Numerička matematika

5. predavanje

Saša Singer i Nela Bosner

PMF - Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

Koliko je dobar interpolacijski polinom?

U praksi se obično koriste

- interpolacijski polinomi niskih stupnjeva — do 5.

Zašto?

Za neke funkcije i za neke izbore točaka interpolacije, povećavanje stupnja interpolacijskog polinoma

- može dovesti do povećanja grešaka.

Promotrimo nekoliko karakterističnih primjera. Legenda:

- crna boja — funkcija f,
- crvena boja — interpolacijski polinom p_n.

Ekvidistantna mreža s $n + 1$ čvorova u intervalu $[a, b]$ ima čvorove $x_k^{(n)} = a + k \cdot h_n$, za $k = 0, \ldots, n$, uz $h_n = (b - a)/n$.

Primjer — logaritamska funkcija

Promotrimo grafove interpolacijskih polinoma stupnjeva 1–6 koji interpoliraju funkciju

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

na ekvidistantnoj mreži za $x \in [0.1, 10]$.

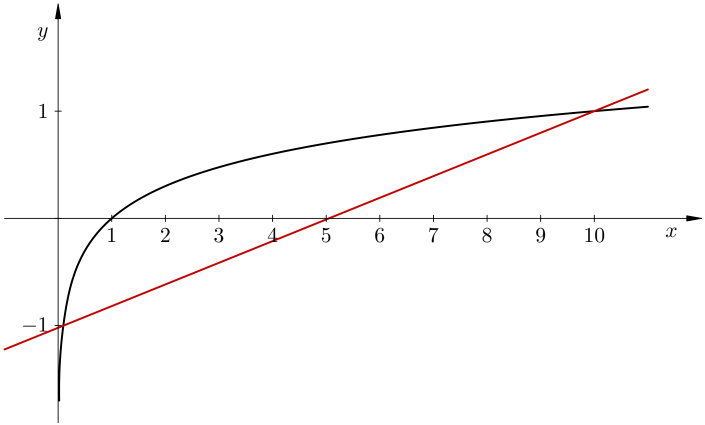
Primijetit ćete da je greška interpolacije

- najveća na prvom intervalu.

Razlog: funkcija $\log_{10}(x)$ ima singularitet u 0, a početna točka interpolacije 0.1 je vrlo blizu tog singulariteta.

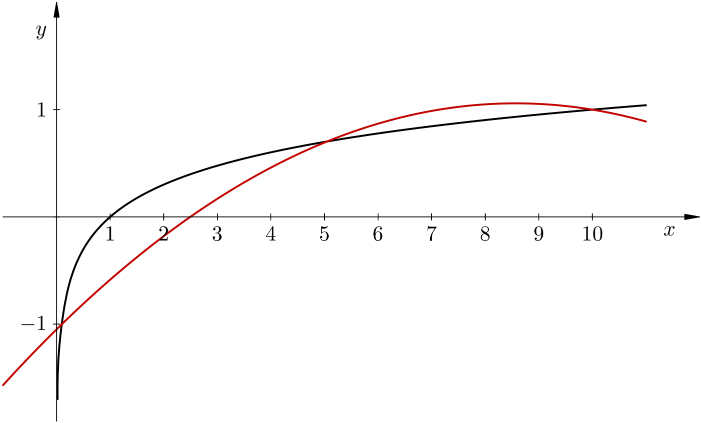
Nadalje, promotrite kako se interpolacijski polinom ponaša izvan intervala interpolacije (tzv. “ekstrapolacija”).

Logaritam — ekvidistantna mreža



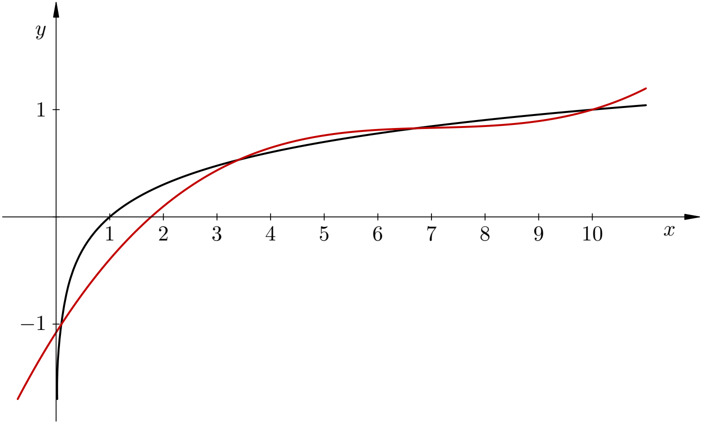
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Logaritam — ekvidistantna mreža



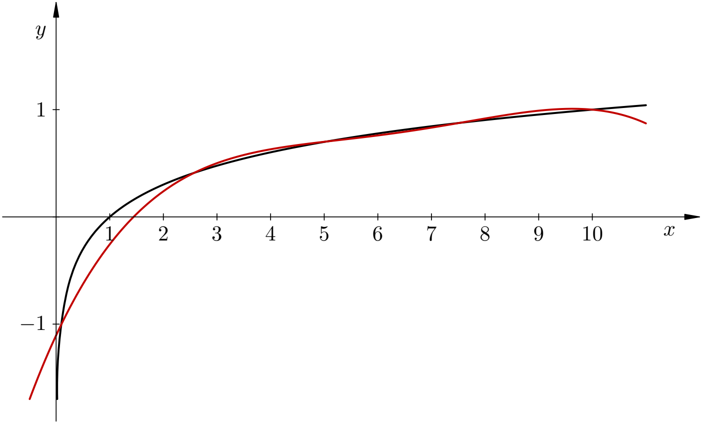
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Logaritam — ekvidistantna mreža



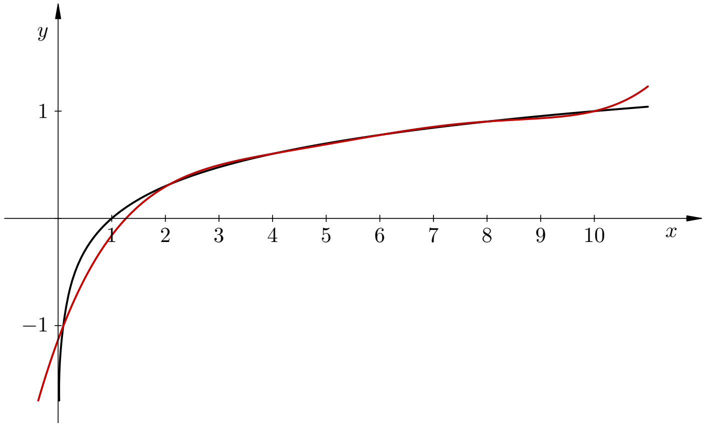
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Logaritam — ekvidistantna mreža



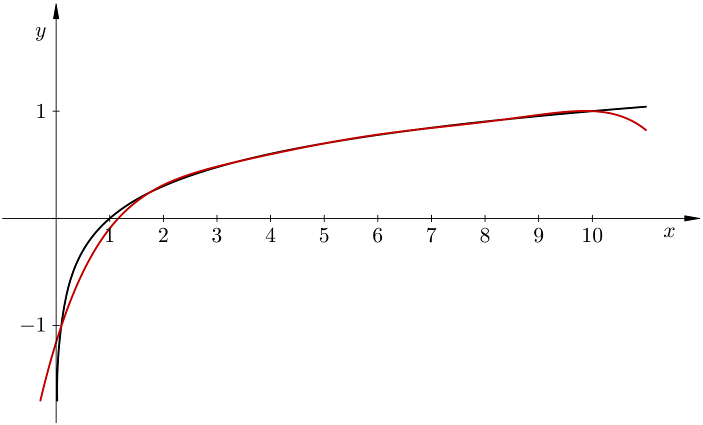
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Logaritam — ekvidistantna mreža



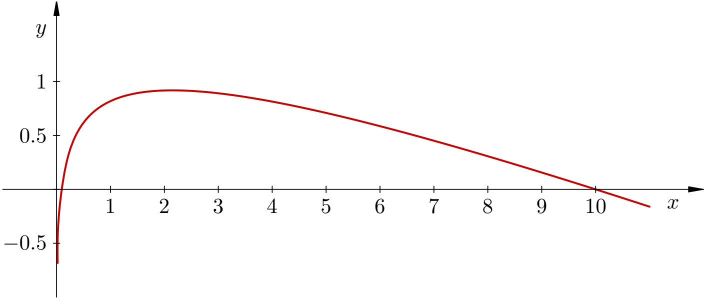
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Logaritam — ekvidistantna mreža



Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

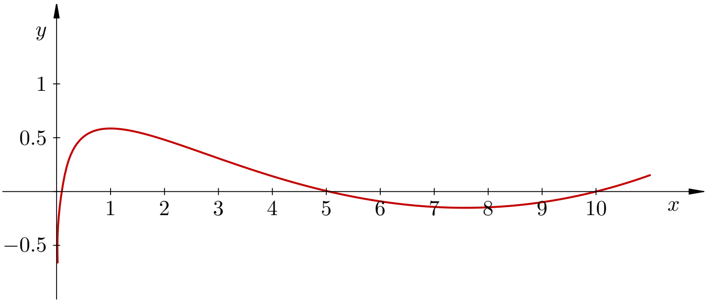
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Pratite skalu na y-osi.

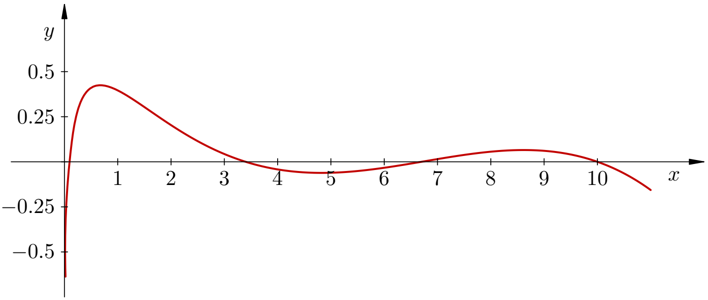
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Pratite skalu na y-osi.

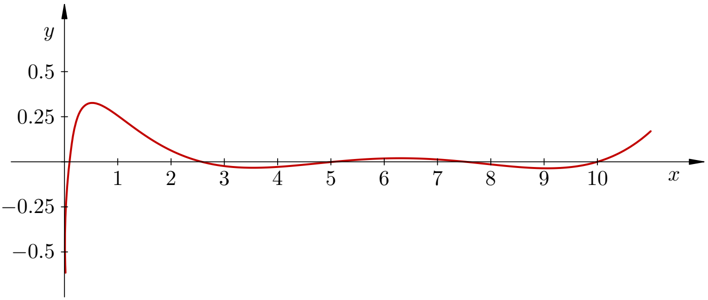
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Pratite skalu na y-osi.

