots, 0.
\end{aligned}
$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = \cos x$, pa je

$$
\begin{aligned}
f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\
&= B_0 \cdot 1 + B_1 \big(\cos x - 2\cos x \cdot 1\big) \\
&= B_0 - B_1 \cos x.
\end{aligned}
$$

Sad imamo sve elemente za generaliziranu Hornerovu shemu.

Trigonometrijski polinom za parne funkcije

Fourierov "red" parne funkcije

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
alpha = 2 * cos(x);
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] + alpha * B_1 - B_2;
};
f_N(x) = B_0 - 0.5 * alpha * B_1;
```

Algoritam funkciju cos računa samo jednom.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f neparna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zbog sume koja ide od 1 treba biti oprezan. Zgodniji zapis je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{n+1} \sin((n+1)x).$$

Sad očito treba definirati

$$p_n(x) = \sin((n+1)x).$$

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu sinusa pretvara u produkt

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

Ako stavimo $a = (n+2)x$ i $b = nx$, dobivamo

$$\sin((n+2)x) + \sin(nx) = 2\sin((n+1)x)\cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2\cos x\, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

što je potpuno isti oblik kao i za parne funkcije, odnosno za $p_n(x) = \cos(nx)$.

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Rekurzija za B_n ima isti oblik kao prije, samo starta od $N-1$

$$B_{N+1} = B_N = 0,$$

$$B_n = b_{n+1} + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N-1, \ldots, 0.$$

Početne funkcije su $p_0(x) = \sin x$ i $p_1(x) = \sin(2x) = 2\sin x \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot \sin x + B_1\big(2\sin x \cos x - 2\cos x \cdot \sin x\big) \\ &= B_0 \sin x. \end{aligned}$$

Algoritam napišite sami.

Razvoj periodičkih funkcija

Za opći Fourierov red, koji ima i parni i neparni dio, treba spojiti prethodne algoritme.

Problem. Neparni je za 1 kraći, jer starta s $N-1$.

Rješenje. Umjetno definiramo $b_0 = 0$ i pišemo

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zatim uzmemo

$$p_n(x) = \sin(nx).$$

Razvoj periodičkih funkcija

Rekurzija za p_n je ista, a za B_n vrijedi "produljena" rekurzija

$$
\begin{aligned}
B_{N+1} &= B_N = 0, \\
B_n &= b_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.
\end{aligned}
$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 0$ i $p_1(x) = \sin x$, pa je

$$
\begin{aligned}
f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\
&= B_0 \cdot 0 + B_1 \big(\sin x - 2\cos x \cdot 0\big) \\
&= B_1 \sin x.
\end{aligned}
$$

To pokazuje da B_0 uopće ne treba računati, ali baš to i očekujemo, kad smo rekurziju pomakli za jedan indeks naviše!

Fourierov red za $x + |x|$

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x + |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

može se razviti u Fourierov red

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx).$$

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu svih članova do uključivo $\cos(nx)$, odnosno, $\sin(nx)$.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$ i pogrešku $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ za razne n.

Fourierov red za $x + |x|$

Napomena. Fourierov red konvergira prema prekidnoj funkciji

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0), \\ 2x, & x \in [0, \pi), \\ \pi, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Ova funkcija je “periodičko” proširenje od f, s tim da ima korektnu vrijednost u točki prekida.

Koeficijente u Fourierovom razvoju možemo računati direktno

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + |x|) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2x \cos(kx)\, dx.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Sad razlikujemo dva slučaja $k = 0$ i $k \neq 0$. Za $k = 0$ imamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi 2x\,dx = \frac{1}{\pi} x^2 \,\Big|_0^\pi = \pi.$$

Za $k \neq 0$ imamo

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi 2x \, \cos(kx)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = \cos(kx)\,dx & v = \sin(kx)/k \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2x}{k} \sin(kx) \,\Big|_0^\pi - \frac{2}{k} \int\limits_0^\pi \sin(kx)\,dx \right) = \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{1}{k} \cos(kx) \,\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{k^2\pi} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{k^2\pi} \big((-1)^k - 1 \big).$$

Fourierov red za $x + |x|$

Odatle odmah slijedi da je

$$a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, \quad a_{2k} = 0.$$

Za b_k, budući da je $k \neq 0$, imamo

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2x\,\sin(kx)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = \sin(kx)\,dx & v = -\cos(kx)/k \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2x}{k}\cos(kx)\,\Big|_0^\pi + \frac{2}{k}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{2}{k^2}\sin(kx)\,\Big|_0^\pi\right) = -\frac{2}{k}(-1)^k.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Posljednji rezultat možemo zapisati i kao

$$b_k = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}.$$

Koeficijente u Fourierovom redu mogli smo računati zbrajanjem Fourierovih razvoja funkcija

- x na $[-\pi, \pi]$, (neparna funkcija), pa razvoj ima samo b_n,
- $|x|$ na $[-\pi, \pi]$, (parna funkcija), pa razvoj ima samo a_n.

