Numerička matematika

6. predavanje

Saša Singer i Nela Bosner

PMF - Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

Po dijelovima polinomna interpolacija

Po dijelovima kubična interpolacija

Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

Kubična splajn interpolacija

Po dijelovima parabolička interpolacija

Usporedba raznih vrsta interpolacije

Po dijelovima kubična interpolacija

Kod po dijelovima kubične interpolacije na $[a, b]$, restrikcija aproksimacijske funkcije φ na svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ je kubični polinom

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje je $p_k \in \mathcal{P}_3$.

Ove polinome p_k obično zapisujemo relativno obzirom na početnu točku intervala x_{k-1}, u obliku

$$\begin{aligned} p_k(x) = c_{0,k} &+ c_{1,k}(x - x_{k-1}) \\ &+ c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3, \end{aligned}$$

za $x \in [x_{k-1}, x_k]$, i za $k = 1, \ldots, n$. Razlog za ovaj zapis je značenje koeficijenata (Taylor u x_{k-1}) i stabilno računanje.

Broj nepoznatih parametara i broj uvjeta

Ukupno imamo n kubičnih polinoma.

- Za svakog od njih treba odrediti po 4 koeficijenta,
- dakle, ukupno moramo odrediti $4n$ koeficijenata.

Uvjeta interpolacije je $2n$, jer svaki kubični polinom p_k

- mora interpolirati funkciju f u rubovima svog podintervala $[x_{k-1}, x_k]$,

tj. mora vrijediti

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, \end{aligned} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Ovi uvjeti automatski osiguravaju neprekidnost funkcije φ u svim unutrašnjim čvorovima mreže $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Dodatni uvjeti interpolacije na derivaciju

Obično želimo da interpolacijska funkcija φ bude glađa:

- barem klase $C^1[a, b]$, odakle slijedi zahtjev da
- derivacija funkcije φ mora biti neprekidna i u čvorovima.

Najlakši način da to dobijemo = dodamo točno još $2n$ uvjeta "interpolacije", kao da interpoliramo i derivaciju, tj.

- za svaki kubični polinom p_k dodajemo još po dva uvjeta

$$\begin{aligned} p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1}, \\ p_k'(x_k) &= s_k, \end{aligned} \qquad k = 1, \ldots, n,$$

pri čemu su s_k neki brojevi. Njihovo stvarno značenje može biti različito, pa ćemo ga detaljno opisati kasnije.

- Ideja = brojeve s_k možemo birati/zadati na razne načine.

Neprekidnost derivacije interpolacijske funkcije

Zasad, možemo zamišljati da su brojevi s_k

- neke aproksimacije derivacije funkcije f u čvorovima.

Oznaka s_k dolazi od engleske riječi “slope” = nagib.

Primijetite da je takvim izborom dodatnih uvjeta

- osigurana neprekidnost prve derivacije funkcije φ u svim unutrašnjim čvorovima,

jer je

$$p'_k(x_k) = p'_{k+1}(x_k) = s_k, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Ako pretpostavimo da su s_k nekako zadani brojevi, dobivamo problem Hermiteove interpolacije za svaki polinom p_k.

Nađimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_k.

Zapis po dijelovima kubične interpolacije

Za ovaj problem Hermiteove interpolacije

- najzgodnije je koristiti Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_k,
- s tzv. dvostrukim čvorovima x_{k-1} i x_k.

Razlog. U oba čvora x_{k-1} i x_k zadajemo po dva podatka:

- vrijednost funkcije i derivacije.

Već od prije znamo da je

$$f[x_k, x_k] = f'(x_k).$$

U našem slučaju, ako u točki x_k

- derivaciju $f'(x_k)$ zadajemo ili aproksimiramo sa s_k,

onda je zadano

$$f[x_k, x_k] = s_k.$$

Razmak susjednih različitih čvorova označavamo kao i prije

$$h_k := x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Tablica podijeljenih razlika za polinom p_k

Tablica podijeljenih razlika za Hermiteov interpolacijski polinom p_k, koji ima dva dvostruka čvora x_{k-1} i x_k, je

$$
\begin{array}{c|cccc}
t_j & f[t_j] & f[t_j, t_{j+1}] & f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}] & f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}, t_{j+3}] \\
\hline
x_{k-1} & f_{k-1} & & & \\
 & & s_{k-1} & & \\
 & & & \dfrac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} & \\
x_{k-1} & f_{k-1} & & & \\
 & & & & \dfrac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2} \\
 & & f[x_{k-1}, x_k] & & \\
 & & & \dfrac{s_k - f[x_{k-1}, x_k]}{h_k} & \\
x_k & f_k & & & \\
 & & s_k & & \\
x_k & f_k & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik polinoma p_k

Newtonov oblik Hermiteovog interpolacijskog polinoma p_k, koji ima dva dvostruka čvora x_{k-1} i x_k, je

$$\begin{aligned} p_k(x) = f[x_{k-1}] &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\ &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 \\ &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 (x - x_k), \end{aligned}$$

s tim da je

$$\begin{aligned} f[x_{k-1}, x_{k-1}] &= s_{k-1}, \\ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}, \\ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}. \end{aligned}$$

Newtonov oblik polinoma p_k

Uvrštavanjem čvorova x_{k-1} i x_k u prethodnu formulu za p_k, odmah možemo provjeriti da je

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \qquad & p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, \qquad & p_k'(x_k) &= s_k. \end{aligned}$$

Drugim riječima, našli smo traženi polinom p_k na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$.

Za nalaženje koeficijenata $c_{i,k}$ u standardnom zapisu, treba još

- Newtonov oblik polinoma p_k “preurediti” tako da bude napisan po potencijama od $(x - x_{k-1})$.

Standardni oblik polinoma p_k

Posljednji član Newtonovog oblika polinoma p_k možemo napisati kao

$$\begin{aligned}(x - x_{k-1})^2(x - x_k) &= (x - x_{k-1})^2(x - x_{k-1} + x_{k-1} - x_k) \\ &= (x - x_{k-1})^2(x - x_{k-1} - h_k) \\ &= (x - x_{k-1})^3 - h_k(x - x_{k-1})^2.\end{aligned}$$

Zapis polinoma p_k onda glasi

$$\begin{aligned}p_k(x) = f[x_{k-1}] &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\ &+ \big(f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k\, f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k]\big) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot (x - x_{k-1})^2 \\ &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^3.\end{aligned}$$

Standardni oblik polinoma p_k

Uspoređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije od $(x - x_{k-1})$, dobivamo

$$\begin{aligned}
c_{0,k} &= p_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, \\
c_{1,k} &= p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1}, \\
c_{2,k} &= \frac{p_k''(x_{k-1})}{2} = f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k\, f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k], \\
c_{3,k} &= \frac{p_k'''(x_{k-1})}{6} = f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k].
\end{aligned}$$

Promotrimo li posljednje dvije relacije, vidimo da se isplati

- prvo izračunati koeficijent $c_{3,k}$,
- a zatim ga upotrijebiti za računanje $c_{2,k}$.

Standardni oblik polinoma p_k

Na kraju, dobivamo sljedeće relacije

- za koeficijente $c_{i,k}$ u standardnom zapisu polinoma p_k,

napisane redom kako se računaju iz zadanih podataka:

$$
\begin{aligned}
c_{0,k} &= f_{k-1}, \\
c_{1,k} &= s_{k-1}, \\
c_{3,k} &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}, \\
c_{2,k} &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} - h_k c_{3,k}.
\end{aligned}
$$

za $k = 1, \ldots, n$.

Po dijelovima kubična interpolacija — komentar

Drugim riječima, ako znamo s_k, onda

- nije problem naći koeficijente po dijelovima kubične interpolacije.

Ostaje nam samo pokazati kako bismo mogli birati brojeve s_k.

Tu postoje dva bitno različita načina.

- s_k su prave vrijednosti derivacije funkcije f u čvorovima, ako ih znamo, tj. $s_k = f'(x_k)$.
- s_k su neke aproksimacije za $f'(x_k)$. Takve aproksimacije možemo lako naći iz nekih dodatnih zahtjeva koje treba zadovoljiti aproksimacijska funkcija φ.

Zato nema smisla proizvoljno zadati s_k, ili tražiti samo neprekidnost φ' u čvorovima, jer daju lošu aproksimaciju za f.

Po dijelovima polinomna interpolacija

- Po dijelovima kubična interpolacija
- Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija
- Kubična splajn interpolacija
- Po dijelovima parabolička interpolacija
- Usporedba raznih vrsta interpolacije

Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

Vrijednosti s_k možemo izabrati tako da su one baš jednake derivaciji zadane funkcije u odgovarajućoj točki, tj. da vrijedi

$$s_k = f'(x_k).$$

U tom slučaju, svaki kubični polinom p_k je

- određen lokalno — iz podataka na svom podintervalu, tj. ne ovisi o drugim kubičnim polinomima.
- Razlog = na rubovima su zadane 2 funkcijske vrijednosti i 2 vrijednosti derivacija.

Takva se interpolacija zove po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija.

Naziv "Hermiteova" znači: $s_k = f'_k$ su zadani ulazni podaci.

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Neka je funkcija $f \in C^4[a,b]$. Za svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$, ocjena lokalne greške za Hermiteovu kubičnu interpolaciju p_k je

$$|f(x) - p_k(x)| \leq |\omega_k(x)| \, \frac{M_4^{(k)}}{4!},$$

pri čemu je

$$\omega_k(x) = (x - x_{k-1})^2 (x - x_k)^2, \quad M_4^{(k)} = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f^{(4)}(x)|.$$

Uočite da je ovdje ω_k jednak kvadratu polinoma čvorova ω_k^{lin} za po dijelovima linearnu interpolaciju na istoj mreži.

Za svaki x vrijedi $\omega_k(x) \geq 0$, pa je $|\omega_k| = \omega_k$. Ostaje samo još pronaći maksimum funkcije ω_k na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$.

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Dovoljno je naći sve lokalne ekstreme funkcije ω_k u otvorenom intervalu, jer je na rubovima vrijednost jednaka 0.

Deriviranjem izlazi da se ekstrem (i to lokalni maksimum) opet dostiže u polovištu $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$.

Vrijednost ω_k u točki x_e je kvadrat vrijednosti $\omega_k^{\mathrm{lin}}(x_e)$ za po dijelovima linearnu interpolaciju na istoj mreži čvorova

$$\omega_k(x_e) = (x_e - x_{k-1})^2 (x_e - x_k)^2 = \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16} = \frac{h_k^4}{16}.$$

Iz $|\omega_k| = \omega_k$ slijedi da je x_e točka lokalnog maksimuma za $|\omega_k|$ i

$$|\omega_k(x)| \leq |\omega_k(x_e)| = \frac{h_k^4}{16}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Kao i prije, neka je h maksimalni razmak susjednih čvorova

$$h = \max_{k=1,\ldots,n} \{h_k = x_k - x_{k-1}\}.$$

Onda, na čitavom intervalu $[a, b]$, možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{16} \cdot \frac{M_4}{4!} = \frac{1}{384}\, h^4 M_4,$$

pri čemu je

$$M_4 = \max_{k=1,\ldots,n} \{M_4^{(k)}\} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Drugim riječima, ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da $h \to 0$, onda i maksimalna greška teži u 0, tj. dobivamo uniformnu konvergenciju. To vrijedi i za derivacije!

Greška po dijelovima kubične Hermiteove interp.

Neka je $f \in C^1[a, b]$ i pretpostavimo da

- f ima ograničenu i integrabilnu četvrtu derivaciju na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$.

Tada je

$$\begin{aligned}
\|f(x) - \varphi(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{384}\, h^4\, \|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f'(x) - \varphi'(x)\|_\infty &\leq \frac{\sqrt{3}}{216}\, h^3\, \|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f''(x) - \varphi''(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{12}\, h^2\, \|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f'''(x) - \varphi'''(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{2}\, h\, \|f^{(4)}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Primjer — po dij. kubična Hermiteova interp.

Primjer. Nađite po dijelovima kubičnu Hermiteovu interpolaciju za sljedeće podatke

x_k	0	1	2
f_k	1	2	0
f'_k	0	1	1

.

Očito, treba naći dva kubična polinoma

- p_1 na intervalu $[0, 1]$,
- p_2 na intervalu $[1, 2]$.

Oba polinoma pišemo u standardnom obliku — oko početne točke odgovarajućeg intervala.

Primjer — po dij. kubična Hermiteova interp.