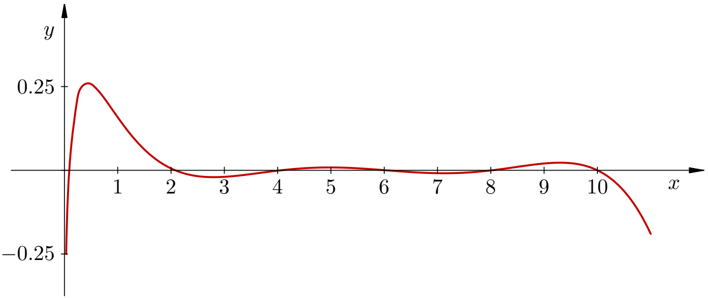
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Pratite skalu na y-osi.

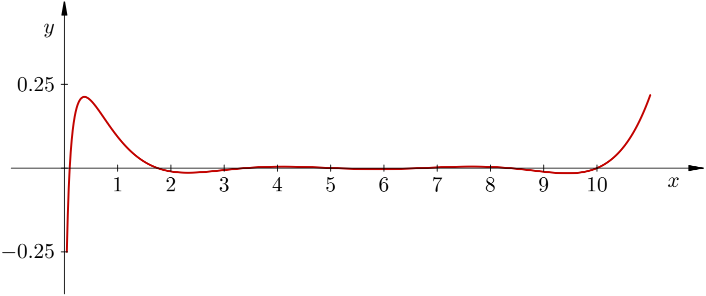
Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Pratite skalu na y-osi.

Logaritam — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Pratite skalu na y-osi.

Primjer Runge

Njemački matematičar Runge (1901. g.) prvi je uočio

- probleme koji nastupaju kod interpolacije polinomima na ekvidistantnim mrežama čvorova.
- Konstruirao je funkciju — poznatu kao funkcija Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{na} \quad [-5, 5],$$

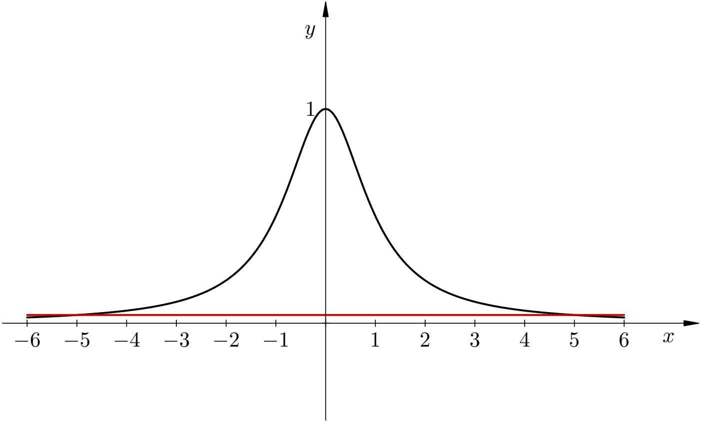
takvu da niz interpolacijskih polinoma na ekvidistantnim mrežama ne konvergira prema toj funkciji.

Promotrimo interpolaciju polinomima stupnjeva

- 1–6, 8, 10, 12, 14 i 16 (parnost funkcije!),

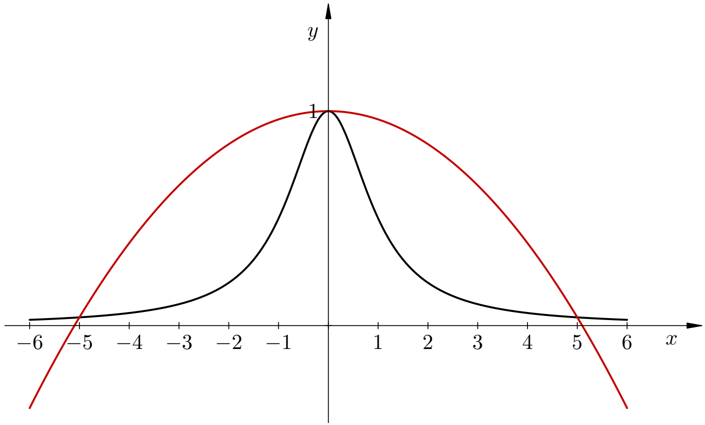
na ekvidistantnim mrežama čvorova u $[-5, 5]$.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



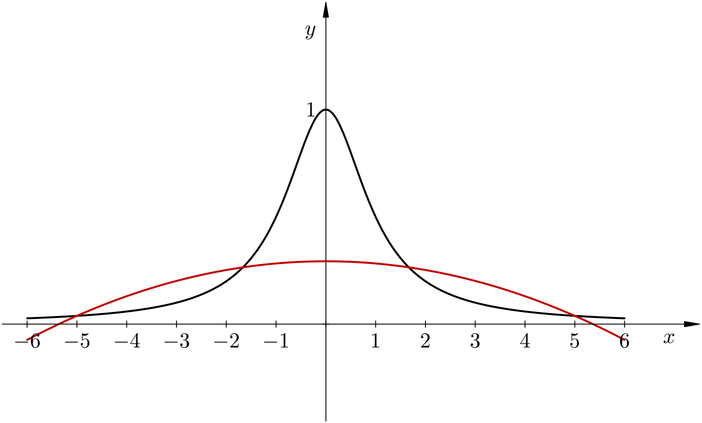
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



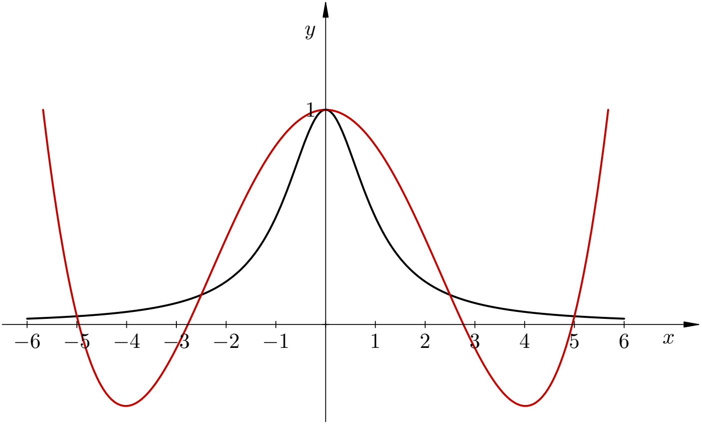
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



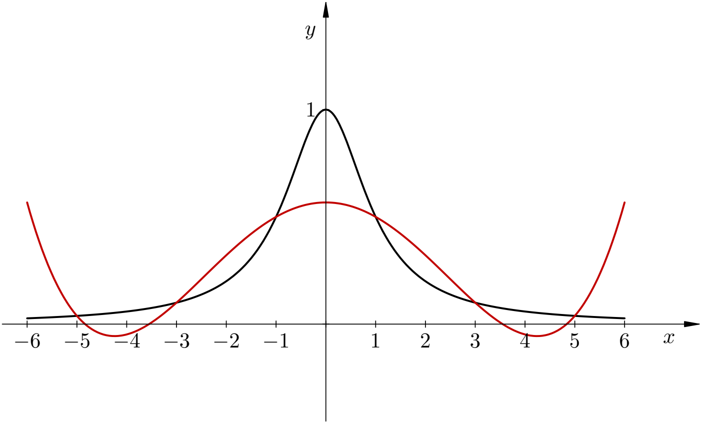
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



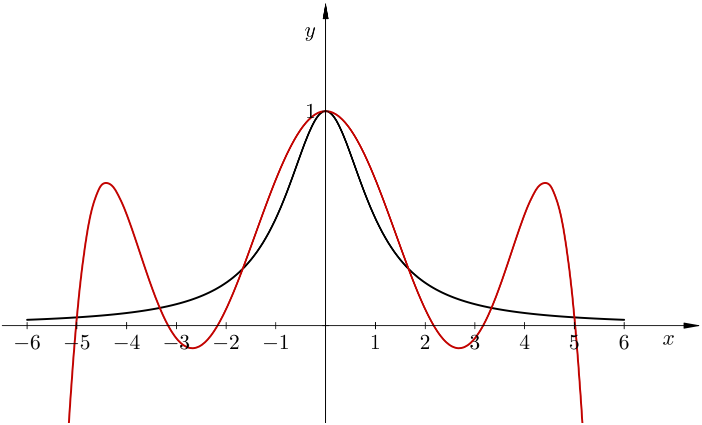
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



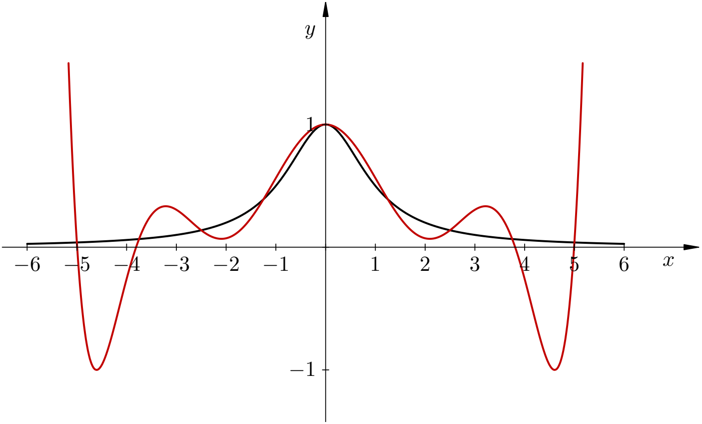
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



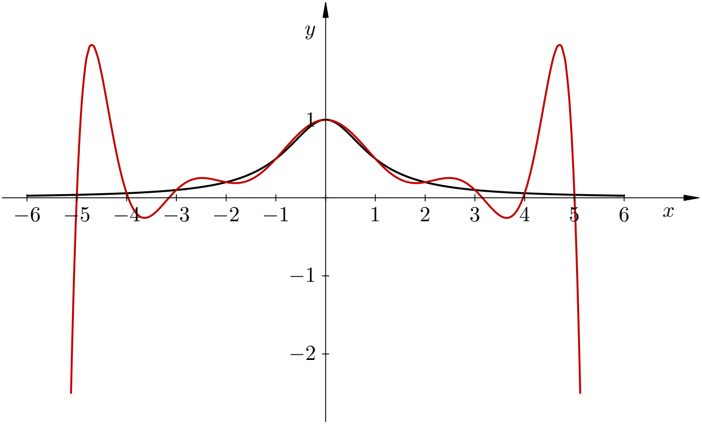
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



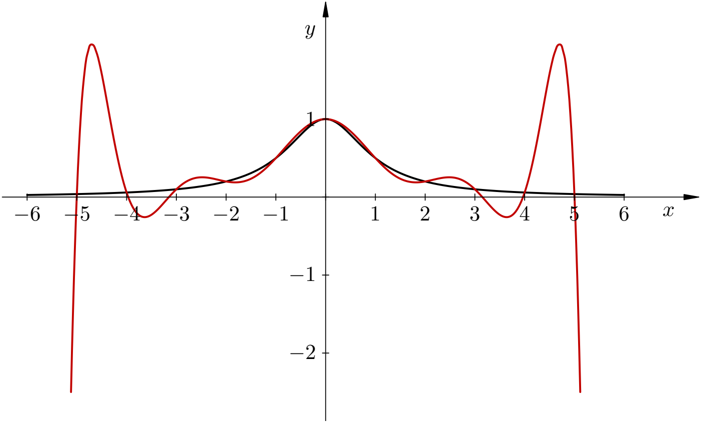
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