Fourierov red za $x + |x|$

Za vježbu pokažite da je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$x = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

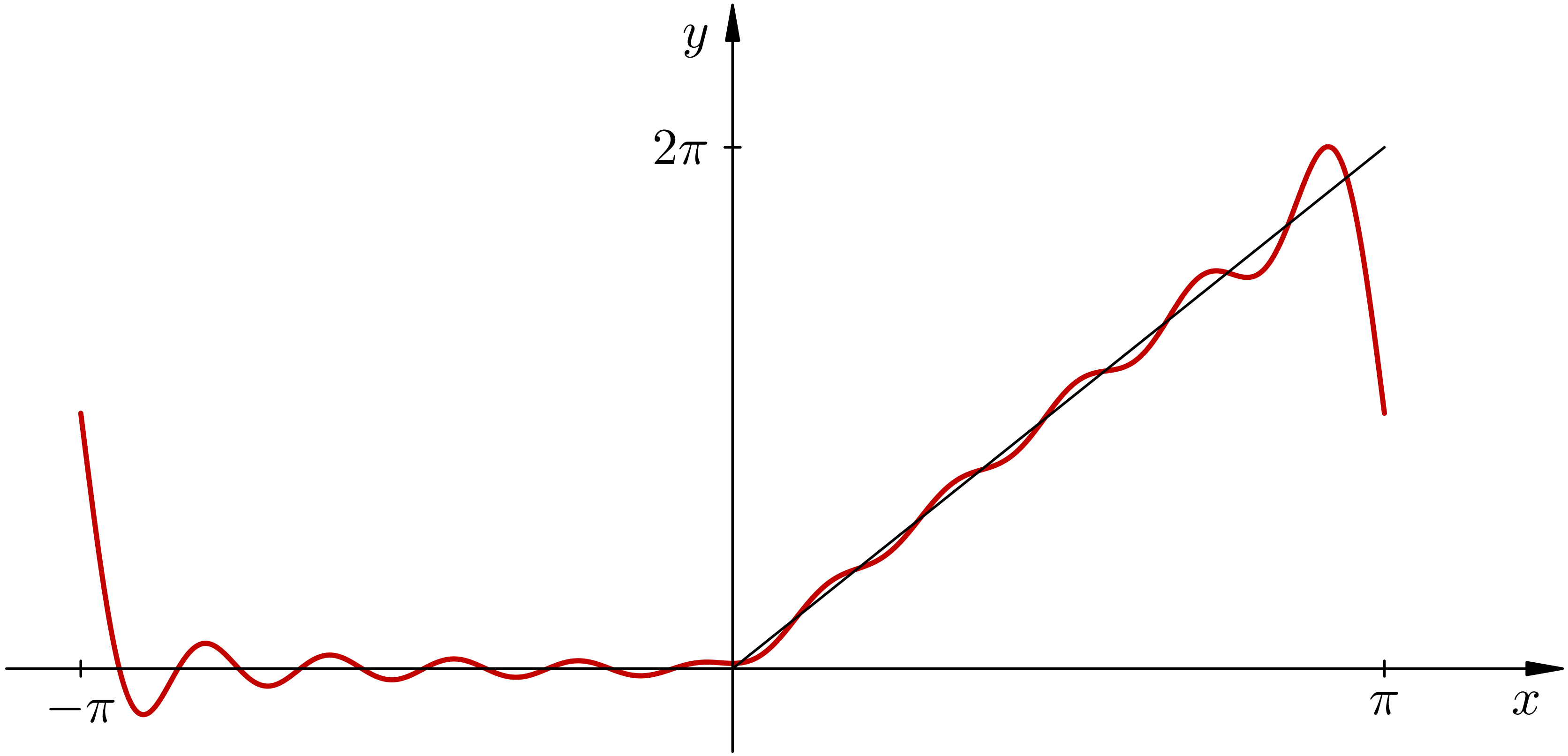
Zbog neprekidnosti periodičkog proširenja za $|x|$,

- koeficijenti a_k u razvoju trnu kao k^{-2}, tj. $a_k = O(k^{-2})$.