Za polinom p_1 imamo sljedeću tablicu podijeljenih razlika

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$f[t_j, \ldots, t_{j+3}]$
0	1			
		0		
0	1		1	
		1		-1
1	2		0	
		1		
1	2			

Iz nje dobivamo

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 1 + 0(x-0) + (x-0)^2 - (x-0)^2(x-1) \\ &= 1 + (1+1)(x-0)^2 - 1(x-0)^3 \\ &= 1 + 2x^2 - x^3. \end{aligned}$$

Primjer — po dij. kubična Hermiteova interp.

Na sličan način, za p_2 dobivamo tablicu podijeljenih razlika

$$
\begin{array}{c|cccc}
t_j & f[t_j] & f[t_j, t_{j+1}] & f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}] & f[t_j, \ldots, t_{j+3}] \\
\hline
1 & 2 & & & \\
 & & 1 & & \\
1 & 2 & & -3 & \\
 & & -2 & & 6 \\
2 & 0 & & 3 & \\
 & & 1 & & \\
2 & 0 & & &
\end{array}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= 2 + (x-1) - 3(x-1)^2 + 6(x-1)^2(x-2) \\
&= 2 + (x-1) + (-3-6)(x-1)^2 + 6(x-1)^3 \\
&= 2 + (x-1) - 9(x-1)^2 + 6(x-1)^3.
\end{aligned}
$$

Demo — po dij. kubična Hermiteova interp.

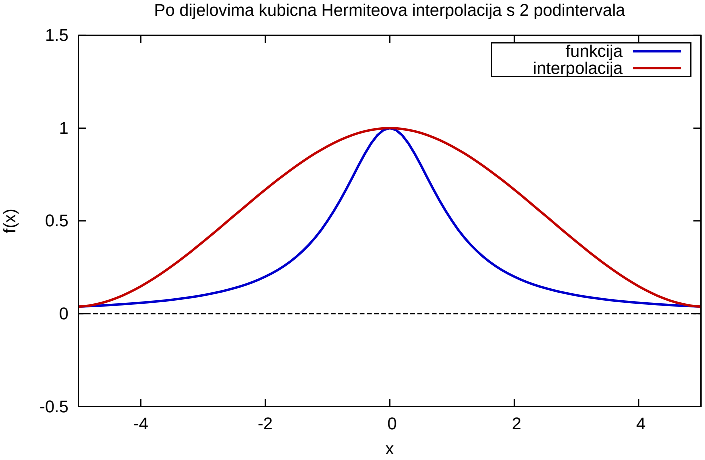
Pokazat ćemo kako izgleda po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija na primjeru funkcije Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [-5, 5],$$

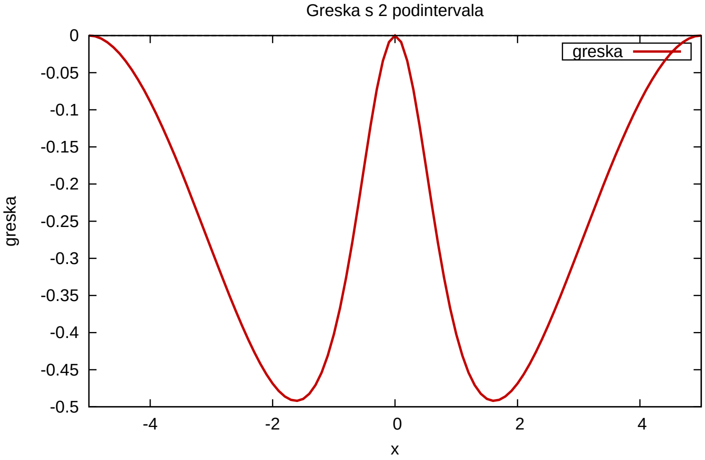
na ekvidistantnim mrežama s parnim brojem podintervala.

Slike interpolacija i grešaka su na sljedećim stranicama.

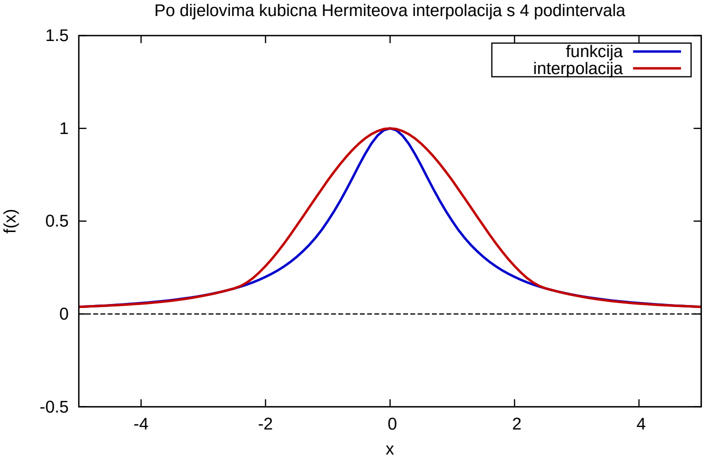
Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



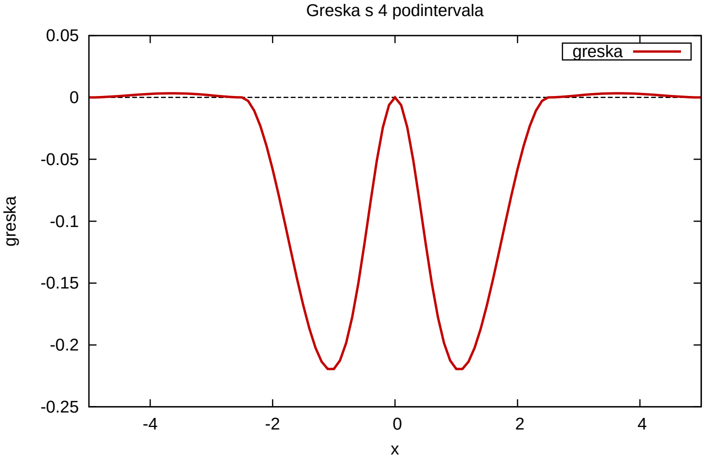
Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



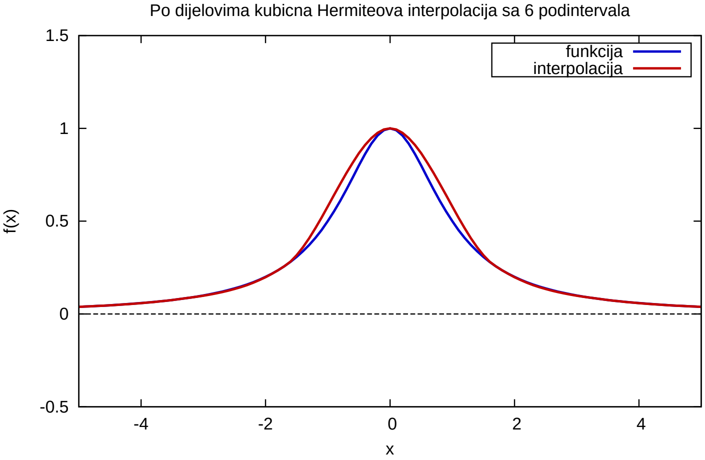
Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



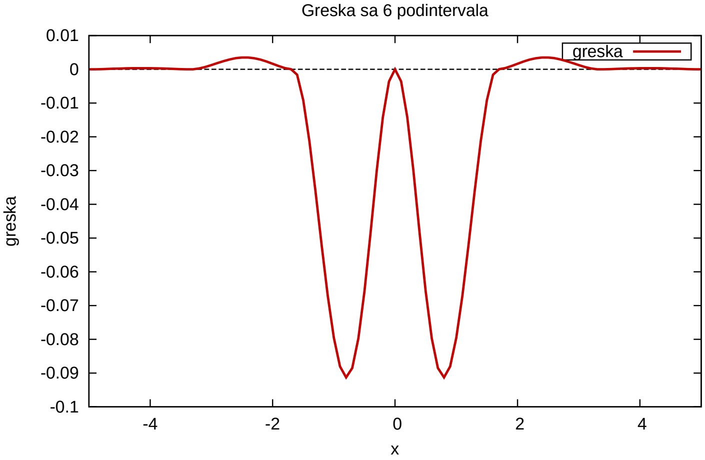
Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



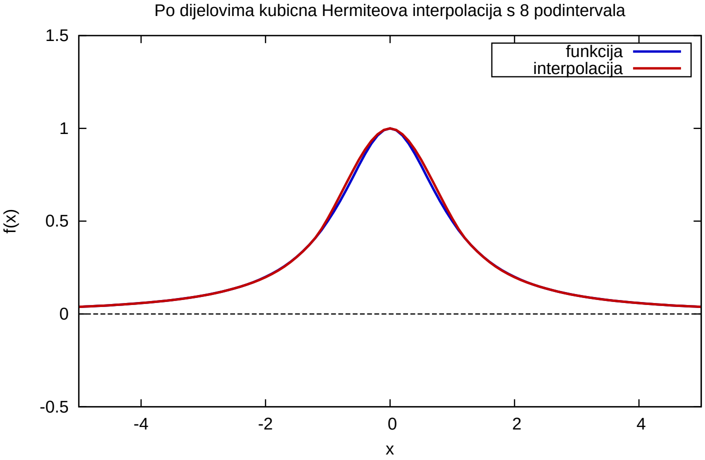
Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



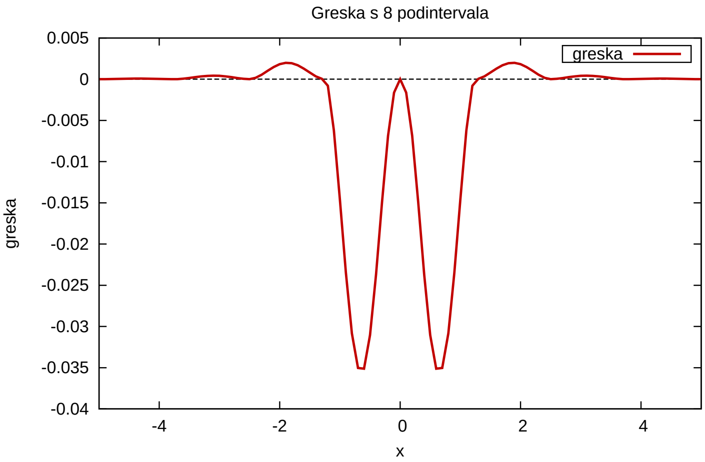
Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



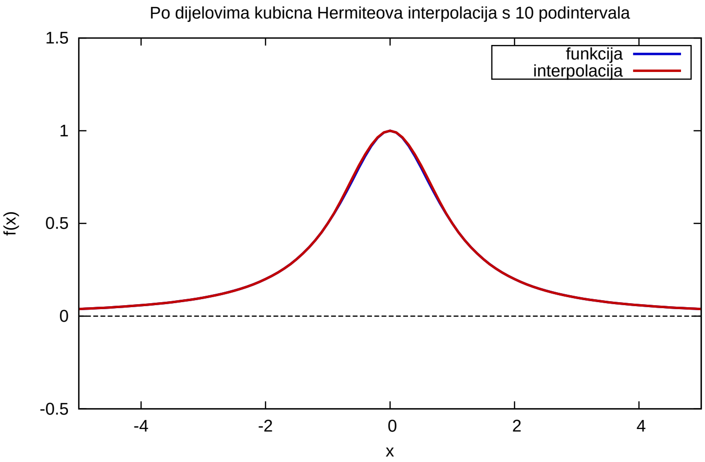
Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



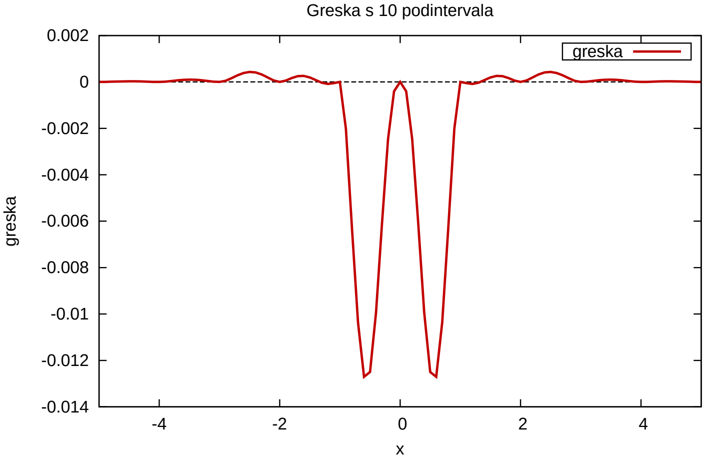
Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



Po dij. kubična Hermiteova interp. — Runge



Po dijelovima polinomna interpolacija

- Po dijelovima kubična interpolacija
- Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija
- Kubična splajn interpolacija
- Po dijelovima parabolička interpolacija
- Usporedba raznih vrsta interpolacije

Kubična splajn interpolacija

Brojeve $s_0, \ldots, s_n$ možemo odrediti i iz zahtjeva da funkcija φ

- ima neprekidnu drugu derivaciju u unutarnjim čvorovima mreže $x_1, \ldots x_{n-1}$, tj. da je φ klase $C^2[a, b]$.