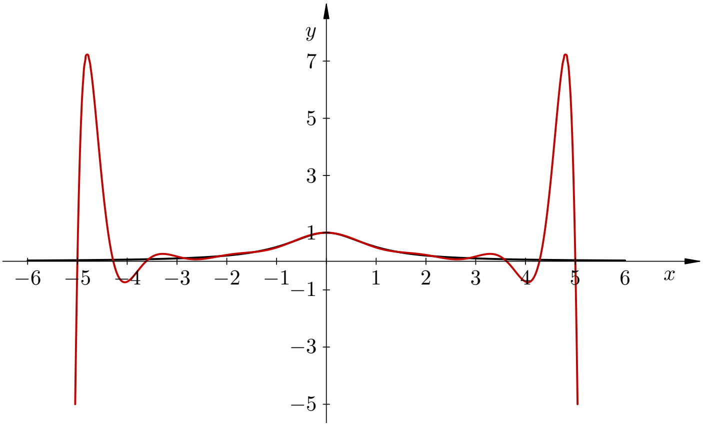
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



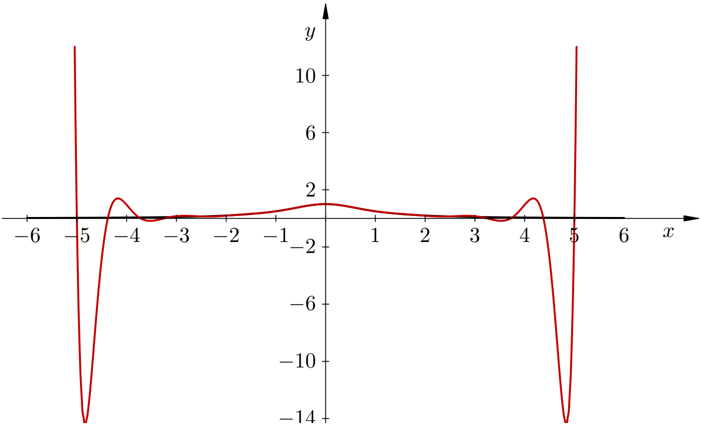
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



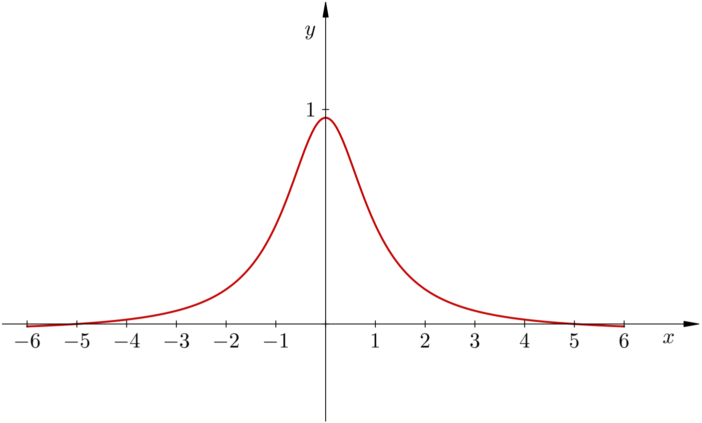
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža



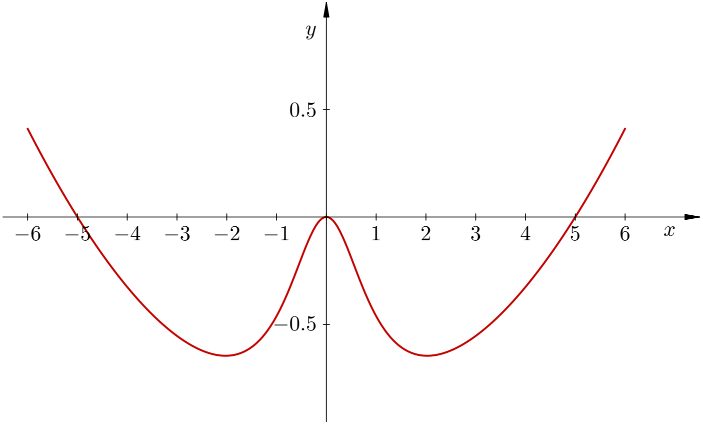
Ekvidistantna mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



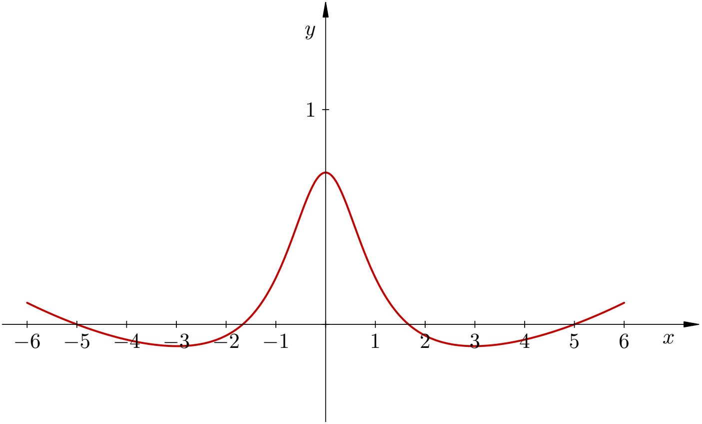
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



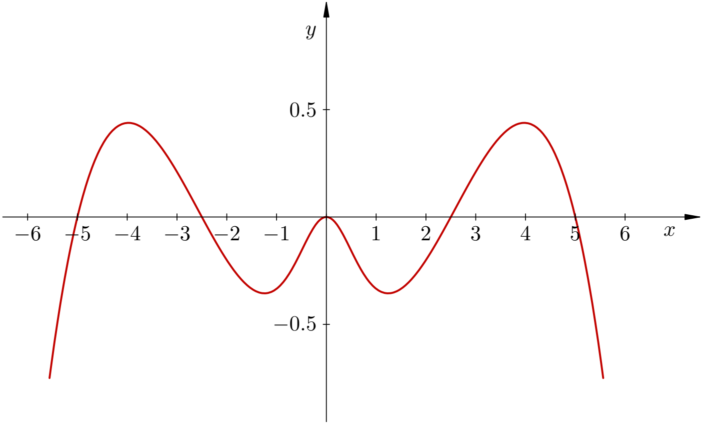
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



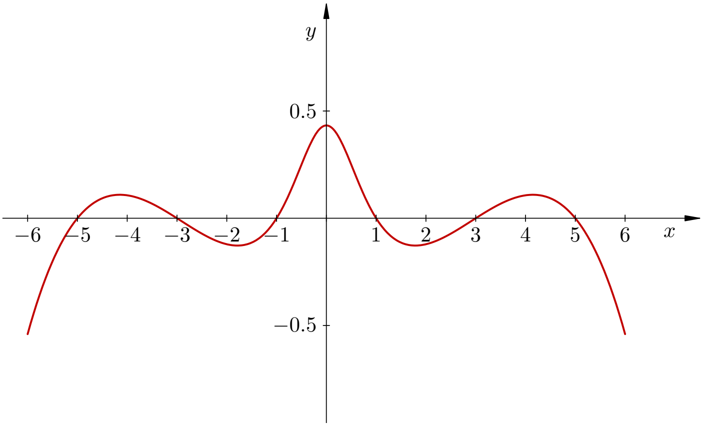
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



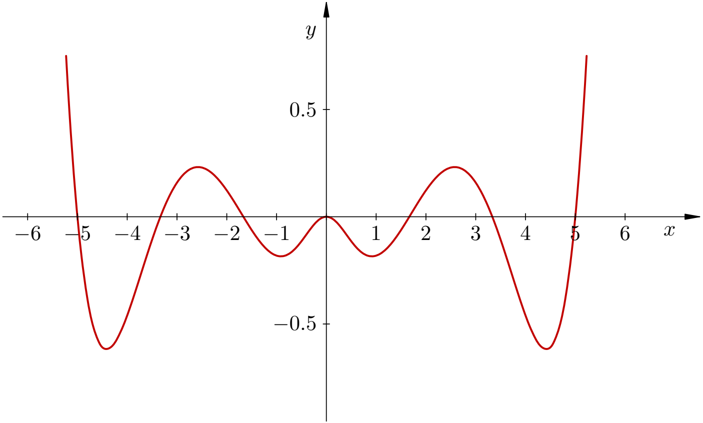
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



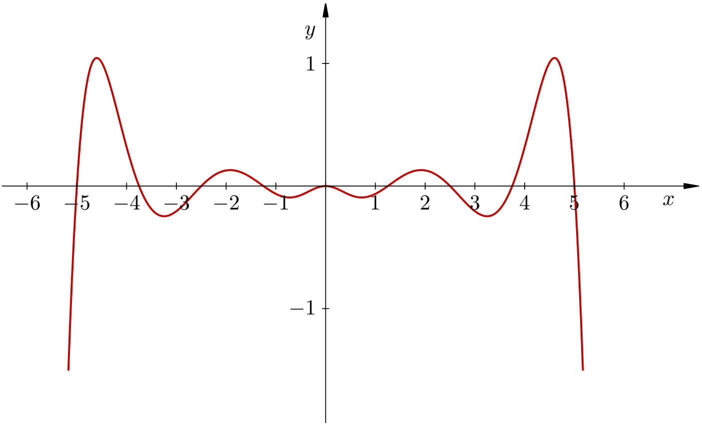
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



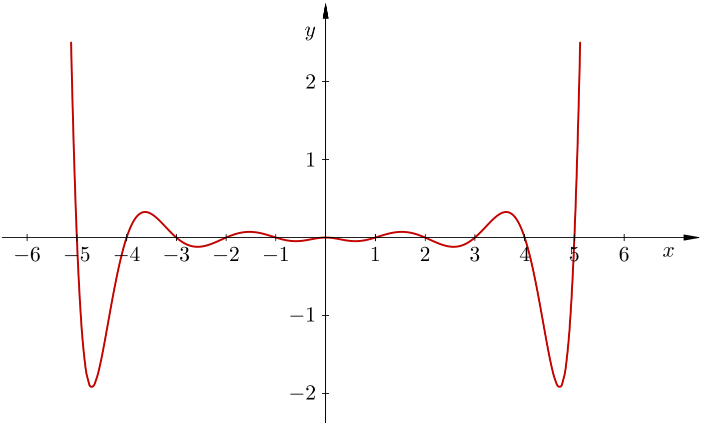
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



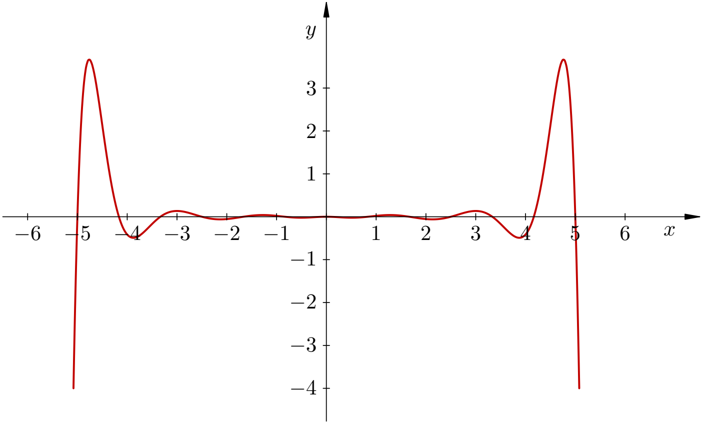
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