Periodičko proširenje za x ima prekid, pa

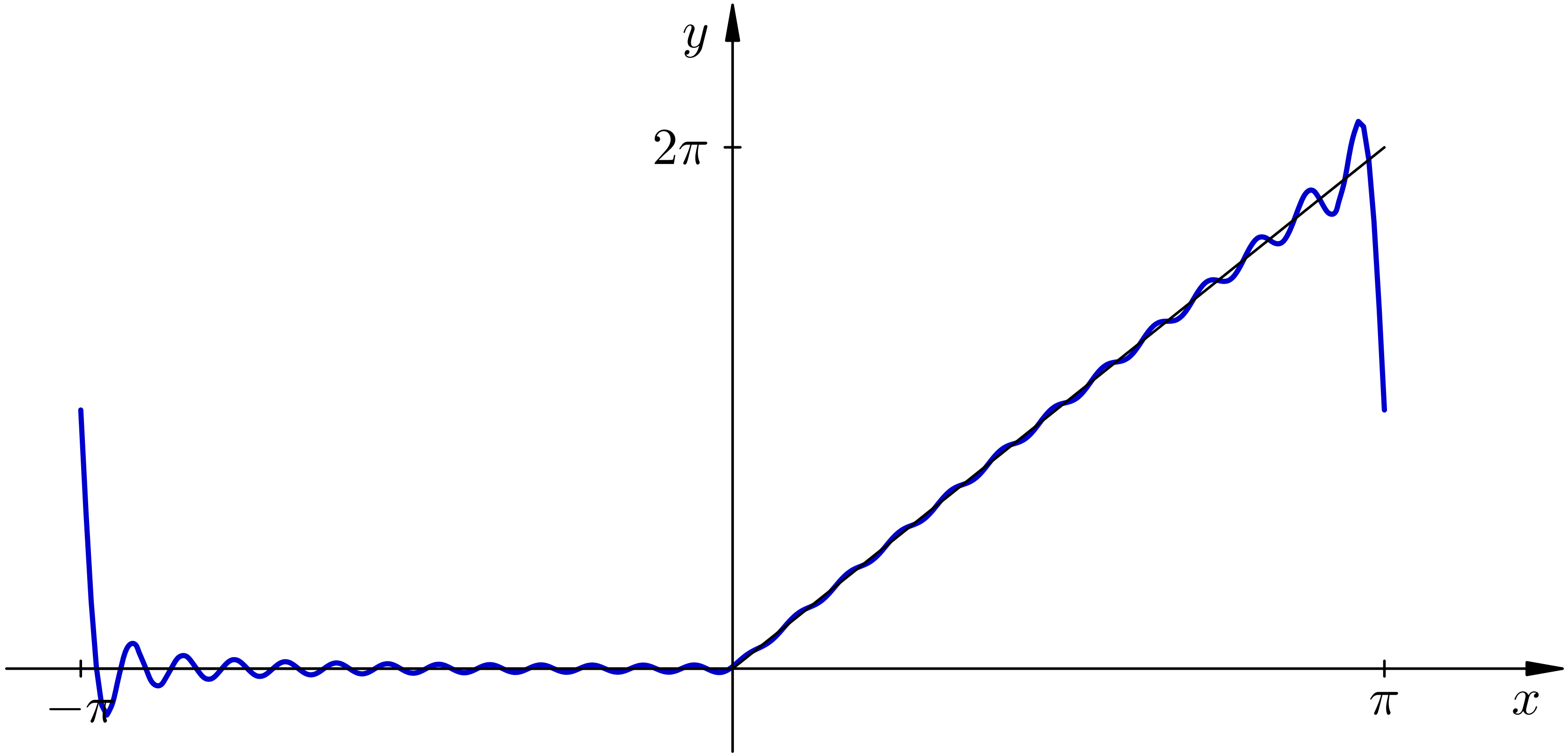
- koeficijenti b_k u razvoju trnu kao k^{-1}, tj. $b_k = O(k^{-1})$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



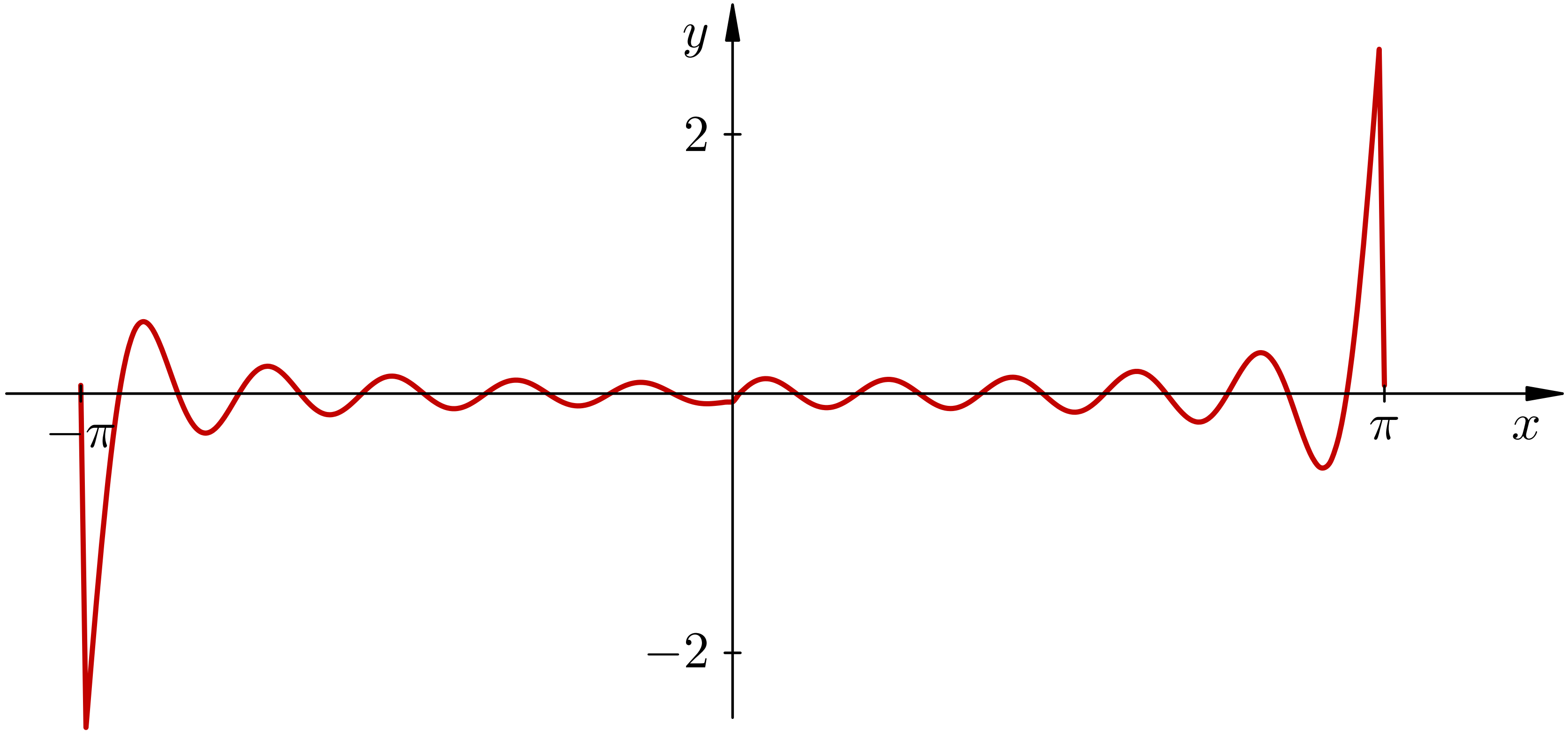
Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



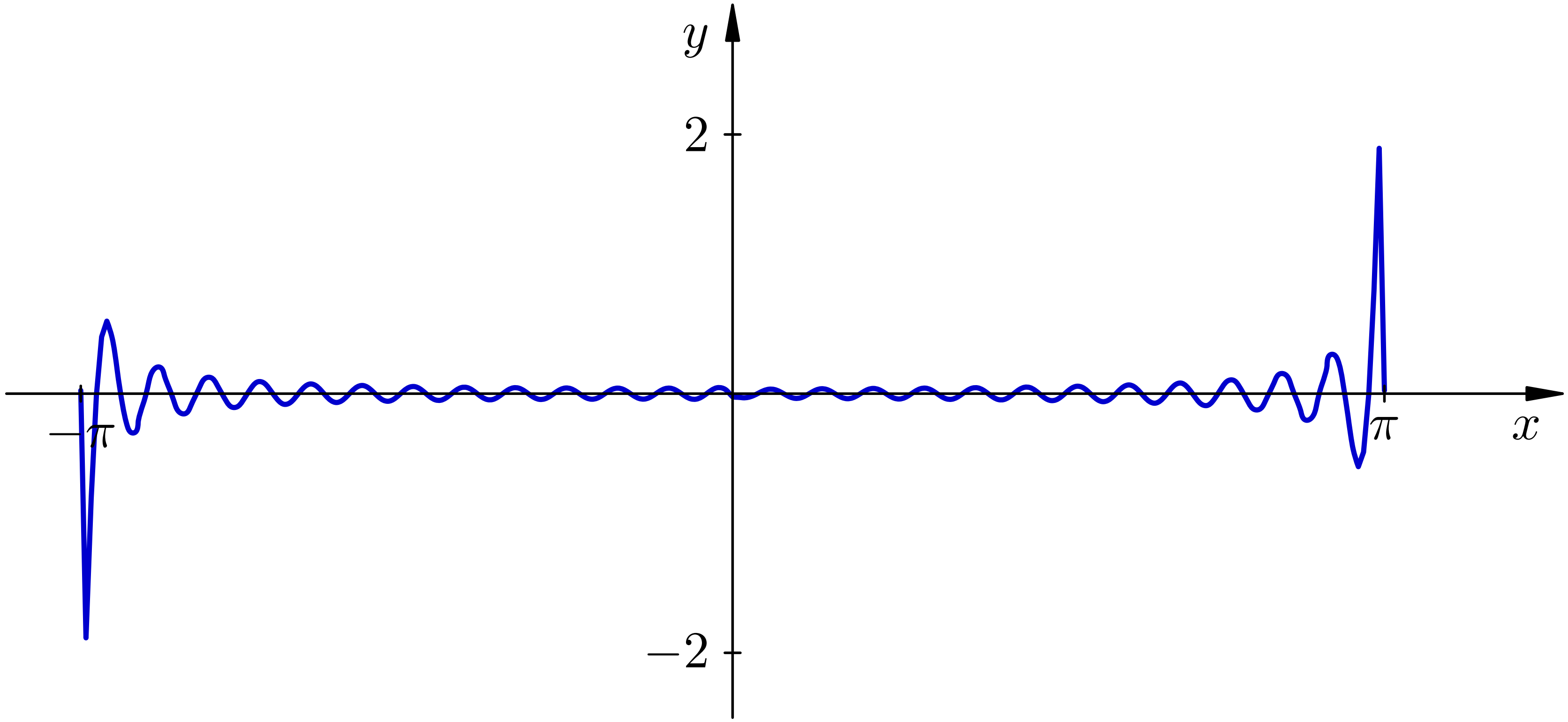
Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

Za trigonometrijske funkcije, također, vrijede relacije diskretne ortogonalnosti, slično kao i za Čebiševljeve polinome T_n.

Na mreži od $N+1$ točaka

$$x_j = \frac{2\pi}{N+1} \cdot j, \quad j = 0, \ldots, N,$$

uz uvjet $0 \leq k + \ell \leq N$, vrijede sljedeće relacije diskretne ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija

$$\sum_{j=0}^{N} \sin(kx_j) \cdot \sin(\ell x_j) = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \text{ i } k = \ell = 0, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \cos(kx_j) \cdot \sin(\ell x_j) = 0,$$

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

$$\sum_{j=0}^{N} \cos(kx_j) \cdot \cos(\ell x_j) = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \\ N+1, & k = \ell = 0. \end{cases}$$

Dokaz ovih relacija ide slično kao i za Čebiševljeve polinome.