Takva se interpolacija zove kubična splajn interpolacija.

Iz tih uvjeta ne možemo jednoznačno izračunati splajn φ, jer

- treba odrediti $4n$ koeficijenata kubičnih polinoma,
- a imamo $2n$ uvjeta interpolacije (svaki polinom mora interpolirati funkciju u rubnim točkama svog intervala),
- uvjeta ljepljenja prve derivacije u unutarnjim čvorovima ima $n-1$ (toliko je unutarnjih čvorova),
- i još imamo $n-1$ uvjeta ljepljenja druge derivacije.

Broj nepoznatih parametara i broj uvjeta

Zaključak. Ukupno imamo

- $4n - 2$ uvjeta interpolacije i neprekidnosti derivacija,
- a moramo odrediti $4n$ koeficijenata kubnih polinoma,
- pa vidimo da nedostaju 2 uvjeta, da bismo te koeficijente mogli jednoznačno odrediti.

Nastavak. Pogledajmo što možemo izvesti bez ta 2 uvjeta, a onda ćemo diskutirati kako njih možemo zadati.

Za početak, prva derivacija se lijepi u unutarnjim čvorovima, čim postavimo zahtjev interpolacije nagiba — da je

$$\varphi'(x_k) = s_k, \quad k = 1, \ldots, n - 1,$$

bez obzira na to što su brojevi s_k.

Ljepljenje druge derivacije

Ostaje još postaviti uvjete ljepljenja druge derivacije od φ u unutarnjim čvorovima. Zahtjev na pripadne polinome p_k je

$$p_k''(x_k) = p_{k+1}''(x_k), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Ako polinome p_k pišemo u formi relativno obzirom na početnu točku podintervala, tj. ako je

$$\begin{aligned} p_k(x) = c_{0,k} &+ c_{1,k}(x - x_{k-1}) \\ &+ c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3, \end{aligned}$$

onda je

$$\begin{aligned} p_k''(x) &= 2c_{2,k} + 6c_{3,k}(x - x_{k-1}), \\ p_{k+1}''(x) &= 2c_{2,k+1} + 6c_{3,k+1}(x - x_k). \end{aligned}$$

Ljepljenje druge derivacije

Uvrštavanjem x_k i dijeljenjem s 2 izlazi uvjet ljepljenja

$$c_{2,k} + 3c_{3,k}(x_k - x_{k-1}) = c_{2,k+1}.$$

Ostaje samo napisati koeficijente $c_{i,k}$ u terminima f_k i s_k.
Ponovimo, za kubični polinom s 2 dvostruka čvora, imali smo

$$\begin{aligned} c_{3,k} &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}, \\ c_{2,k} &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} - h_k c_{3,k} \\ &= \frac{3f[x_{k-1}, x_k] - 2s_{k-1} - s_k}{h_k}. \end{aligned}$$

Ove dvije relacije uvrstimo u uvjet ljepljenja druge derivacije.

Linearni sustav za kubičnu splajn interpolaciju

Sređivanjem lijeve strane izlazi

$$\frac{-3f[x_{k-1}, x_k] + s_{k-1} + 2s_k}{h_k} = \frac{3f[x_k, x_{k+1}] - 2s_k - s_{k+1}}{h_{k+1}}.$$

Pomnožimo prethodnu relaciju s $h_k h_{k+1}$ i

- prebacimo sve s_k na lijevu stranu (oni su nepoznati),
- a članove koji nemaju s_k na desnu stranu (to je poznato).

Dobivamo da mora vrijediti

$$\begin{aligned} h_{k+1} s_{k-1} &+ 2(h_k + h_{k+1}) s_k + h_k s_{k+1} \\ &= 3(h_{k+1} f[x_{k-1}, x_k] + h_k f[x_k, x_{k+1}]), \end{aligned}$$

za $k = 1, \ldots, n-1$.

Linearni sustav za kubičnu splajn interpolaciju

Ovo je linearni sustav

- s $(n+1)$ nepoznanica i $(n-1)$ jednadžbi.

Ako zadamo nagibe s_0 i s_n, ostaje točno $n-1$ nepoznanica. Matrica tako dobivenog linearnog sustava je trodijagonalna

$$
\begin{bmatrix}
2(h_1+h_2) & h_1 & & & \\
h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} \\
 & & & h_n & 2(h_{n-1}+h_n)
\end{bmatrix}
$$

i strogo dijagonalno dominantna po recima, jer je

$$
2(h_k+h_{k+1}) > h_k + h_{k+1},
$$

pa je i regularna.

Rješenje linearnog sustava za splajn interpolaciju

Ovaj linearni sustav sigurno ima jedinstveno rješenje za "nagibe" $s_1, \ldots, s_{n-1}$.

Za rješavanje sustava možemo koristiti Gaussove eliminacije ili LU faktorizaciju bez pivotiranja — stabilno i vrlo brzo.

Algoritam. Za "opću" trodijagonalnu matricu A, reda n,

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & & & & \\ c_2 & d_2 & e_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & c_{n-1} & d_{n-1} & e_{n-1} \\ & & & c_n & d_n \end{bmatrix}.$$

pretpostavimo da postoji LU faktorizacija bez pivotiranja.

Rješenje linearnog sustava za splajn interpolaciju

Tada nije teško pokazati da su matrice L i U oblika

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ell_{n-1} & 1 & \\ & & & \ell_n & 1 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & e_1 & & & \\ & u_2 & e_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & e_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Matrice A i U imaju jednake dijagonale iznad glavne (e-ovi).

Rješenje linearnog sustava za splajn interpolaciju

Ostale elemente matrica L i U računamo sljedećim algoritmom

$$
\begin{aligned}
& u_1 = d_1, \\
& \text{za } i = 2, \ldots, n: \\
& \quad \ell_i = c_i / u_{i-1}, \\
& \quad u_i = d_i - \ell_i \, e_{i-1}.
\end{aligned}
$$

Složenost LU faktorizacije je samo $O(n)$. Isto vrijedi i za supstitucije unaprijed/unatrag, kod rješavanja sustava $Ax = b$.

Primijetite da, kod splajn interpolacije,

- nagibi s_k nisu nezavisni, nego ovise jedan o drugom.
- To znači da aproksimacija više nije lokalna, jer se promjenom jedne točke (x_k, f_k) mijenjaju svi polinomi.

Dva dodatna uvjeta — rubni uvjeti

Posljednje otvoreno pitanje je:

- Kako možemo izabrati (ili zadati) s_0 i s_n?

Naime, nedostaju još 2 uvjeta za jedinstvenost splajna!

- Oni se, najčešće, ne zadaju direktno.

Uobičajeno se zadaju tzv. rubni uvjeti na funkciju φ,

- iz kojih se onda određuju s_0 i s_n,
- ili dobivamo dvije dodatne jednadžbe, koje se dodaju ranijem linearnom sustavu za nagibe (tamo s_0 i s_n ostavimo na lijevoj strani, jer ih ne znamo).

Postoji nekoliko tradicionalnih načina zadavanja rubnih uvjeta, odnosno, jednadžbi koje nedostaju.

Potpuni (kompletni) splajn

(a) Potpuni (kompletni) splajn

Poznato:

- derivacija funkcije f u rubovima (recimo, kod rješavanja rubnih problema za običnu diferencijalnu jednadžbu).

Zadaje se:

$$s_0 = f'(x_0), \qquad s_n = f'(x_n).$$

Greška aproksimacije u funkcijskoj vrijednosti je $O(h^4)$.

- Rubni uvjeti su egzaktni — iz funkcije f, odnosno, iz f', pa nemaju nikakvu grešku aproksimacije.
- Greška dolazi samo od po dijelovima kubične interpolacije i ta je $O(h^4)$.

Zadana druga derivacija u rubovima

(b) Zadana druga derivacija u rubovima

Poznato:

- druga derivacija funkcije f u rubovima.

Zadaje se:

$$f''(x_0) = \varphi''(x_0) = p_1''(x_0), \qquad f''(x_n) = \varphi''(x_n) = p_n''(x_n).$$

Treba još izraziti

- $p_1''(x_0)$ preko s_0, s_1,
- $p_n''(x_n)$ preko s_{n-1} i s_n.

Zadana druga derivacija u rubovima — početak

Znamo da je

$$c_{2,1} = \frac{p_1''(x_0)}{2} = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Iz izraza za $c_{2,1}$ izlazi

$$\frac{3f[x_0, x_1] - 2s_0 - s_1}{h_1} = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Kad to sredimo, dobivamo

$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h_1}{2} f''(x_0).$$

Ovu jednadžbu treba dodati kao prvu u linearni sustav. Uočite da je pripadni redak strogo dijagonalno dominantan!

Zadana druga derivacija u rubovima — kraj

Slično, iz

$$p_n''(x_n) = 2c_{2,n} + 6c_{3,n}h_n,$$

uvrštavanjem izraza za $c_{2,n}$ i $c_{3,n}$, izlazi

$$s_{n-1} + 2s_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_n}{2} f''(x_n).$$

Tu jednadžbu dodajemo kao zadnju u linearni sustav i pripadni redak je opet strogo dijagonalno dominantan.

Dobiveni linearni sustav

- ima $n+1$-u jednadžbu i isto toliko nepoznanica,
- a matrica je regularna, pa ima jedinstveno rješenje.

Greška aproksimacije u funkcijskoj vrijednosti je $O(h^4)$.

Prirodni splajn

(c) Prirodni splajn

Poznato: tzv. slobodni krajevi (dolazi iz jednadžbe štapa),

$$\varphi''(x_0) = \varphi''(x_n) = 0.$$

Dodatne jednadžbe: isto kao u (b), samo se uvrsti $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$, pa dobijemo

$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0, x_1], \qquad s_{n-1} + 2s_n = 3f[x_{n-1}, x_n].$$

Greška aproksimacije:

- Ako f nema druge derivacije na rubu jednake 0, onda je greška u funkcijskoj vrijednosti samo $O(h^2)$.
- Ako ih ima, onda je greška $O(h^4)$ — kao u (b) slučaju.

Numerička aproksimacija derivacija u rubovima

(d) Numerička aproksimacija derivacija

Nepoznato: ponašanje derivacije funkcije f u rubovima.

Preostala dva parametra mogu se odrediti tako da

- numerički aproksimiramo φ', ili φ'', ili φ''', u rubovima.
- Kao aproksimaciju koristimo odgovarajuću derivaciju kubičnog interpolacijskog polinoma za f, koji prolazi točkama $x_0, \ldots, x_3$, odnosno, $x_{n-3}, \ldots, x_n$.

Greška aproksimacije je reda $O(h^4)$ u funkcijskoj vrijednosti, za bilo koju od ovih varijanti.

Lošija aproksimacija derivacija povećava grešku pri rubovima!

Not-a-knot (nije čvor) splajn

(e) Not-a-knot (nije čvor) splajn

Nepoznato: dvije "rubne" jednadžbe za splajn φ.

Umjesto neke aproksimacije (neke) derivacije od f u rubovima, koristimo tzv. "not-a-knot" (nije čvor) uvjet za splajn.

- Parametre s_0 i s_n biramo tako da su prva dva i posljednja dva kubična polinoma jednaka, tj. tako da je

$$p_1 = p_2, \qquad p_{n-1} = p_n.$$

To daje dodatne uvjete ljepljenja u čvorovima x_1 i x_{n-1}:

- u x_1 se zalijepi i treća derivacija polinoma p_1 i p_2,
- u x_{n-1} se zalijepi i treća derivacija polinoma p_{n-1} i p_n.