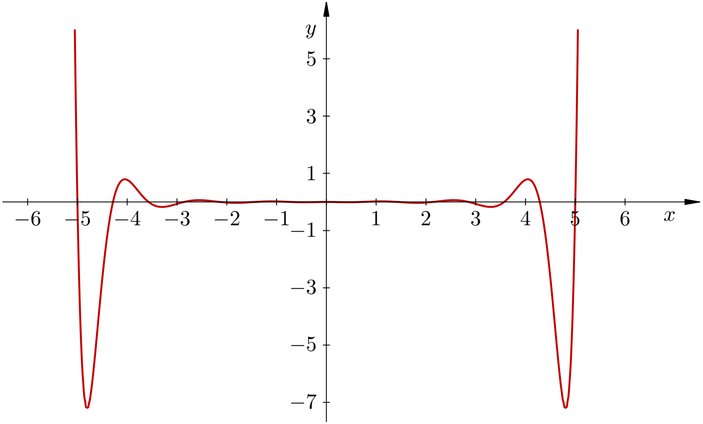
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



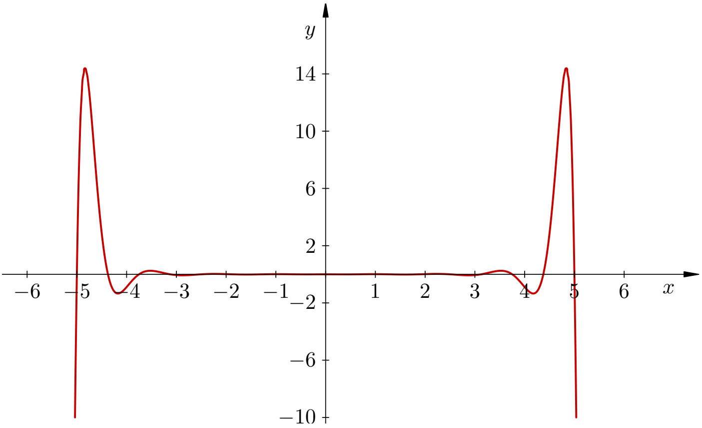
Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — ekvidistantna mreža, greška



Ekvidistantna mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Analiza

Za primjer Runge može se provesti pažljiva analiza (vidi skriptu) i pokazati da

- čim je $|x| > 3.63\ldots$, a interpolira se u ekvidistantnim čvorovima, niz interpolacijskih polinoma divergira.

Sljedeći primjer pokazuje da postoji još gora situacija — niz interpolacijskih polinoma konvergira samo u 3 točke.

Primjer. (Bernstein, 1912. g.) Neka je

$$f(x) = |x|$$

i neka je p_n interpolacijski polinom u $n+1$ ekvidistantnih čvorova na $[-1, 1]$. Tada $|f(x) - p_n(x)| \to 0$, kad $n \to \infty$, samo u tri točke: $x = -1$, 0, 1.

Primjer Runge — nastavak

Može li se funkciji Runge "pomoći"? Može!

Ako umjesto ekvidistantnih čvorova interpolacije uzmemo neekvidistantne, točnije,

- tzv. Čebiševljeve točke,

onda će, porastom stupnja n, niz interpolacijskih polinoma p_n

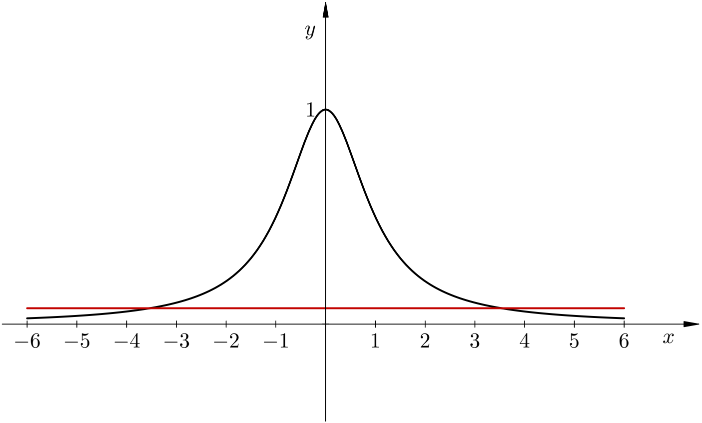
- konvergirati (i to uniformno) prema funkciji f.

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

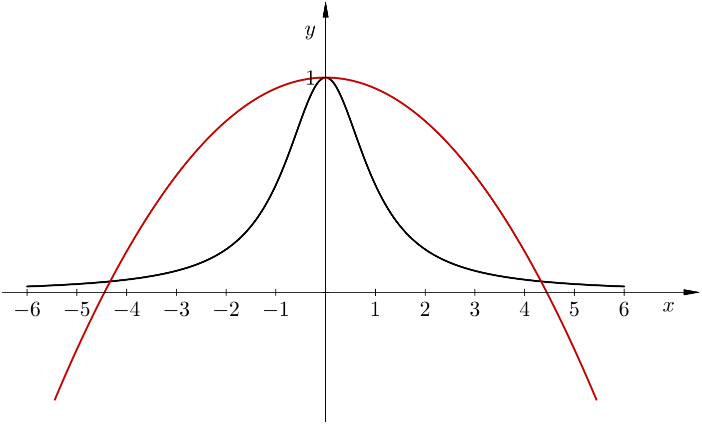
O njima više — malo kasnije. Prvo primjer za funkciju Runge.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



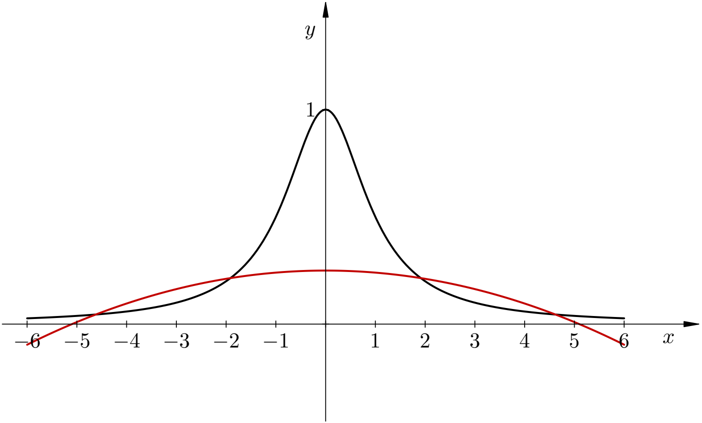
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



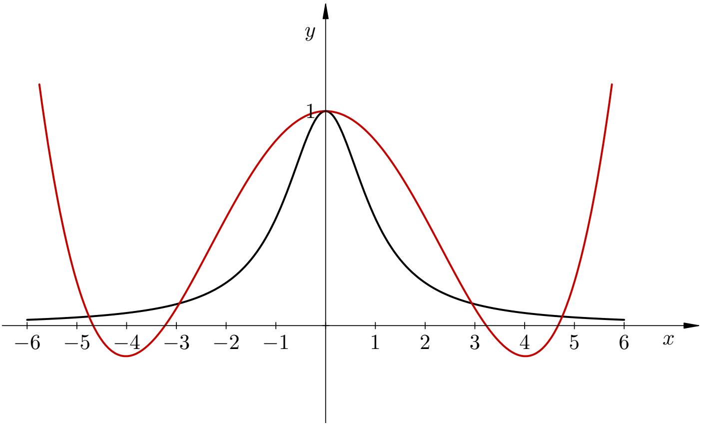
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



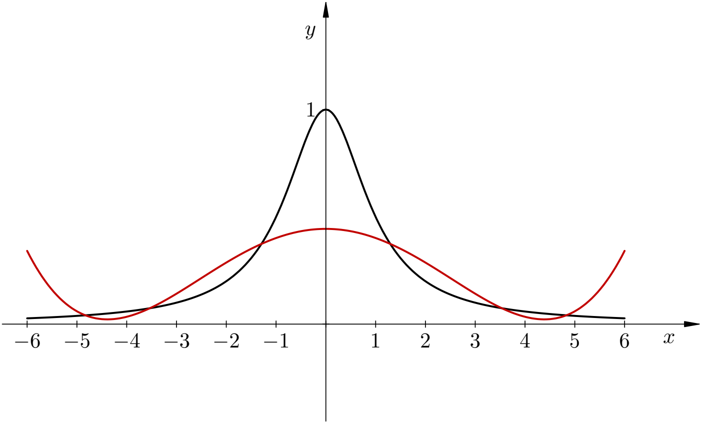
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



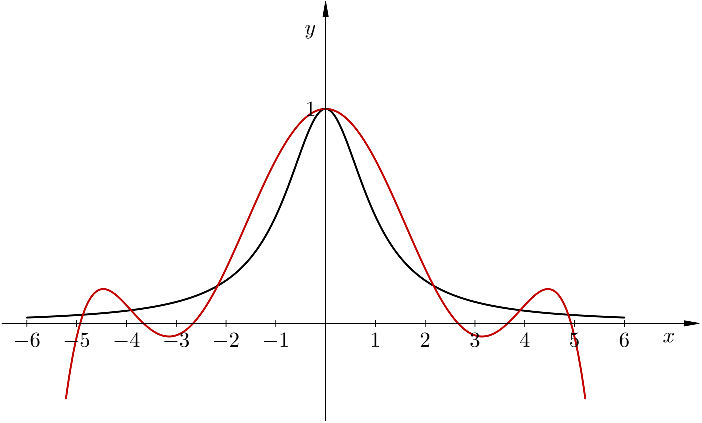
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



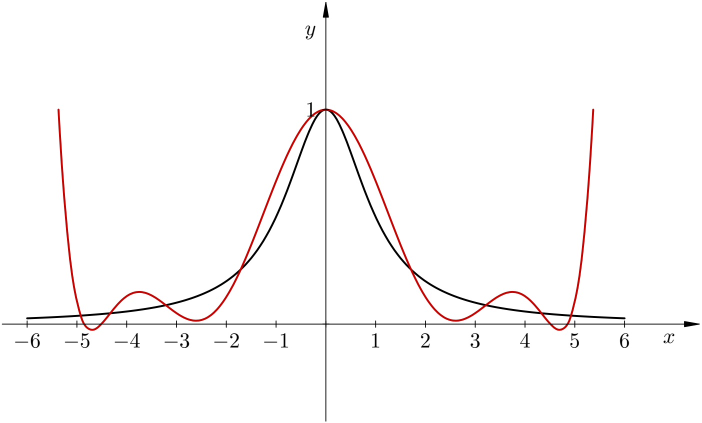
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