- Produkt trigonometrijskih funkcija treba pretvoriti u zbroj ili razliku kosinusa ili sinusa.
- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume ($N+1$-i korijeni iz jedinice).

Ako želimo prvih $N+1$ kosinusa i prvih N sinusa u bazi prostora (dimenzije $2N+1$), onda treba uzeti $2N$, umjesto N.

Stabilnost rekurzija — primjeri

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Za rekurzije oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x) p_n(x) + \beta_n(x) p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, \ldots, N-1,$$

možemo zaključiti da opasnost od kraćenja, pa onda i gubitak točnosti nastupa kad niz vrijednosti

$$p_0(x), p_1(x), \ldots, p_N(x)$$

naglo pada po apsolutnoj vrijednosti.

Dva su pitanja na koja bi bilo zgodno odgovoriti.

- Kako se tada ponaša silazni algoritam za računanje f_N?
- Može li se nekim trikom, poput okretanja rekurzije, popraviti stabilnost?

Stabilnost rekurzija i gen. Hornerove sheme

Umjesto općeg odgovora, koji bi koji zahtijevao dublju analizu, ilustrirajmo situaciju na jednom klasičnom primjeru.

Primjer. Neka je $p_n(x) = e^{nx}$. Ove funkcije generiraju tzv. "eksponencijalne polinome" (umjesto x^n, imamo eksponencijalne funkcije e^{nx})

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{nx}.$$

Za takve p_n možemo sastaviti razne rekurzije.

Dvočlana ima oblik

$$p_{n+1}(x) - e^x p_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Stabilnost eksponencijalnih polinoma

Tročlana homogena rekurzija je slična onima za trigonometrijske funkcije,

$$p_{n+1}(x) - 2\,\mathrm{ch}\,x\,p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $\mathrm{ch}\,x = (e^x + e^{-x})/2$ kosinus hiperbolni od x. Očito je da $p_n(x)$, za fiksni x,

- monotono raste po n, kad je $x > 0$,
- monotono pada po n, kad je $x < 0$.

Testirajmo stabilnost ove rekurzije i pripadne generalizirane Hornerove sheme za računanje $p_n(x) = e^{nx}$ u točkama $x = 1$ i $x = -1$.

- `09_PROGS\EXP_STAB\exp_nx_p.out` za $x = 1$,
- `09_PROGS\EXP_STAB\exp_nx_n.out` za $x = -1$.

Tročlana rekurzija za e^{nx} u točki $x = 1$

Izračunate vrijednosti za e^n (tip extended, $u \approx 5.42 \cdot 10^{-20}$).
Crvene znamenke su pogrešne (eventualno zadnja i to za 1)!

n	uzlazni algoritam	generalizirani Horner
1	2.71828182845904524E+00	2.71828182845904524E+00
2	7.38905609893065023E+00	7.38905609893065023E+00
3	2.00855369231876677E+01	2.00855369231876677E+01
..	...	...
20	4.85165195409790279E+08	4.85165195409790278E+08
21	1.31881573448321470E+09	1.31881573448321470E+09
22	3.58491284613159157E+09	3.58491284613159157E+09
23	9.74480344624890261E+09	9.74480344624890261E+09
24	2.64891221298434723E+10	2.64891221298434723E+10
..	...	...
50	5.18470552858707248E+21	5.18470552858707248E+21

Tročlana rekurzija za e^{nx} u točki $x = -1$

Izračunate vrijednosti za e^{-n} (tip `extended`, $u \approx 5.42 \cdot 10^{-20}$).
Crvene znamenke su pogrešne!

n	uzlazni algoritam	generalizirani Horner
1	3.67879441171442322E−01	3.67879441171442322E−01
2	1.35335283236612692E−01	1.35335283236612693E−01
3	4.97870683678639431E−02	4.97870683678639445E−02
..	...	...
20	2.06312875362352662E−09	2.03726813197135925E−09
21	7.63625006000114140E−10	8.14907252788543701E−10
22	2.93541164415374309E−10	4.65661287307739258E−10
23	1.42290366660849133E−10	9.31322574615478516E−10
24	1.45589854214859448E−10	1.86264514923095703E−09
..	...	...
50	2.11071892033453648E+01	5.12000000000000000E+02