Not-a-knot (nije čvor) splajn — početak

Te zahtjeve možemo pisati kao

$$p_1'''(x_1) = p_2'''(x_1), \qquad p_{n-1}'''(x_{n-1}) = p_n'''(x_{n-1}).$$

Iz prve jednadžbe slijedi da su vodeći koeficijenti polinoma p_1 i p_2 jednaki,

$$c_{3,1} = c_{3,2}.$$

Uvjet ljepljenja druge derivacije u x_1 ima oblik (v. ranije)

$$c_{2,1} + 3c_{3,1}h_1 = c_{2,2}.$$

U formuli za $c_{2,2}$ iskoristimo da je $c_{3,2} = c_{3,1}$

$$c_{2,2} = \frac{f[x_1, x_2] - s_1}{h_2} - h_2 c_{3,2} = \frac{f[x_1, x_2] - s_1}{h_2} - h_2 c_{3,1}.$$

Not-a-knot (nije čvor) splajn — početak

U uvjet ljepljenja uvrstimo ovo i izraze za $c_{2,1}$, $c_{3,1}$. Dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{f[x_0, x_1] - s_0}{h_1} &+ 2\,\frac{s_1 + s_0 - 2f[x_0, x_1]}{h_1} \\ &= \frac{f[x_1, x_2] - s_1}{h_2} - h_2\,\frac{s_1 + s_0 - 2f[x_0, x_1]}{h_1^2}.\end{aligned}$$

Sređivanjem, izlazi prva jednadžba

$$\begin{aligned}h_2 s_0 &+ (h_1 + h_2) s_1 \\ &= \frac{(h_1 + 2(h_1 + h_2)) h_2\, f[x_0, x_1] + h_1^2\, f[x_1, x_2]}{h_1 + h_2}.\end{aligned}$$

Not-a-knot (nije čvor) splajn — kraj

Na sličan način dobivamo i zadnju jednadžbu

$$
\begin{aligned}
&(h_{n-1} + h_n)s_{n-1} + h_{n-1}s_n \\
&= \frac{(h_n + 2(h_{n-1} + h_n))h_{n-1}\, f[x_{n-1}, x_n] + h_n^2\, f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{h_{n-1} + h_n}.
\end{aligned}
$$

Greška aproksimacije za funkcijske vrijednosti je $O(h^4)$.

Porijeklo naziva "not-a-knot":

- kubični splajn uobičajeno ima neprekidne druge derivacije u unutarnjim čvorovima $x_1, \ldots, x_{n-1}$.
- Treća derivacija funkcije φ, općenito, "puca".
- Kod "not-a-knot" splajna, u x_1 i x_{n-1} ne puca treća derivacija, pa to nisu "pravi" čvorovi splajna.

Ostali rubni uvjeti

(f) Ostali rubni uvjeti

Svi dosad opisani načini zadavanja rubnih uvjeta "čuvaju"

- trodijagonalnu strukturu linearnog sustava za nepoznate parametre s_k.

Za aproksimaciju periodičkih funkcija (na intervalu koji odgovara periodu) zahtijeva se periodičnost prve i druge derivacije u rubovima

$$\varphi'(x_0) = \varphi'(x_n), \qquad \varphi''(x_0) = \varphi''(x_n),$$

što vodi na jednadžbe

$$p_1'(x_0) = p_n'(x_n), \qquad p_1''(x_0) = p_n''(x_n).$$

Dobiveni linearni sustav više nije trodijagonalan.

Greška kubične splajn interpolacije

Neka je $f \in C^2[a, b]$ i pretpostavimo da

- f ima ograničenu i integrabilnu četvrtu derivaciju na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$.

Tada je

$$\begin{aligned}
\|f(x) - \varphi(x)\|_\infty &\leq \frac{5}{384}\, h^4\, \|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f'(x) - \varphi'(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{24}\, h^3\, \|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f''(x) - \varphi''(x)\|_\infty &\leq \frac{3}{8}\, h^2\, \|f^{(4)}\|_\infty, \\
\|f'''(x) - \varphi'''(x)\|_\infty &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta} + \beta\right) h\, \|f^{(4)}\|_\infty,
\end{aligned}$$

gdje je $\beta := (\max_k h_k)/(\min_k h_k)$ mjera neuniformnosti mreže.

Greška kubičnog splajna i rubni uvjeti

Ove ocjene greške, naravno, vrijede samo uz pretpostavku

- da su i rubni uvjeti dovoljno točni,
- tj. i oni zadovoljavaju odgovarajuću ocjenu greške.

U protivnom, gubimo točnost pri rubovima.

Napomena.

- Dozvoljeno je kombinirati razne oblike rubnih uvjeta u jednom i drugom rubu.

Demo — Not-a-knot kubična splajn interp.

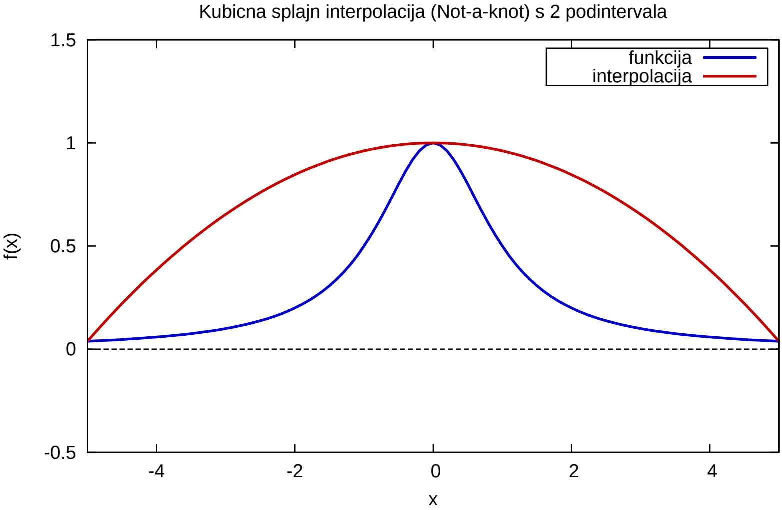
Pokazati kako izgleda Not-a-knot kubična splajn interpolacija na primjeru funkcije Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad x \in [-5, 5],$$

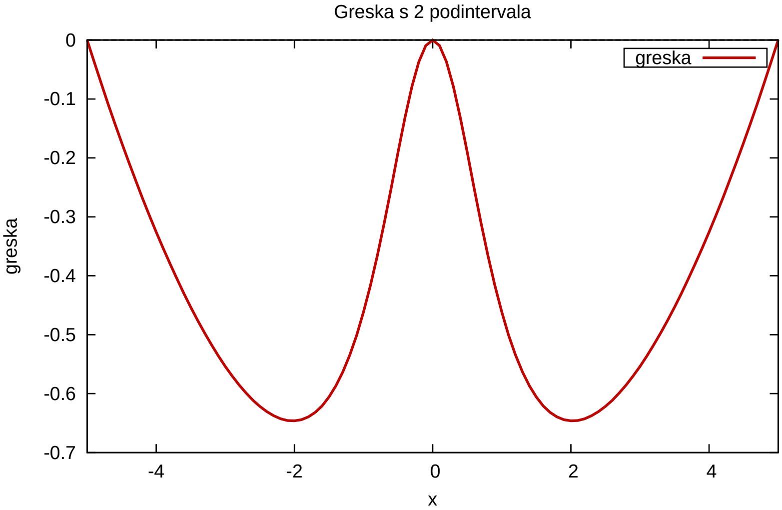
na ekvidistantnim mrežama s parnim brojem podintervala.

Slike interpolacija i grešaka su na sljedećim stranicama.

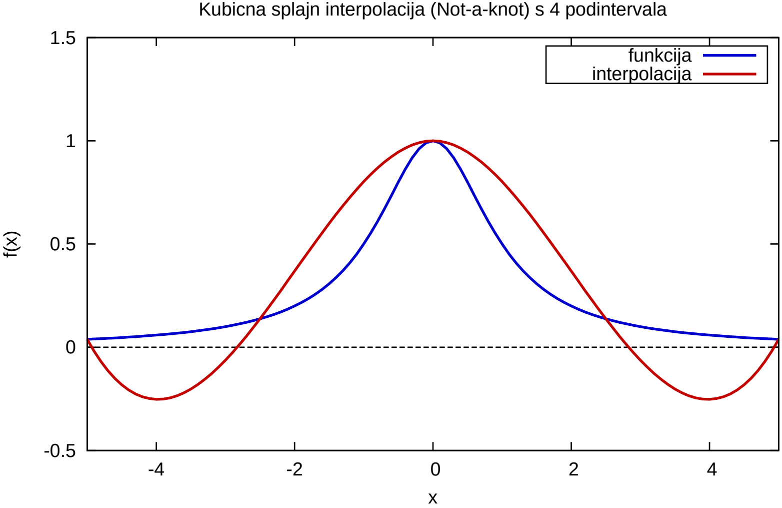
Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



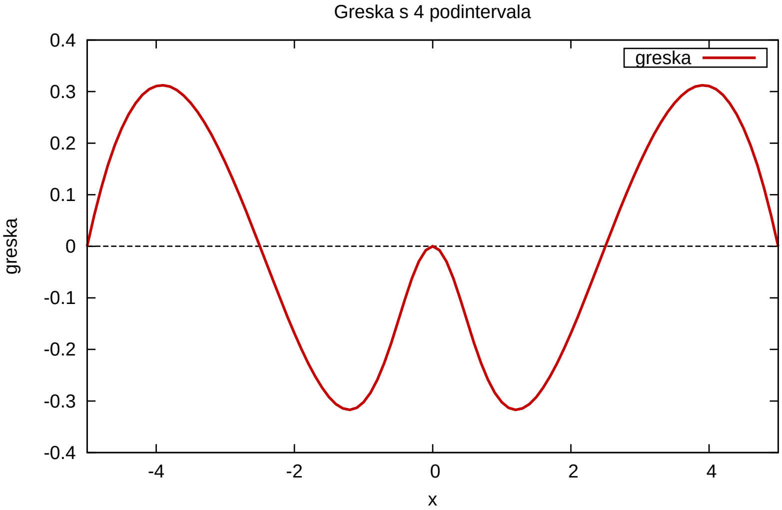
Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



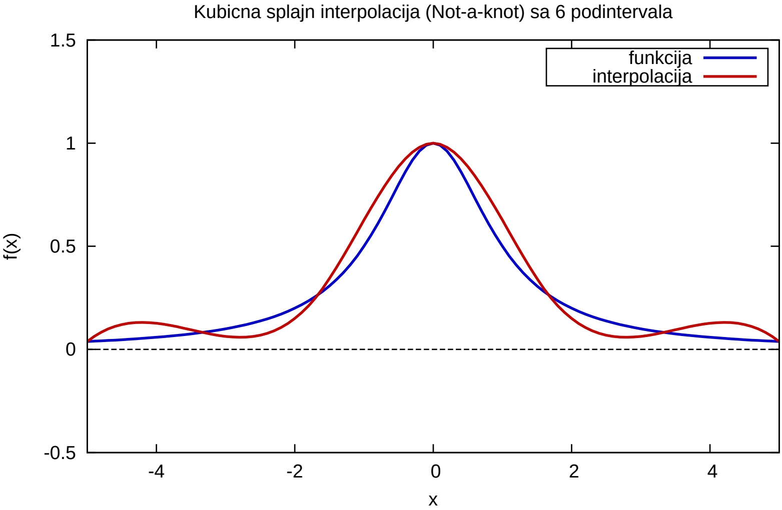
Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



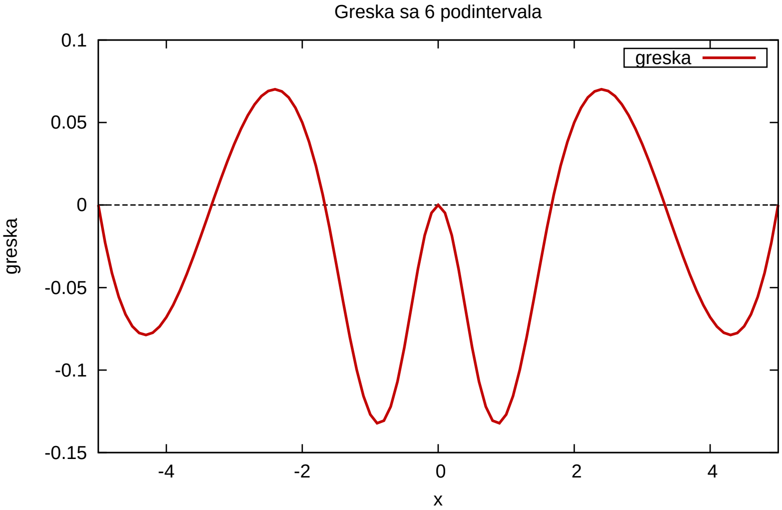
Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