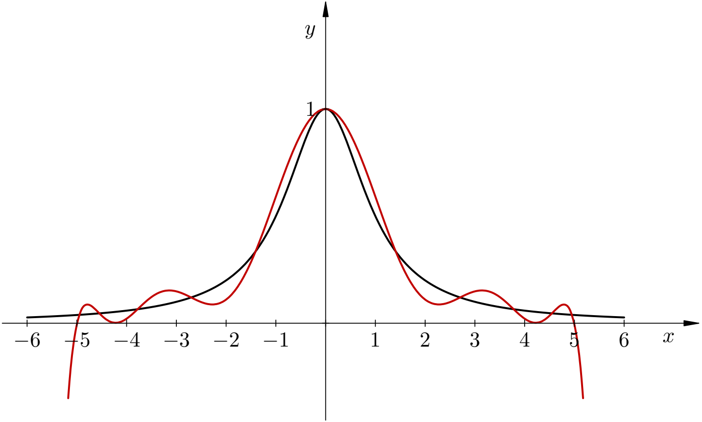
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



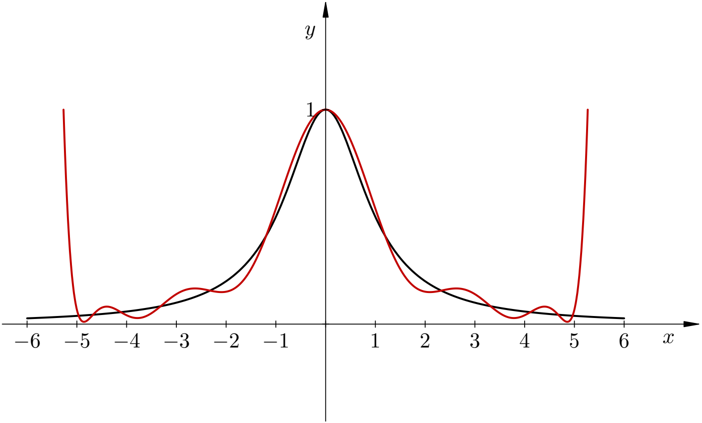
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



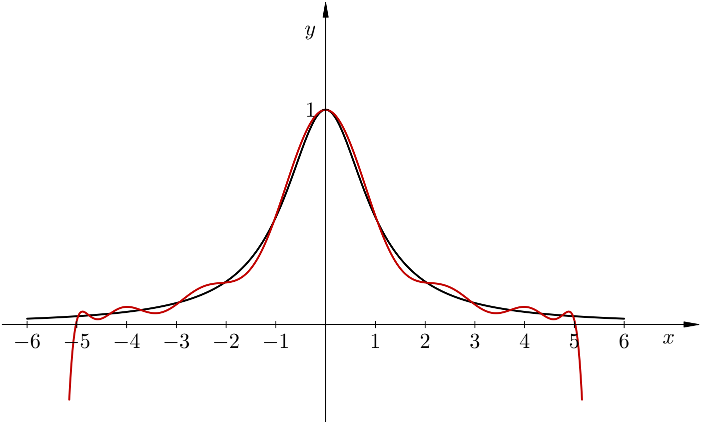
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



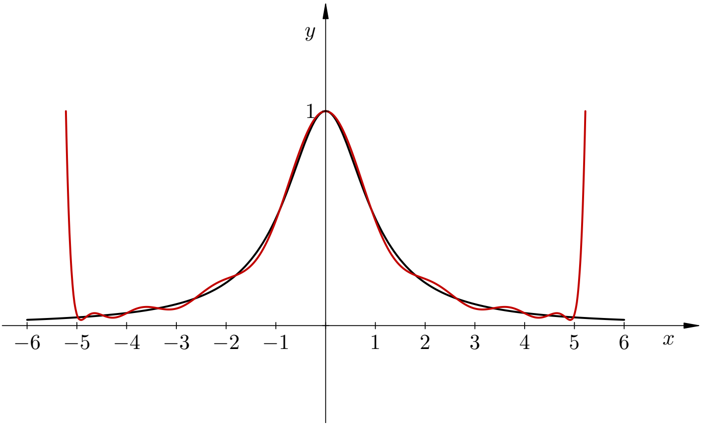
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



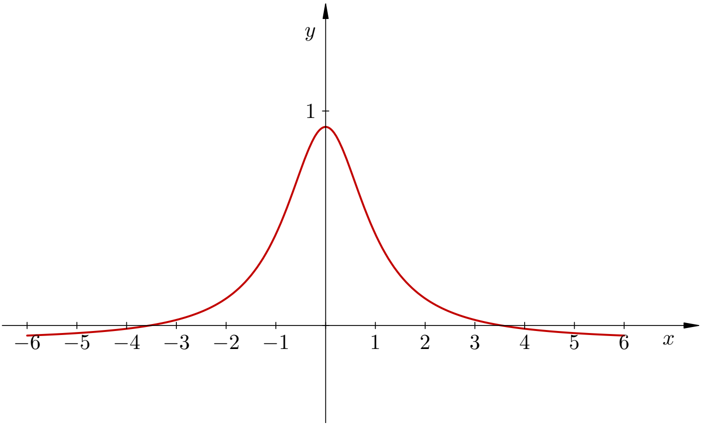
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža



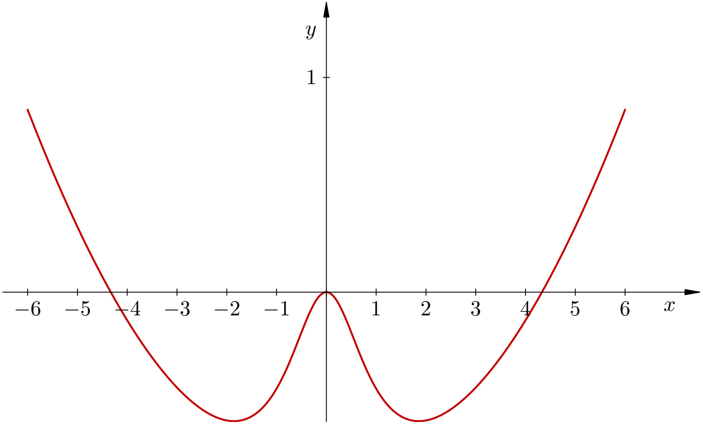
Čebiševljeva mreža,
interpolacijski polinom stupnja 16.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



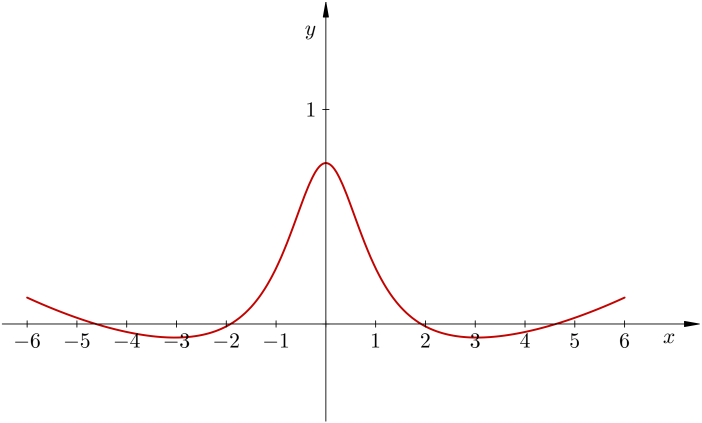
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 1.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



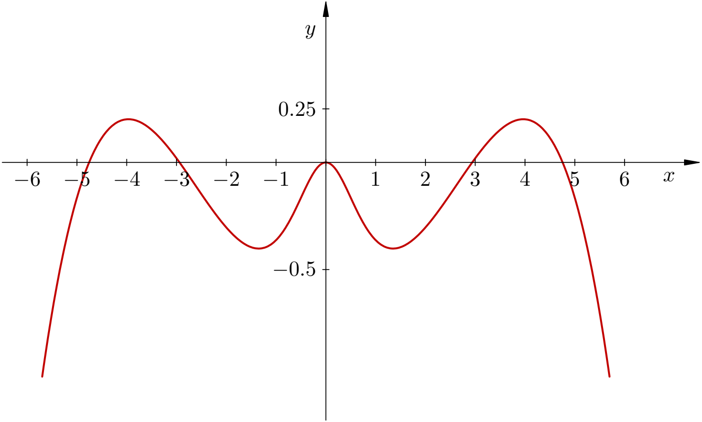
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 2.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



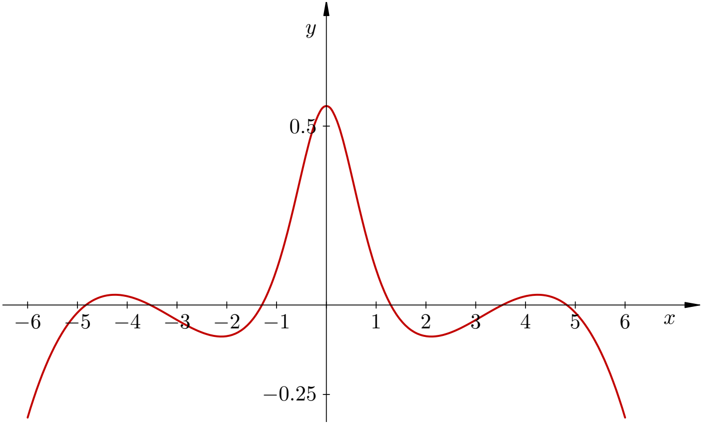
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 3.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



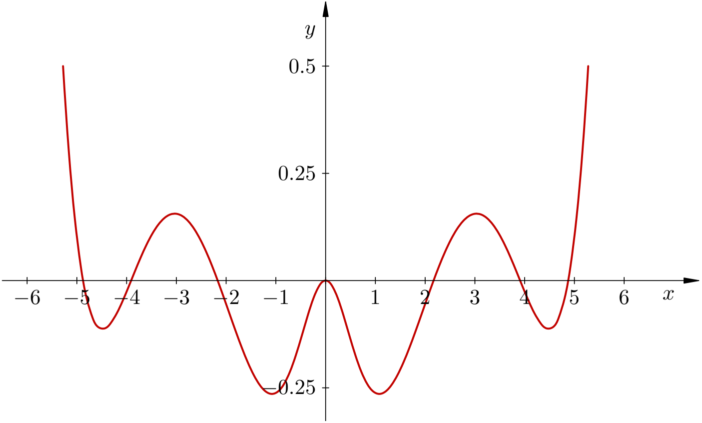
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 4.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



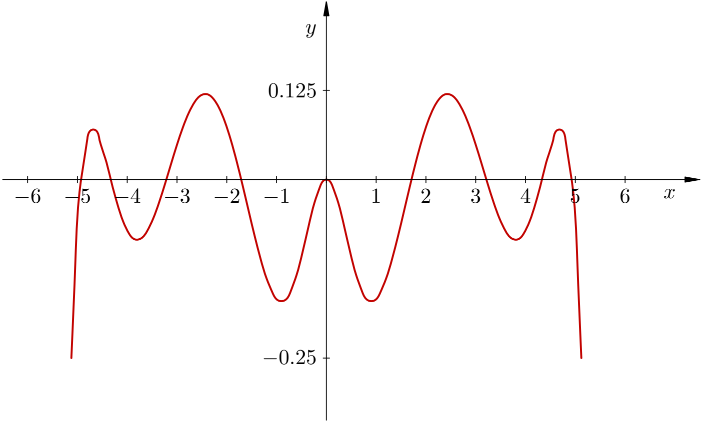
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 5.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