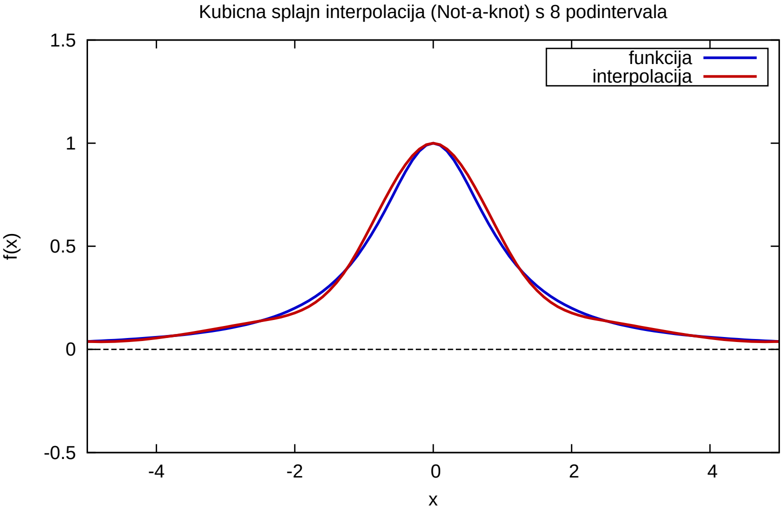
Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



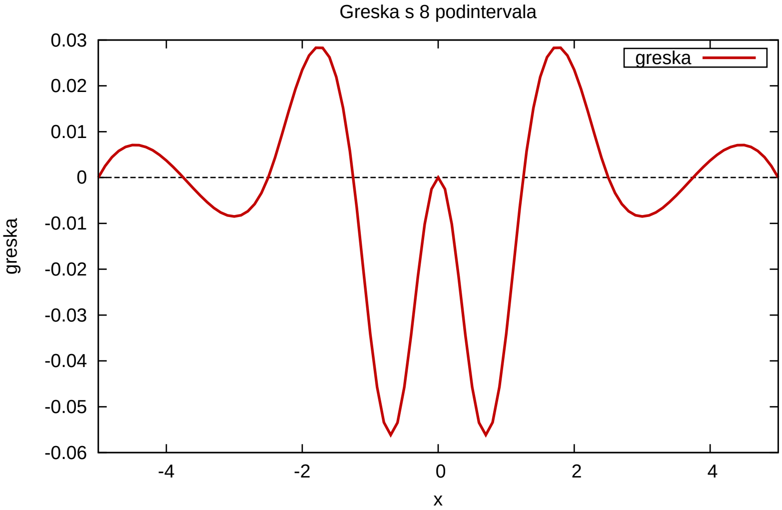
Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



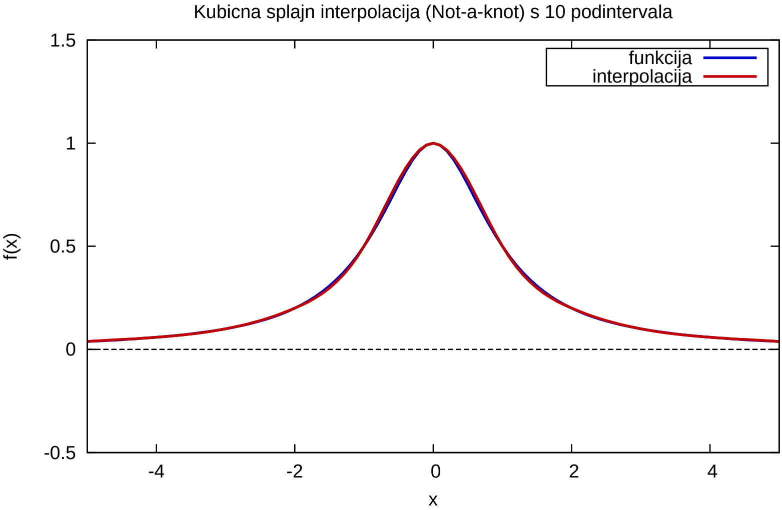
Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



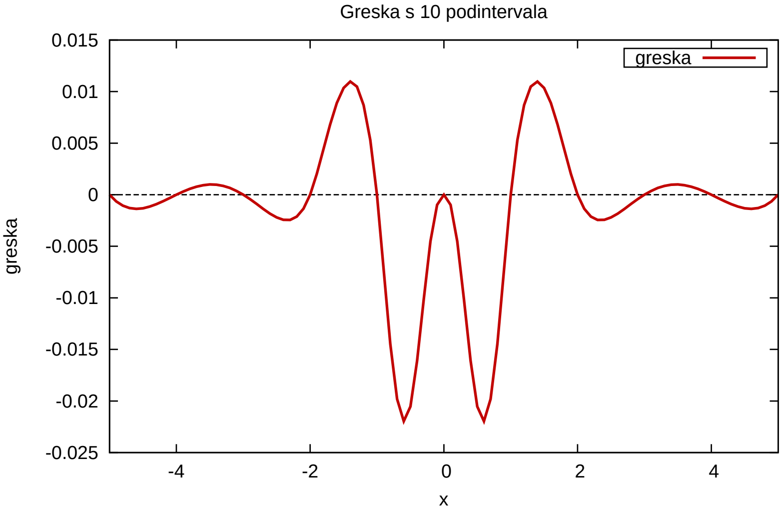
Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



Kubična splajn interp. (Not-a-knot) — Runge



Primjer — prirodni splajn

Primjer. Neka je

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

Nađite prirodni splajn koji aproksimira funkciju f na $[0, 1]$ s čvorovima interpolacije $x_k = 0.2 \cdot k$, za $k = 0, \ldots, 5$.

Izračunajte vrijednost tog splajna u točki 0.55.

Čvorovi su ekvidistantni s razmakom $h = 0.2$, pa “srednje” jednadžbe linearnog sustava za splajn glase

$$hs_{k-1} + 4hs_k + hs_{k+1} = 3(hf[x_{k-1}, x_k] + hf[x_k, x_{k+1}]),$$

za $k = 1, \ldots, 4$.

Za račun “na ruke” možemo skratiti h. Međutim, u programu koji računa rješenje ostaju polazne jednadžbe. Zato ne kratim.

Primjer — prirodni splajn

Dodatne jednadžbe (prva i zadnja) za prirodni splajn su

$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0, x_1], \qquad s_4 + 2s_5 = 3f[x_4, x_5].$$

Za desnu stranu sustava trebamo prve podijeljene razlike

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$
0.0	0.0000000000	
		2.9389262615
0.2	0.5877852523	
		1.8163563200
0.4	0.9510565163	
		0.0000000000
0.6	0.9510565163	
		−1.8163563200
0.8	0.5877852523	
		−2.9389262615
1.0	0.0000000000	

Primjer — prirodni splajn

Iz svih ovih podataka dobivamo linearni sustav za “nagibe” s_k

$$
\begin{bmatrix}
2.0 & 1.0 & & & & \\
0.2 & 0.8 & 0.2 & & & \\
 & 0.2 & 0.8 & 0.2 & & \\
 & & 0.2 & 0.8 & 0.2 & \\
 & & & 0.2 & 0.8 & 0.2 \\
 & & & & 1.0 & 2.0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 8.8167787844 \\ 2.8531695489 \\ 1.0898137920 \\ -1.0898137920 \\ -2.8531695489 \\ -8.8167787844 \end{bmatrix}
$$

Rješenje tog linearnog sustava (GE bez pivotiranja) je

$$
\begin{aligned}
s_0 &= -s_5 = 3.1387417029, \\
s_1 &= -s_4 = 2.5392953786, \\
s_2 &= -s_3 = 0.9699245271.
\end{aligned}
$$

Primjer — prirodni splajn

Zadana točka $x = 0.55$ nalazi se u intervalu $[x_2, x_3] = [0.4, 0.6]$. Restrikcija splajna φ na taj interval je kubični polinom p_3, kojeg nalazimo iz tablice podijeljenih razlika

t_k	$f[t_k]$	$f[t_k, t_{k+1}]$	$f[t_k, t_{k+1}, t_{k+2}]$	$f[t_k, \ldots, t_{k+3}]$
0.4	0.9510565163			
		0.9699245271		
0.4	0.9510565163		−4.8496226357	
		0.0000000000		0.0000000000
0.6	0.9510565163		−4.8496226357	
		−0.9699245271		
0.6	0.9510565163			

Odavde odmah slijedi da je p_3, zapravo, kvadratni polinom

$$\begin{aligned} p_3(x) = 0.9510565163 &+ 0.9699245271(x - 0.4) \\ &- 4.8496226357(x - 0.4)^2. \end{aligned}$$

Primjer — prirodni splajn

Pogledajmo još aproksimacije za funkciju, prvu i drugu derivaciju u točki 0.55.

	funkcija $j = 0$	prva derivacija $j = 1$	druga derivacija $j = 2$
$\varphi^{(j)}(0.55)$	0.9874286861	-0.4849622636	-9.6992452715
$f^{(j)}(0.55)$	0.9876883406	-0.4914533661	-9.7480931932
greška	0.0002596545	-0.0064911026	-0.0488479218

Aproksimacije su vrlo točne, iako je h relativno velik, jer funkcija $\sin(\pi x)$ zadovoljava prirodne rubne uvjete u 0 i 1.

Greška aproksimacije funkcije je reda veličine $O(h^4)$, prve derivacije $O(h^3)$, a druge derivacije $O(h^2)$.

Po dijelovima parabolička interpolacija

Ako stavimo $m = 2$, tj. na svakom podintervalu uzmemo kvadratni polinom, onda

- moramo naći $3n$ koeficijenata,
- a imamo $2n$ uvjeta interpolacije za funkcijske vrijednosti.

Zahtijevamo da aproksimacijska funkcija φ u unutarnjim čvorovima interpolacije $x_1, \ldots, x_{n-1}$ ima

- neprekidnu prvu derivaciju, pa smo dodali još $n - 1$ uvjet.
- dakle, treba nam još jedan uvjet!

Taj uvjet ne može se postaviti simetrično, ali se aproksimacija može naći.

Ovaj pristup se uobičajeno ne koristi, jer kontrolu derivacije možemo napraviti samo na jednom rubu.

Parabolički splajn — natuknice

Simetričnost, nalik na kubični splajn, dobivamo tako da

- čvorovi interpolacije x_k nisu rubne točke podintervala

za parabolički splajn, tj. imamo dvije mreže i razlikujemo

- čvorove splajna (t_k) od čvorova interpolacije (x_k).

Čvorove za splajn stavljamo između točaka podataka

$$x_0 < t_0 < x_1 < t_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < t_{n-1} < x_n,$$

a na rubovima možemo staviti $t_{-1} \leq x_0$ i $x_n \leq t_n$.

Tako dobivamo $n + 1$ kvadratnih polinoma p_k, na intervalima $[t_{k-1}, t_k]$, za $k = 0, \ldots, n$. Uvjeti interpolacije i ljepljenja funkcije i derivacije u unutarnjim čvorovima splajn mreže, ostavljaju točno dva rubna uvjeta u t_{-1} i t_n.

Dodatna literatura o splajnovima

Standardni izbor čvorova za splajn mrežu je u polovištima intervala između podataka,

$$t_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Na rubovima se uzima $t_{-1} = x_0$ i $t_n = x_n$, pa se zadaju rubni uvjeti na prvu derivaciju u x_0 i x_n.

Postoji cijela teorija splajn funkcija — ne samo polinomnih.

- Vektorski prostor, “lokalna” baza — B–splajnovi, itd.

Dodatna literatura:

- Carl de Boor,
  A Practical Guide to Splines (Revised Edition),
  Springer, New York, 2001.

Po dijelovima polinomna interpolacija

- Po dijelovima kubična interpolacija
- Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija
- Kubična splajn interpolacija
- Po dijelovima parabolička interpolacija
- Usporedba raznih vrsta interpolacije

Demo — Interpolacija izmjerenih podataka

Pokazati kako izgleda usporedba raznih vrsta interpolacije:

- interpolacija polinomima,
- Akimina po dijelovima kubična kvazihermiteova interpolacija:
  - koristi se aproksimacije derivacija,
  - usrednjava podijeljene razlike preko 5 susjednih čvorova,
  - s ciljem da se spriječe oscilacije interpolacijske funkcije φ:
- interpolacija Not-a-knot kubičnim splajnom,

na skupu izmjerenih podataka u praksi,

- s raznim izborima čvorova interpolacije.

Ovo je poznato "težak" primjer za interpolaciju!
Razlog: podaci naliče na arctg = integral funkcije Runge. Cijeli demo je na sljedećim stranicama.

Eksperimentalno izmjereni podaci — tablica

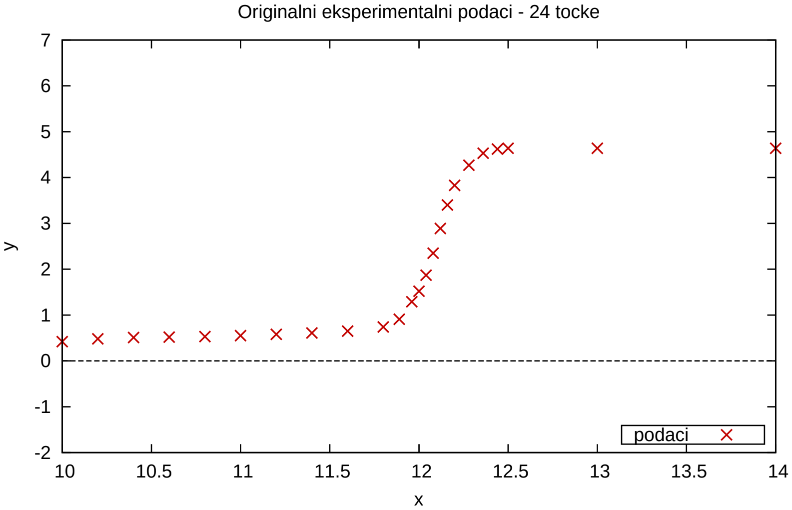
Originalni eksperimentalno izmjereni podaci su 24 točke:

k	x_k	y_k
1	10.00	0.42
2	10.20	0.48
3	10.40	0.51
4	10.60	0.52
5	10.80	0.53
6	11.00	0.55
7	11.20	0.58
8	11.40	0.61

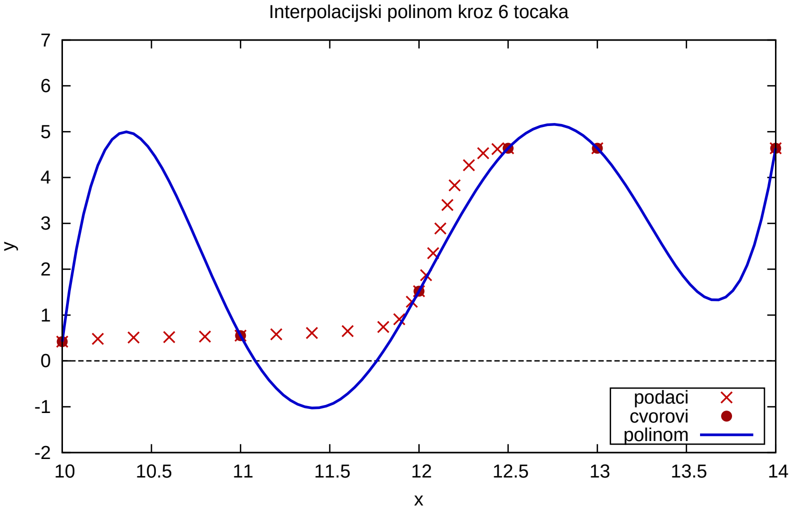
k	x_k	y_k
9	11.60	0.65
10	11.80	0.74
11	11.89	0.91
12	11.96	1.29
13	12.00	1.52
14	12.04	1.87
15	12.08	2.35
16	12.12	2.89

k	x_k	y_k
17	12.16	3.40
18	12.20	3.83
19	12.28	4.27
20	12.36	4.53
21	12.44	4.62
22	12.50	4.64
23	13.00	4.64
24	14.00	4.64

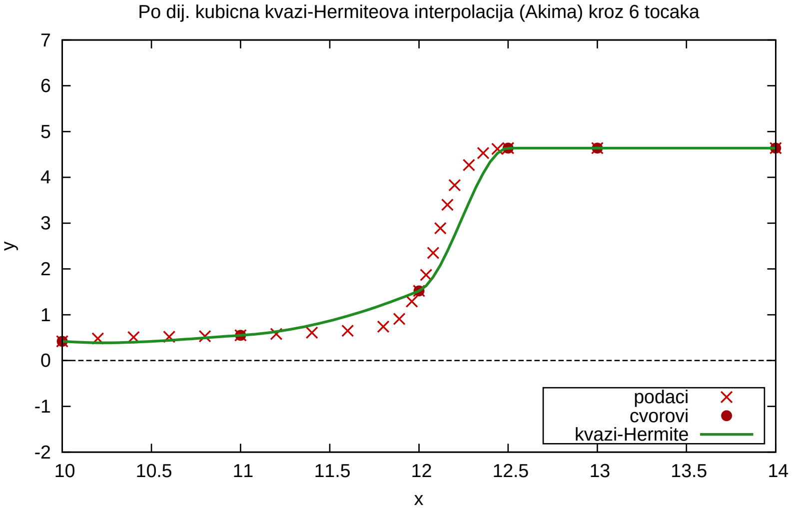
Eksperimentalno izmjereni podaci



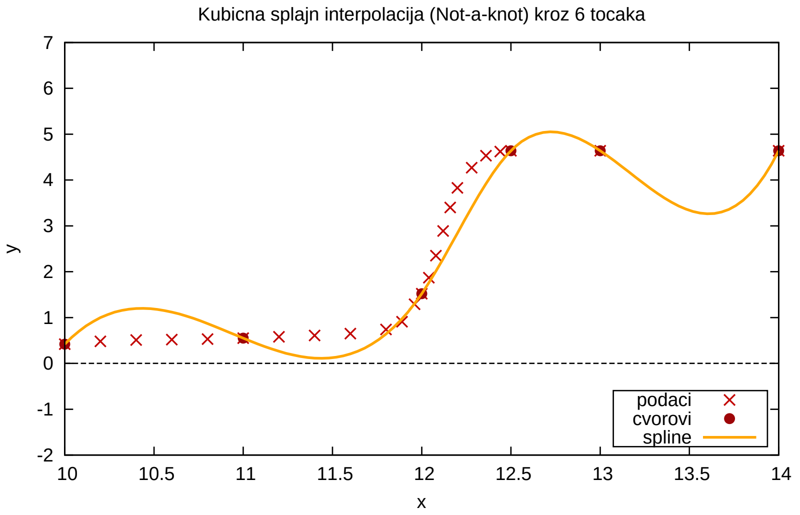
Polinom — 6 čvorova



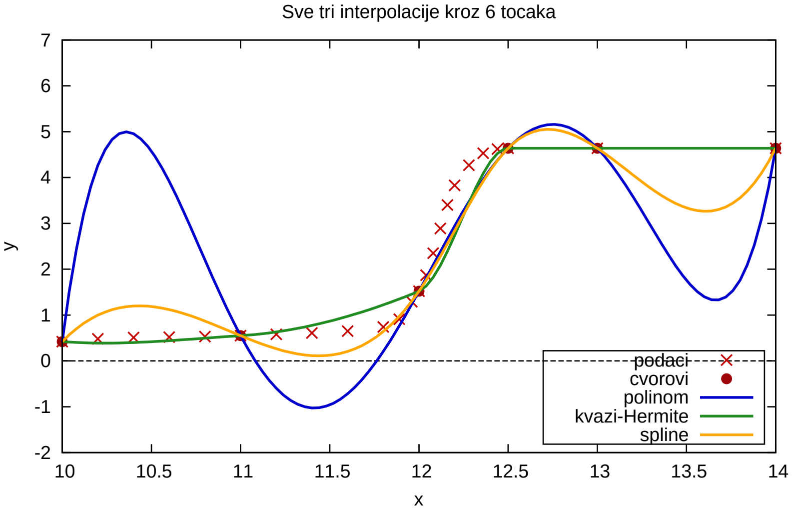
Akima — 6 čvorova



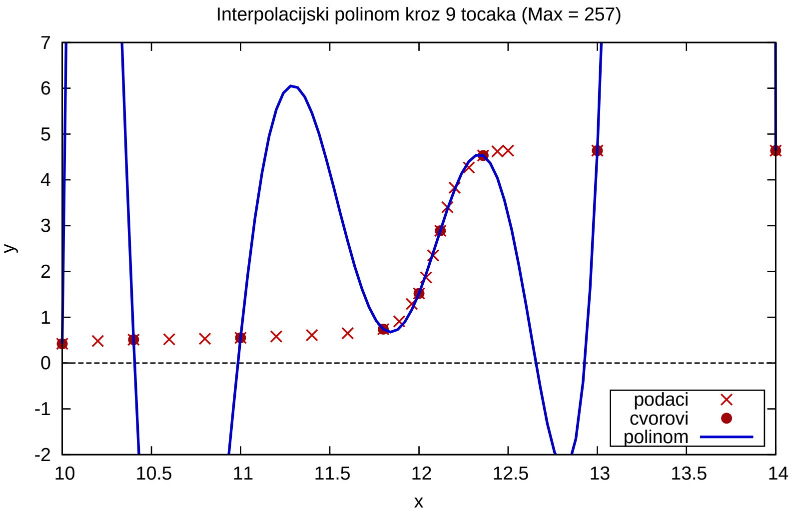
Kubični splajn — 6 čvorova



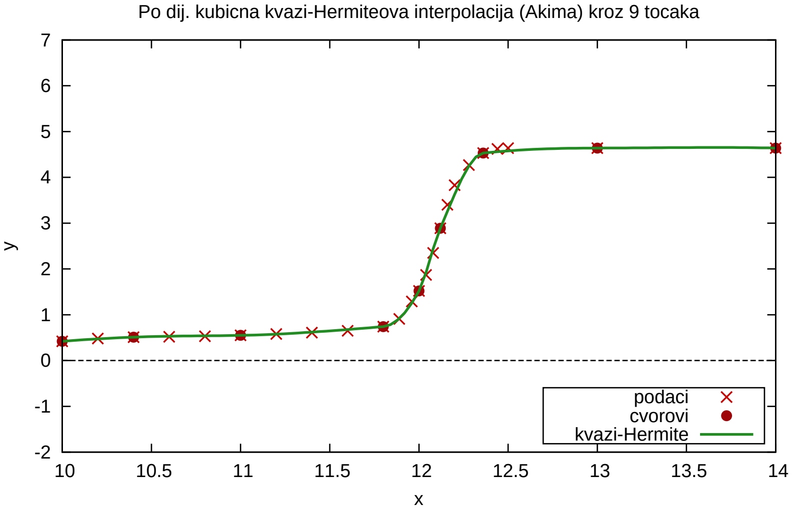
Sve tri interpolacije zajedno — 6 čvorova



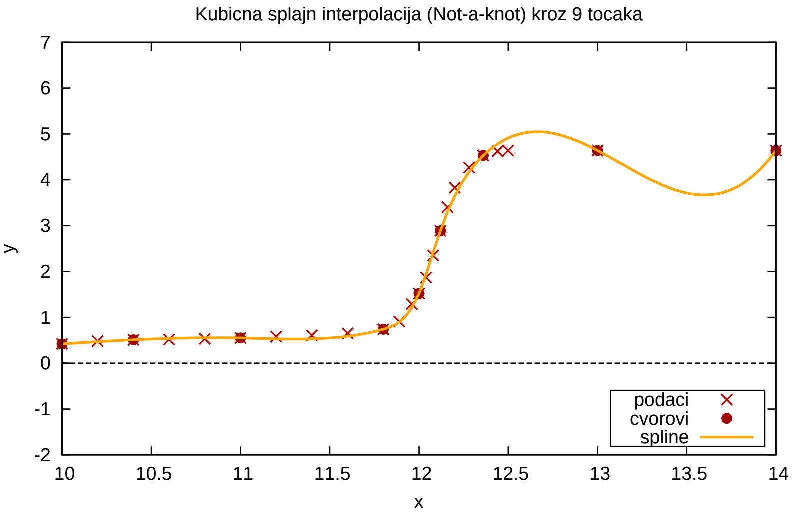
Polinom — 9 čvorova (lošije!)