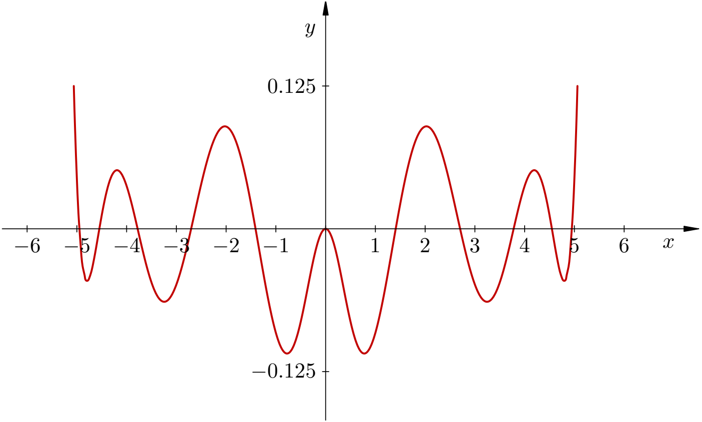
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 6.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



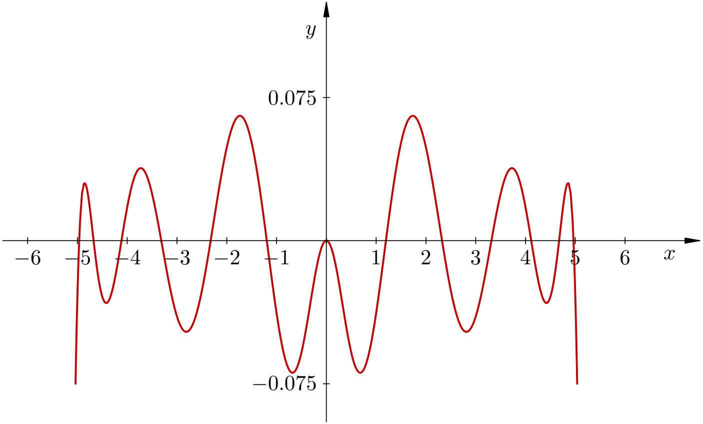
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 8.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



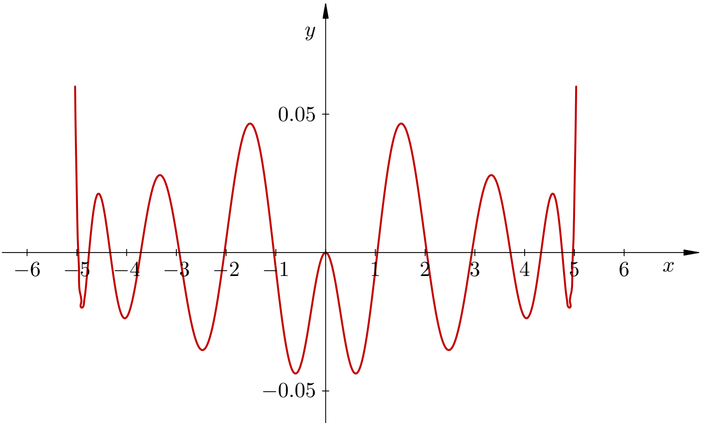
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 10.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



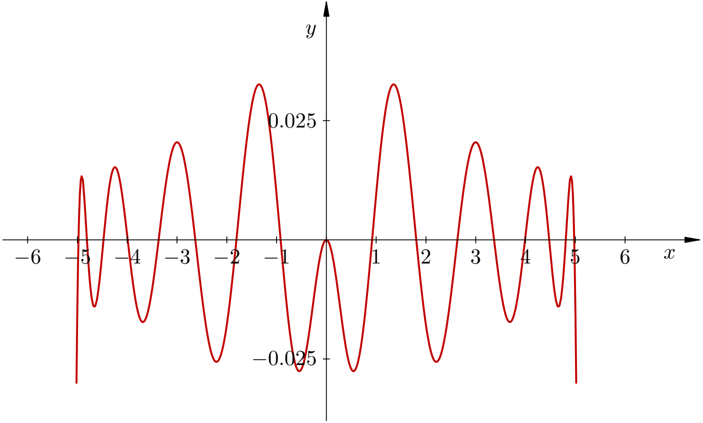
Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 12.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 14.

Primjer Runge — Čebiševljeva mreža, greška



Čebiševljeva mreža,
greška interpolacijskog polinoma stupnja 16.

Jesmo li spašeni?

Sljedeći teorem ukazuje na to da je

- nemoguće naći takav izbor točaka interpolacije polinomima, koji bi bio dobar za svaku funkciju.

Teorem. (Faber, 1914. g.) Za svaki mogući izbor točaka interpolacije, tj. za svaki niz skupova čvorova

$$X^{(n)} = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

postoji neprekidna funkcija f, za čiji niz interpolacijskih polinoma p_n, stupnja n, s čvorovima iz skupa $X^{(n)}$, vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \not\to 0.$$

∎

Dakle, nema (uniformne) konvergencije, tj. "nema spasa"!

Greška interpolacije — što se može učiniti?

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$.

U bilo kojoj točki $x \in [a, b]$ za grešku interpolacijskog polinoma p_n vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

za neku točku $\xi \in (x_{\min}, x_{\max}) \subseteq (a, b)$, uz

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \quad x_{\max} := \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}.$$

Ako je funkcija f unaprijed zadana, onda faktor s derivacijom funkcije f teško možemo “kontrolirati”.

Što možemo napraviti?

Idealno bi bilo minimizirati po apsolutnoj vrijednosti maksimalnu grešku aproksimacije, tj. $\|f - p_n\|_\infty \to \min$, na željenom intervalu $[a, b]$.

- Polinom p_n^* za koji je maksimalna greška minimalna se može konstruirati.
- Kad promatramo grešku $e^*(x)$ polinoma p_n^*, može se pokazati da za dvije susjedne točke x_j^* i x_{j+1}^* u kojima $|e^*(x)|$ poprima lokalne maksimume, vrijedi $e^*(x_j^*) = -e^*(x_{j+1}^*)$.
- Jedina je nevolja da je postupak traženja takve aproksimacije iterativan (Remesov algoritam), tj. takvu aproksimaciju nije jednostavno naći.
- Takva aproksimacija zove se minimaks aproksimacija funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Polinom čvorova — razne mreže čvorova

Umjesto egzaktne minimaks aproksimacije p_n^* funkcije f na intervalu $[a, b]$, zadovoljimo se “skromnijim” ciljem:

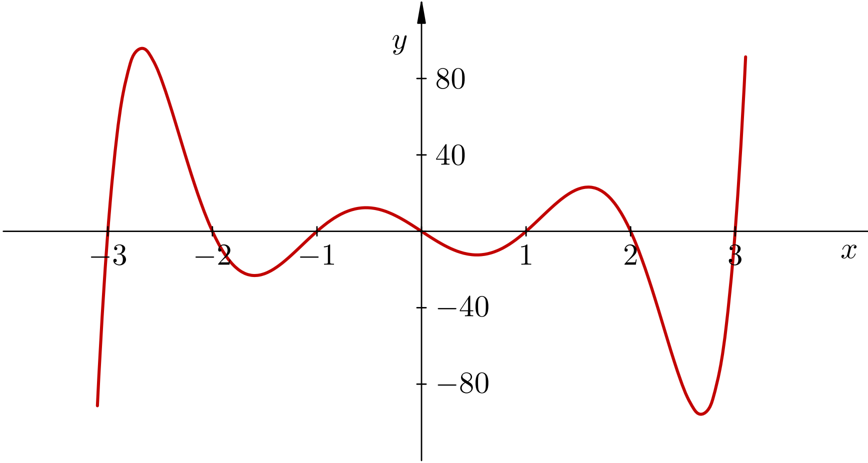
- ako možemo birati čvorove interpolacije $x_0, \ldots, x_n$,
- minimizirajmo maksimalnu apsolutnu vrijednost (grešku) polinoma čvorova

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Pogledajmo kako izgleda polinom čvorova. Ako su čvorovi

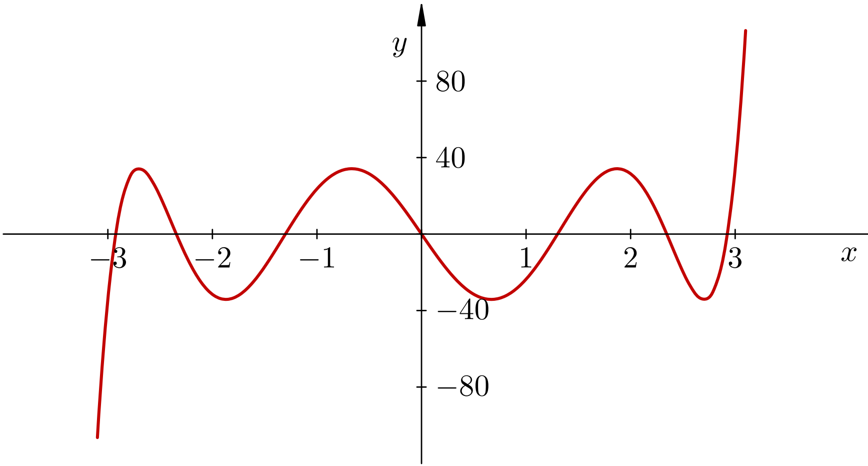
- ekvidistantni — najmanja greška je pri sredini intervala, a raste prema rubu,
- Čebiševljevi — maksimalna greška je jednaka na svakom podintervalu između čvorova, uključivo i rubove a, b.

Polinom čvorova za $n = 6$, ekvidistantna mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 6$, ekvidistantna mreža

Polinom čvorova za $n = 6$, Čebiševljeva mreža



$\omega(x)$ na $[-3, 3]$, za $n = 6$, Čebiševljeva mreža

Čebiševljeve točke

Prethodne slike navode na činjenicu da,

- kad se uzmu Čebiševljevi čvorovi,
- greška mijenja znak, a
- susjedni maksimumi grešaka su po apsolutnoj vrijednosti približno jednaki (v. primjer Runge).

Takvu aproksimaciju zovemo skoro minimaks aproksimacija.

Sve dokaze provodit ćemo na "standardnom" intervalu $[-1, 1]$. Ako je funkcija f zadana na nekom drugom intervalu, onda ju linearnom (afinom) transformacijom

$$y = cx + d$$

svodimo na interval $[-1, 1]$.

Čebiševljeve točke

Pokažimo da Čebiševljevi čvorovi minimiziraju maksimalnu apsolutnu vrijednost polinoma čvorova, tj. da minimiziraju

$$\max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Na intervalu $[a, b]$, uzlazno poredane Čebiševljeve točke su

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ako je $a = -1$, $b = 1$, onda su Čebiševljeve točke x_k, za $k = 0, \ldots, n$,

- sve nultočke Čebiševljevog polinoma prve vrste T_{n+1}.

Čebiševljevi polinomi — definicija i rekurzija

Čebiševljevi polinomi prve vrste, oznaka je T_n, za $n \geq 0$, definirani su relacijom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Polinomi T_n zadovoljavaju tročlanu rekurzivnu relaciju

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

(dokaz = zbroj cosinusa preko produkta, za $x = \cos \varphi$), uz start

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Iz ove rekurzivne relacije odmah slijedi da je T_n polinom stupnja n. Usput, za $|x| \geq 1$ vrijedi $T_n(x) = \mathrm{ch}(n \mathrm{Arch} x)$.

Čebiševljevi polinomi — nultočke i ekstremi

Nultočke i ekstreme polinoma T_{n+1} nije teško izračunati.

Njegove nultočke su (silazno indeksirane — kraća formula)

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

dok su ekstremi na segmentu $[-1, 1]$ (opet, silazno indeksirani)

$$x_k' = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

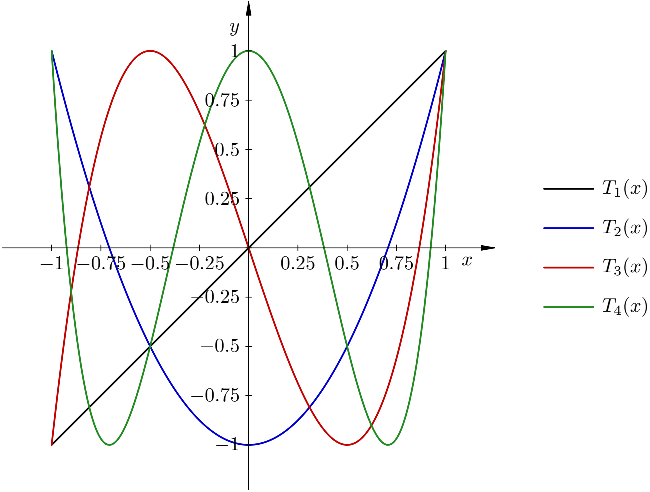
Vrijednost Čebiševljevog polinoma u ekstremu je

$$T_{n+1}(x_k') = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

Primijetite da tih ekstrema ima točno $n+2$ (rubovi -1 i 1 su uključeni) i da pripadne vrijednosti alterniraju po znaku.

Čebiševljevi polinomi — graf

Graf prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma T_n na $[-1, 1]$.



Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Čebiševljevi polinomi T_n imaju važno svojstvo minimizacije "uniformnog otklona polinoma od nule" na segmentu $[-1, 1]$.

Teorem. Za zadani prirodni broj n, promatrajmo minimizacijski problem

$$\tau_n := \inf_{\deg(P) \leq n-1} \left\{ \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^n + P(x)| \right\},$$

gdje je P polinom. Minimum τ_n se dostiže samo za polinom

$$x^n + P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \, T_n(x).$$

Pripadna pogreška ili "otklon od nule" je $\tau_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Dokaz. Iz tročlane rekurzije, nije teško induktivno dokazati da je vodeći koeficijent u T_n jednak 2^{n-1}, tj. da je

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \text{članovi nižeg stupnja}, \quad n \geq 1.$$

Zbog toga vrijedi da je

$$\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n + \text{članovi nižeg stupnja}.$$

Točke

$$x_k' = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

su lokalni ekstremi od T_n na $[-1, 1]$.

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Očito je

$$-1 = x'_n < x'_{n-1} < \cdots < x'_1 < x'_0 = 1.$$

U tim točkama je

$$T_n(x'_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Polinom $\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ ima vodeći koeficijent jednak 1 i vrijedi

$$\max_{-1 \le x \le 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Zbog toga je

$$\tau_n \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Pokažimo da je τ_n baš jednak desnoj strani. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\tau_n < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pokazat ćemo da to vodi na kontradikciju.

Iz definicije τ_n preko infimuma i prethodne pretpostavke, zaključujemo da postoji polinom M takav da je

$$M(x) = x^n + P(x), \quad \deg(P) \le n - 1,$$

za kojeg vrijedi

$$\tau_n \le \max_{-1 \le x \le 1} |M(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

Definiramo

$$R(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x) - M(x).$$

No, vodeći koeficijenti polinoma s desne strane se skrate, pa je

$$\deg(R) \le n - 1.$$

Ispitajmo vrijednosti funkcije R u lokalnim ekstremima polinoma T_n. Iz gornje ograde za τ_n, redom, izlazi

$$\begin{aligned} R(x_0') &= R(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - M(1) > 0, \\ R(x_1') &= -\frac{1}{2^{n-1}} - M(x_1') < 0, \quad \ldots \end{aligned}$$

Čebiševljevi polinomi — svojstvo minimizacije

tj. za polinom R vrijedi

$$\operatorname{sign}(R(x_k')) = (-1)^k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Budući da ima bar $n+1$ različiti predznak, to mora postojati bar n nultočaka, što je moguće samo ako je $R = 0$. Odatle odmah izlazi da je

$$M(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x).$$

No, onda je $\max\limits_{-1\leq x\leq 1} |M(x)| = 1/2^{n-1}$, što je kontradikcija s $<$.

Sad bi još trebalo pokazati da je to jedini polinom s takvim svojstvom. Taj dio dokaza vrlo je sličan ovom što je već dokazano. Istim argumentom izlazi opet $M(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(x)$.

$\blacksquare$

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Vratimo se sad polaznom problemu optimalnog izbora čvorova interpolacije.

Želimo izabrati čvorove interpolacije $x_k \in [-1, 1]$ tako da minimiziraju

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)|.$$

Polinom čvorova ω u prethodnoj relaciji je stupnja $n + 1$ i ima vodeći koeficijent 1. Po Teoremu o minimalnom otklonu, minimum ćemo dobiti ako stavimo

$$\omega(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^n} \, T_{n+1}(x),$$

a minimalna će vrijednost biti $\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |\omega(x)| = 1/2^n$.

Interpolacija u Čebiševljevim točkama

Odatle odmah čitamo da su čvorovi $x_0, \ldots, x_n$ nultočke polinoma T_{n+1}. U silaznom poretku, te nultočke su

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Uzlazni poredak dobivamo zamjenom indeksa $k \mapsto n - k$.

Afinom transformacijom intervala $[-1, 1]$ u interval $[a, b]$,

$$x \in [-1, 1] \quad \mapsto \quad \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x \in [a, b],$$

izlazi i opća formula za Čebiševljeve točke (uzlazno) u $[a, b]$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos \frac{(2(n-k)+1)\pi}{2n+2}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Jesmo li bar malo spašeni?

Problem u Bernsteinovom primjeru $f(x) = |x|$ i Faberovom teoremu je preširoka klasa funkcija, odnosno,

- premala glatkoća — samo neprekidnost za f.

Uz samo malo jaču glatkoću, ipak jesmo “spašeni”!

Teorem. Neka je $f \in C^1[-1, 1]$. Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f na Čebiševljevoj mreži s $n + 1$ čvorova u intervalu $[-1, 1]$.

Niz polinoma p_n uniformno konvergira prema f na $[-1, 1]$, tj. vrijedi

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty.$$

∎

Dakle, imamo uniformnu konvergenciju interpolacije za neprekidno derivabilne funkcije na Čebiševljevim mrežama.

Hermiteova polinomna interpolacija

Osim interpolacije funkcijskih vrijednosti funkcije f u čvorovima x_k, možemo tražiti i interpolaciju derivacije f',

- tako da derivacija h' interpolacijskog polinoma h interpolira derivaciju f' u čvorovima x_k.

Dakle, zahtijevamo da je

$$h(x_k) = f(x_k), \quad h'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Takva vrsta interpolacije zove se Hermiteova interpolacija.

Prvo, treba odgovoriti na nekoliko važnih pitanja:

- postoji li takav interpolacijski polinom;
- ako postoji, je li jedinstven;
- ako postoji i jedinstven je, kojeg je stupnja.

Hermiteova polinomna interpolacija

Uvedimo skraćene oznake za vrijednosti f i f' u čvorovima

$$f_k := f(x_k), \quad f'_k = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Problem egzistencije i jedinstvenosti Hermiteove interpolacije konstruktivno rješava sljedeći teorem.

Teorem. Postoji jedinstveni polinom h_{2n+1}, stupnja najviše $2n + 1$, koji zadovoljava interpolacijske uvjete

$$h_{2n+1}(x_k) = f_k, \quad h'_{2n+1}(x_k) = f'_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

gdje su x_k međusobno različite točke i f_k, f'_k zadani realni brojevi.

Dokaz. Ideja = konstrukcija baze nalik na Lagrangeovu.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tražimo "bazične polinome" $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, za $k = 0, \ldots, n$, za koje vrijede tzv. "kardinalni" uvjeti interpolacije

$$h_{k,0}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k, \end{cases} \qquad h'_{k,0}(x_i) = 0,$$

$$h_{k,1}(x_i) = 0, \qquad h'_{k,1}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Ako nađemo takve polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$, onda je

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x) + f'_k h_{k,1}(x) \big).$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Provjera (prije dokaza): Deriviranjem polinoma $h_{2n+1}(x)$ izlazi

$$h'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x) + f'_k h'_{k,1}(x)\big),$$

pa lako vidimo da su ispunjeni svi uvjeti interpolacije

$$h_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h_{k,0}(x_i) + f'_k h_{k,1}(x_i)\big) = f_i,$$

$$h'_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \big(f_k h'_{k,0}(x_i) + f'_k h'_{k,1}(x_i)\big) = f'_i.$$

Ostaje još konstruirati polinome $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$.

Hermiteova polinomna interpolacija

Tvrdimo da se $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ mogu napisati kao

$$\begin{aligned} h_{k,0}(x) &= [1 - 2(x - x_k)\ell'_k(x_k)]\,\ell_k^2(x) \\ h_{k,1}(x) &= (x - x_k)\,\ell_k^2(x), \end{aligned}$$

gdje je ℓ_k odgovarajući polinom Lagrangeove baze.

Provjera da vrijednosti $h_{k,0}(x_i)$, $h'_{k,0}(x_i)$, $h_{k,1}(x_i)$ i $h'_{k,1}(x_i)$ zadovoljavaju tražene uvjete vrši se direktno — uvrštavanjem.

Budući da je ℓ_k polinom stupnja n,

- onda su $h_{k,0}$ i $h_{k,1}$ stupnja $2n + 1$,
- pa je h_{2n+1} stupnja najviše $2n + 1$.

Time smo dokazali egzistenciju. Preostaje još jedinstvenost.

Hermiteova polinomna interpolacija

Primijetite da funkcija pogreške polinoma h

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x)$$

ima dvostruke nultočke u čvorovima $x_0, \ldots, x_n$, jer i funkcija e_h, i njezina derivacija e_h' imaju nultočke u x_i, tj.

$$e_h(x_i) = 0, \quad e_h'(x_i) = 0.$$

Neka je q_{2n+1} bilo koji drugi polinom koji zadovoljava uvjete interpolacije. Za razliku p tih polinoma onda vrijedi

$$\begin{aligned} p(x) &= h_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x) \\ &= (f(x) - q_{2n+1}(x)) - (f(x) - h_{2n+1}(x)) \\ &= e_q(x) - e_h(x). \end{aligned}$$

Hermiteova polinomna interpolacija

Polinom p je stupnja najviše $2n+1$ i

- ima dvostruke nultočke u čvorovima x_i, za $i = 0, \ldots, n$, odnosno, ukupno ima barem $2n+2$ nultočke.