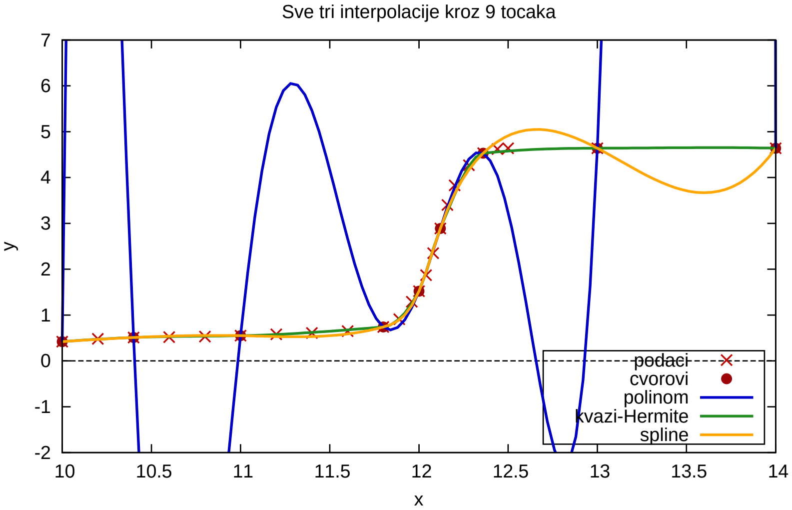
Akima — 9 čvorova



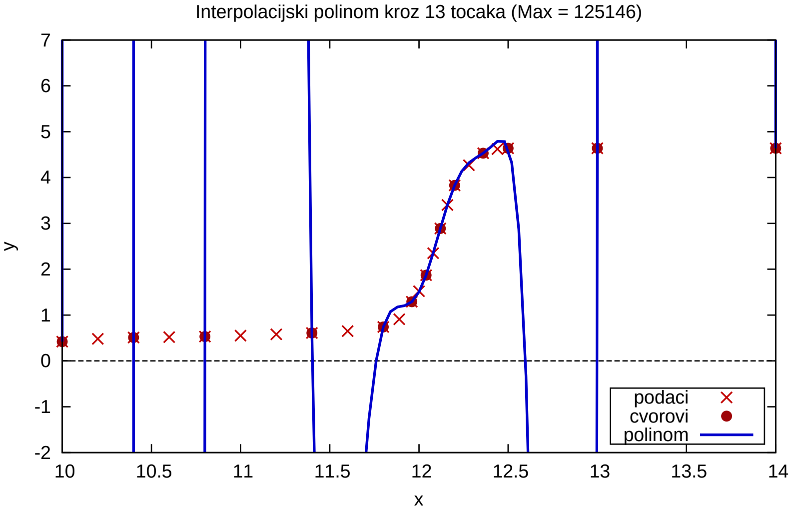
Kubični splajn — 9 čvorova



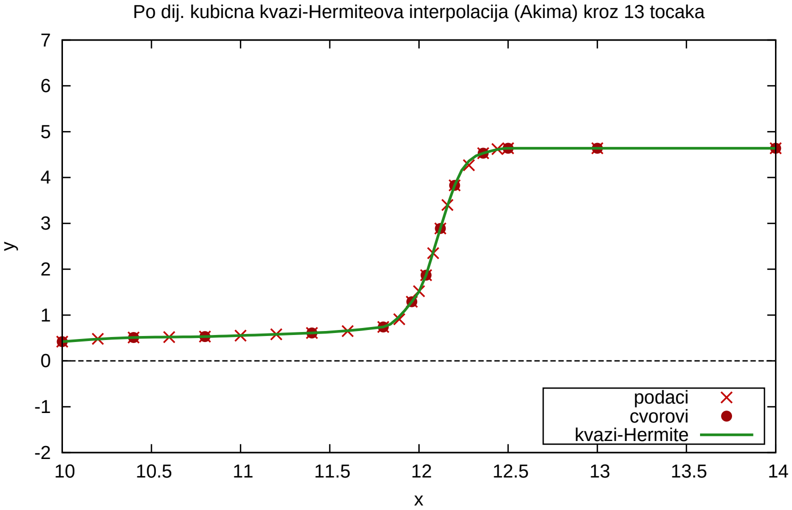
Sve tri interpolacije zajedno — 9 čvorova



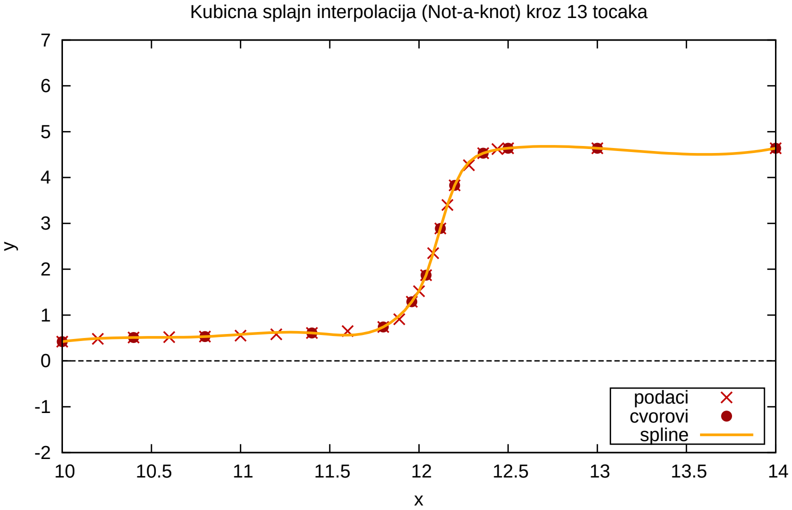
Polinom — 13 čvorova (još lošije!)



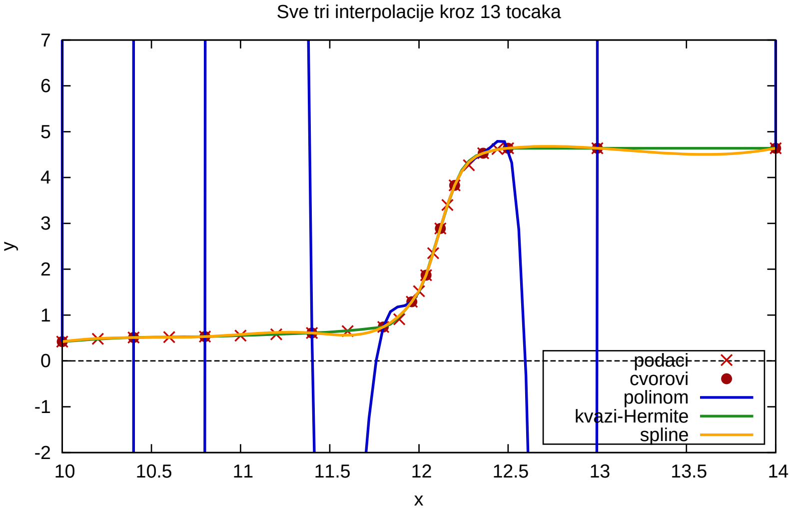
Akima — 13 čvorova



Kubični splajn — 13 čvorova



Sve tri interpolacije zajedno — 13 čvorova



Korekcija — dopuna izmjerenih podataka

Gdje je problem?

- Pred kraj podataka, na "ravnom" dijelu, imamo premalo izmjerenih točaka.
- Ponašanje y-vrijednosti je toliko očito, da se ne isplati raditi "gušća" mjerenja!

Međutim, za dobru aproksimaciju — tamo ipak fale podaci, koje bismo mogli uzeti kao točke za interpolaciju.

Kad je već tako "očito", nitko nam ne brani da tamo dodamo to što fali u originalnim mjerenjima.

- Zato, u okolini $x = 13$ — između 12.5 i 14, dodajemo još 6 točaka, sve s istom vrijednošću 4.64.

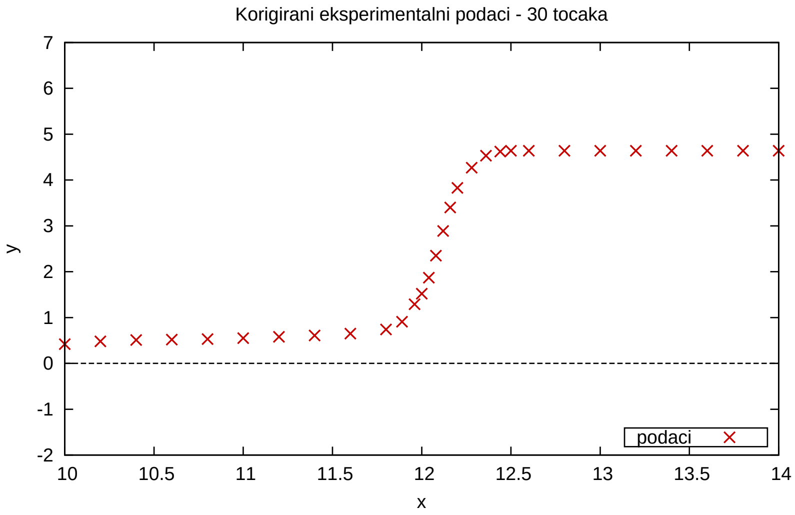
Tako dobivamo puno veći izbor čvorova za interpolaciju!

Korigirani izmjereni podaci — tablica

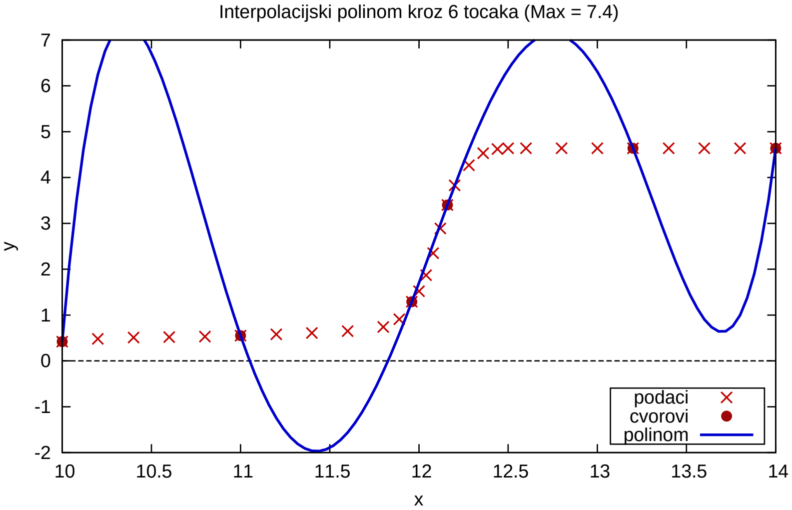
Korigirani eksperimentalno izmjereni podaci imaju 30 točaka:

k	x_k	y_k	k	x_k	y_k	k	x_k	y_k
1	10.00	0.42	11	11.89	0.91	21	12.44	4.62
2	10.20	0.48	12	11.96	1.29	22	12.50	4.64
3	10.40	0.51	13	12.00	1.52	23	12.60	4.64
4	10.60	0.52	14	12.04	1.87	24	12.80	4.64
5	10.80	0.53	15	12.08	2.35	25	13.00	4.64
6	11.00	0.55	16	12.12	2.89	26	13.20	4.64
7	11.20	0.58	17	12.16	3.40	27	13.40	4.64
8	11.40	0.61	18	12.20	3.83	28	13.60	4.64
9	11.60	0.65	19	12.28	4.27	29	13.80	4.64
10	11.80	0.74	20	12.36	4.53	30	14.00	4.64

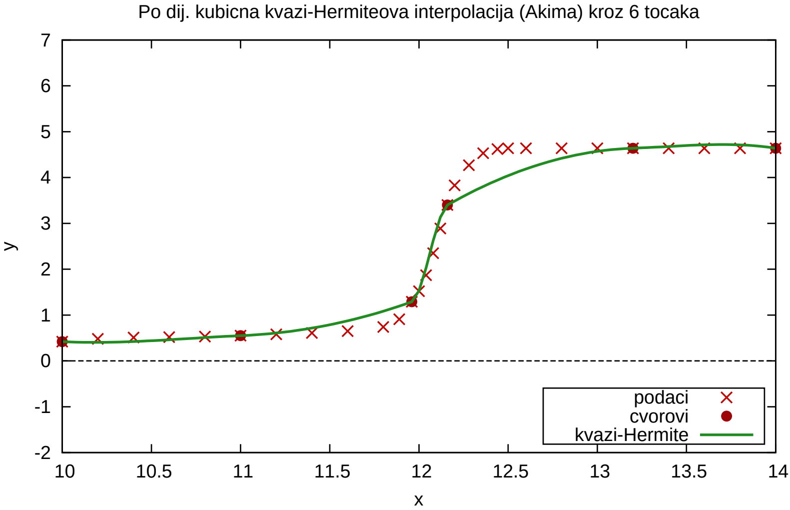
Korigirani (dopunjeni) izmjereni podaci



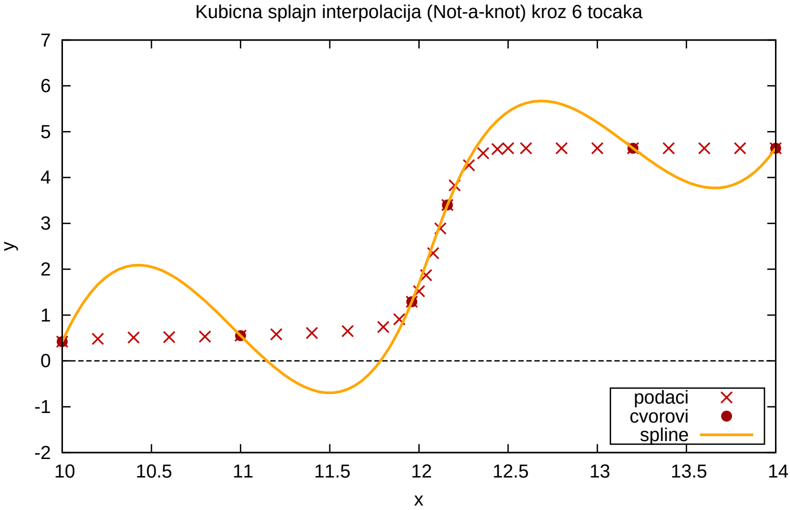
Polinom — 6 čvorova



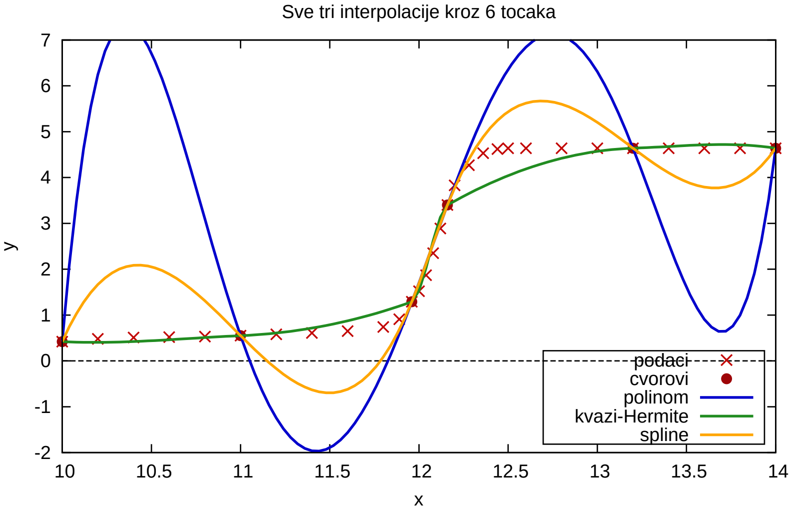
Akima — 6 čvorova



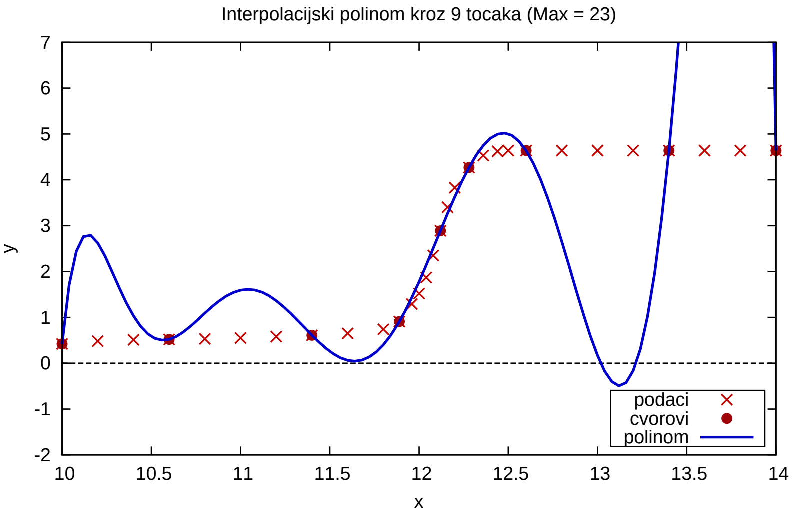
Kubični splajn — 6 čvorova



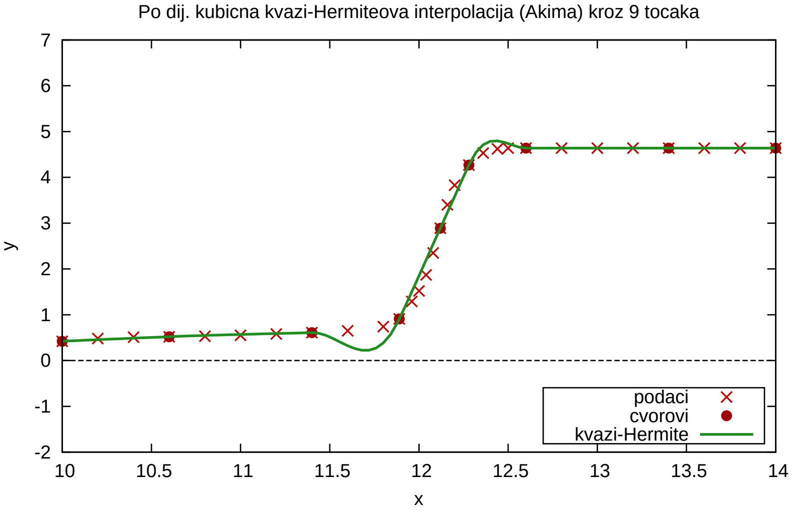
Sve tri interpolacije zajedno — 6 čvorova



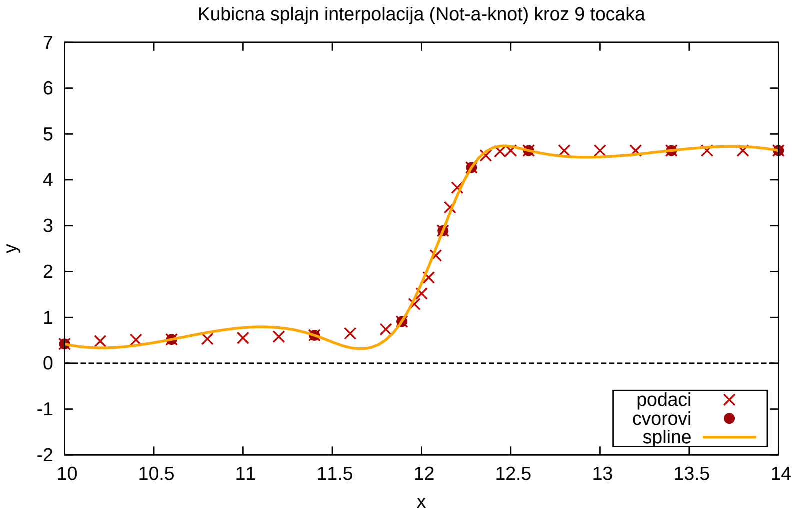
Polinom — 9 čvorova (lošije!)



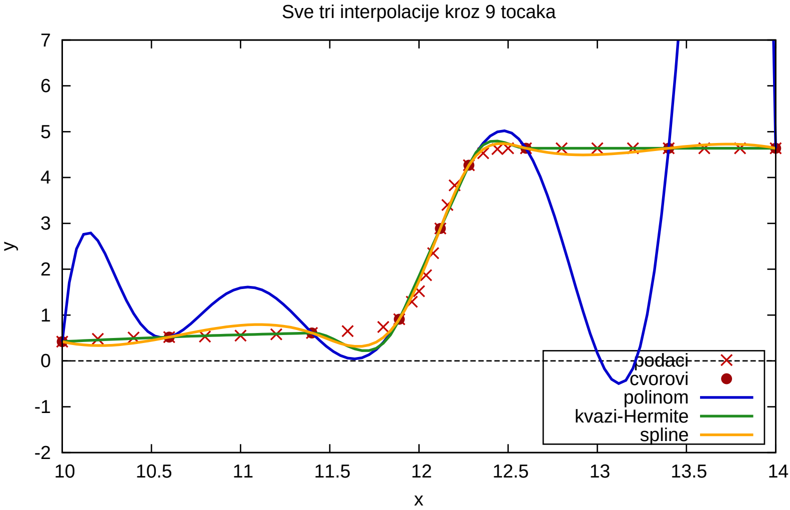
Akima — 9 čvorova



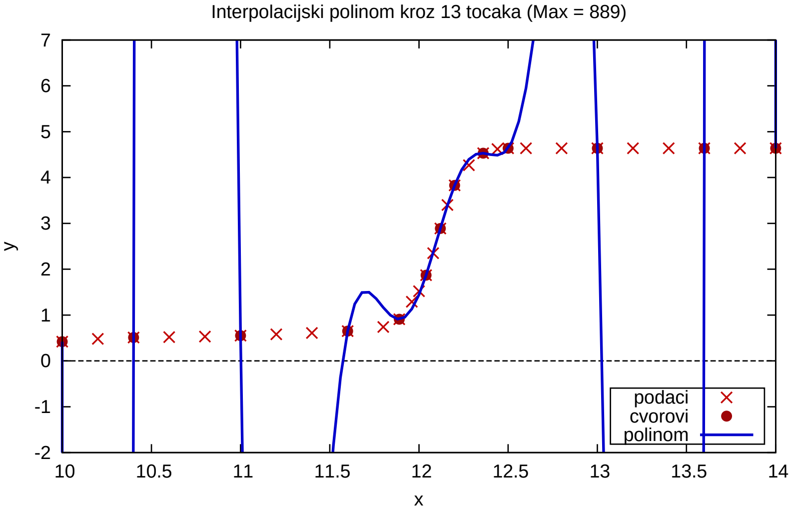
Kubični splajn — 9 čvorova



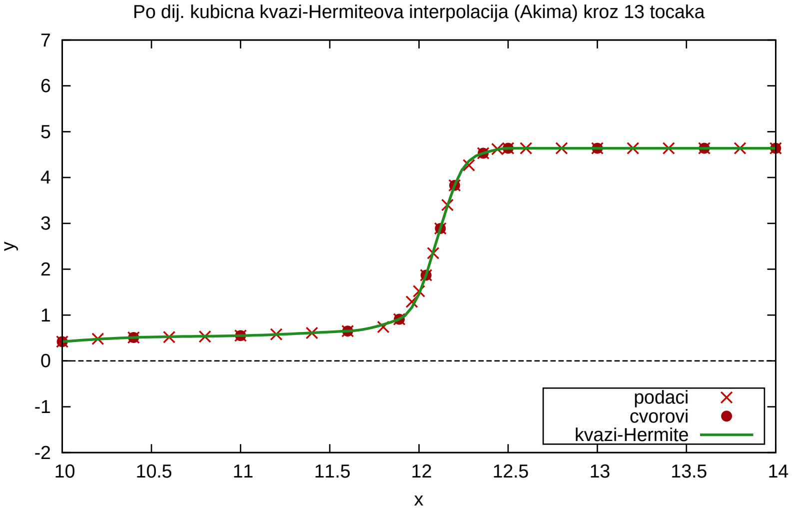
Sve tri interpolacije zajedno — 9 čvorova



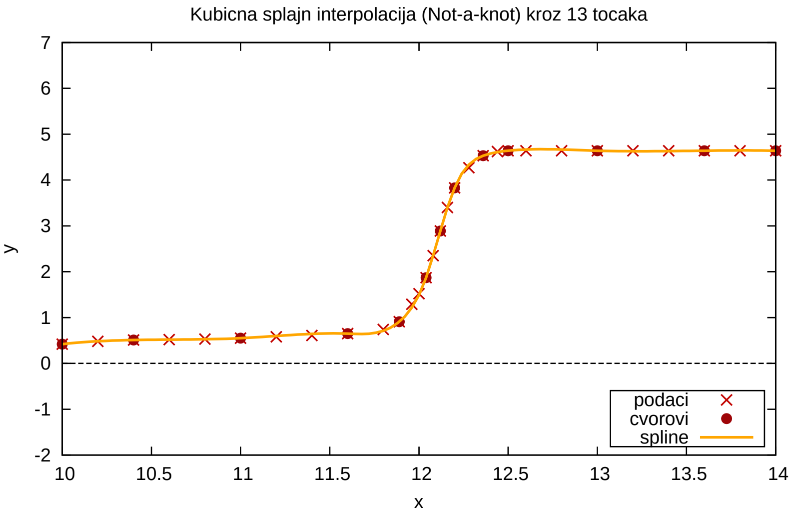
Polinom — 13 čvorova (još lošije!)



Akima — 13 čvorova



Kubični splajn — 13 čvorova



Sve tri interpolacije zajedno — 13 čvorova