Zaključak. Polinom p je nul-polinom, pa je h_{2n+1} jedinstven.

■

Zato što greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma ima dvostruke nultočke u $x_0, \ldots, x_n$, polinom čvorova ω_h jednak je

$$\omega_h(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 = \omega^2(x),$$

pri čemu je ω polinom čvorova Lagrangeove interpolacije.

Grešku Hermiteove interpolacije dobivamo na sličan način kao i kod Lagrangeove interpolacije.

Greška Hermiteove interpolacije

Jedine razlike: ovdje je h_{2n+1} stupnja $2n+1$, a polinom čvorova je $\omega_h(x) = \omega^2(x)$.

Teorem. Neka je f funkcija definirana na segmentu $[a, b]$. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i

- neka su $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$, međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$,
- neka prva derivacija f' postoji u čvorovima $x_0, \ldots, x_n$,
- neka je e_h greška Hermiteovog interpolacijskog polinoma h_{2n+1} za funkciju f na mreži čvorova $x_0, \ldots, x_n$.

Za bilo koju točku $x \in [a, b]$, takvu da je $x \neq x_0, \ldots, x_n$, tj. čim x nije čvor interpolacije, za grešku interpolacije vrijedi

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \omega^2(x)\, f[x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n, x].$$

Greška Hermiteove interpolacije — nastavak

Ako $f^{(2n+2)}$ postoji na $[a, b]$, onda za svaku točku $x \in [a, b]$, postoji točka $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$, gdje je

$$x_{\min} := \min\{x, x_0, \ldots, x_n\}, \quad x_{\max} := \max\{x, x_0, \ldots, x_n\},$$

takva da je

$$e_h(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) = \omega^2(x) \, \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}.$$

■

Napomena. Ako želimo da prva formula (s podijeljenom razlikom) vrijedi i u čvorovima interpolacije, onda

- treba pretpostaviti da druga derivacija f'' postoji u svim čvorovima,
- jer dobivamo trostruke čvorove na desnoj strani (v. iza).

Hermiteova interpolacija — Newtonova forma

Hermiteov interpolacijski polinom može se zapisati i u Newtonovoj bazi — što je zgodnije za računanje.

- Točke interpolacije su $x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n$, tj. svaka od njih je dvostruki čvor. U tablici podijeljenih razlika ovu mrežu označavamo s $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2n}, t_{2n+1}$.

Pokazali smo da za podijeljene razlike s dvostrukim čvorom vrijedi

$$\begin{aligned} f[x_k, x_k] &= \lim_{h \to 0} f[x_k, x_k + h] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = f'(x_k). \end{aligned}$$

Dakle, $f[x_k, x_k] = f_k'$ su baš zadani podaci! Uz tu modifikaciju, podijeljene razlike se računaju na uobičajeni način (rekurzija).

Podijeljene razlike

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$	$\cdots$	$f[t_0, \ldots, t_{2n+1}]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f'(x_0)$			
x_0	$f[x_0]$		$f[x_0, x_0, x_1]$		
		$f[x_0, x_1]$		$\ddots$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_1]$		
		$f'(x_1)$			$\cdots$
x_1	$f[x_1]$		$f[x_1, x_1, x_2]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	
x_n	$f[x_n]$		$f[x_{n-1}, x_n, x_n]$		
		$f'(x_n)$			
x_n	$f[x_n]$				

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Konačni izgled Hermiteovog interpolacijskog polinoma u Newtonovoj bazi je

$$
\begin{aligned}
h_{2n+1}(x) = f[x_0] &+ f'(x_0)\,(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1]\,(x - x_0)^2 \\
&+ f[x_0, x_0, x_1, x_1]\,(x - x_0)^2\,(x - x_1) + \cdots \\
&+ f[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n]\,(x - x_0)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2 (x - x_n).
\end{aligned}
$$

Naziv “Hermiteova interpolacija” koristi se i za općenitiju, tzv. proširenu Hermiteovu (ili Hermite–Birkhoff) interpolaciju.

- Ovdje se mogu interpolirati i više derivacije od prvih.
- Bitno: u svakom čvoru x_i, “redom” se interpoliraju funkcijska vrijednost i prvih nekoliko uzastopnih derivacija, a broj podataka po čvoru može varirati.

Proširena Hermiteova interpolacija

I za proširenu Hermiteovu interpolaciju postoji jedinstveni interpolacijski polinom stupnja najviše $n =$ broj podataka $- 1$.

Primjer. Nađite interpolacijski polinom koji interpolira redom zadane vrijednosti $f, f', \ldots, f^{(n)}$ u čvoru x_0.

U ovom primjeru, x_0 je $(n+1)$-struki čvor interpolacije. Za podijeljene razlike višeg reda s istim čvorovima vrijedi

$$f[\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{(k+1)\text{ puta}}] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

čim $f^{(k)}(x_0)$ postoji, pa je interpolacijski polinom p_n jednak Taylorovom polinomu stupnja n, za funkciju f oko točke x_0.

Preskakanje derivacija u interpolaciji

Ako dozvolimo “preskakanje” nekih derivacija u nekim točkama, problem interpolacije

- ne mora uvijek imati jedinstveno rješenje.

Primjer. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost interpolacijskog polinoma $p \in \mathcal{P}_2$, za kojeg vrijedi

$$p(x_0) = f_0, \quad p'(x_1) = f_1', \quad p(x_2) = f_2,$$

gdje su (x_0, f_0), (x_1, f_1') i (x_2, f_2) zadane točke, uz pretpostavku da je $x_0 \neq x_2$ (dozvoljeno je $x_1 = x_0$ ili $x_1 = x_2$).

Rješenje. Mora biti $x_1 \neq (x_0 + x_2)/2 \iff$ regularnost matrice sustava za interpolaciju.

Numeričko deriviranje — problem i nestabilnost

U praksi, derivacije funkcije često nisu dostupne, već treba

- aproksimirati derivaciju f' diferencijabilne funkcije f, na nekom skupu točaka,
- korištenjem samo poznatih vrijednosti funkcije f u zadanim točkama.

Sasvim općenito, na temelju tih istih podataka — funkcijskih vrijednosti, možemo tražiti i

- aproksimacije vrijednosti viših derivacija f'', f''', itd.

Oprez! Numeričko deriviranje je nestabilan problem.

- Ako podaci o funkcijskim vrijednostima imaju neku grešku, ta greška se, u principu, povećava u svakoj sljedećoj derivaciji. Ilustracija — malo kasnije.

Numeričko deriviranje — primjena i ideja

Formule za numeričko deriviranje imaju dvostruku primjenu.

- U praksi, kad podaci dolaze iz mjerenja, koriste se samo za derivacije niskog reda — vrlo rijetko preko 4..
- U teoriji, služe za izvod numeričkih metoda za rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Osnovna ideja za nalaženje takvih formula je ista kao i kod drugih problema u numeričkoj matematici. U ovom slučaju,

aproksimacija derivacije = derivacija aproksimacije (interpolacije).

Naime, jedina aproksimacija koju (zasad) znamo je

- interpolacijski polinom za funkciju f u zadanim točkama.

Usput, baš te formule se najčešće koriste.

Derivacija funkcije $\approx$ derivacija interp. polinoma

Poznate su vrijednosti funkcije f u točkama $x_0, \ldots, x_n$.

Neka je p_n interpolacijski polinom, stupnja najviše n, za f u tim točkama (znamo da p_n postoji i jedinstven je).

Za aproksimaciju derivacije $f'(x)$ u nekoj točki x uzimamo

- derivaciju interpolacijskog polinoma p_n u toj točki x, tj.

$$f'(x) \approx p_n'(x).$$

Općenito, za aproksimaciju k-te derivacije $f^{(k)}(x)$ uzimamo

- k-tu derivaciju interpolacijskog polinoma p_n u točki x, tj.

$$f^{(k)}(x) \approx p_n^{(k)}(x).$$

Ovo ima smisla samo za $k \leq n$. U protivnom je $p_n^{(k)} \equiv 0$.

Numeričko deriviranje — praksa

Primjena numeričkog deriviranja u praksi:

- red derivacije k je malen — rijetko preko 4,
- pripadne formule se izvode za male stupnjeve n (opet, rijetko preko 4), zbog sigurnog kraćenja u formulama.

Dodatno, vrlo rijetko se koristi u proizvoljnoj točki x.

- Najčešće je x upravo neki od čvorova interpolacije x_i,
- ili neka posebna točka u kojoj dobivamo bolju ocjenu greške, uz malo jače pretpostavke na glatkoću funkcije f.

Te posebne točke su vrlo važne za praksu, a "ne vide" se iz Teorema o grešci interpolacijskog polinoma.
Razlog: "preblage" pretpostavke na f,

- jer tražimo samo da $f^{(n+1)}$ postoji na $[a, b]$.

Greška numeričkog deriviranja iz interpolacije

Dakle, moramo analizirati grešku ovakve aproksimacije

$$e_n^{(k)}(x) := f^{(k)}(x) - p_n^{(k)}(x), \quad \text{za} \quad k \leq n.$$

Ako je f dovoljno glatka funkcija, ovu grešku dobivamo deriviranjem greške e_n interpolacijskog polinoma p_n.

Kako se dobivaju posebne točke s boljom greškom?

Prvo, krećemo od jačih pretpostavki na glatkoću funkcije f.

U formulama za k-tu derivaciju, standardna pretpostavka je:

- f ima još k derivacija više, tj. $f^{(n+1+k)}$ postoji na $[a, b]$,
- za "ljepši" oblik greške, često se uzima da je zadnja derivacija neprekidna, tj. f je klase $C^{n+1+k}[a, b]$.

Numeričko deriviranje — tehnike izvoda

Tehnike za nalaženje formula, posebnih točaka i greške:

- eksplicitno deriviramo interpolacijski polinom i izraz za grešku interpolacijskog polinoma, ili
- grešku poznate formule dobivamo iz Taylorovog reda za f u odgovarajućim točkama.

Formule, također, možemo dobiti direktno iz Taylorovog reda za f, tzv. metodom neodređenih koeficijenata.

Nastavak: Formule za numeričko deriviranje i pripadnu grešku

- izvest ćemo samo za prvu derivaciju, tj. za $k = 1$,
- a navest ćemo rezultate za drugu derivaciju ($k = 2$), bez dokaza (to su zadaci).

Greška polinomne interpolacije — ponavljanje

Najprije se vratimo na ono što znamo, a to je: greške interpolacije.

Teorem. Pretpostavimo da $f^{(n+1)}$ postoji na segmentu $[a, b]$. Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$.

Za svaku točku $x \in [a, b]$, postoji točka ξ u intervalu

$$x_{\min} = \min\{x_0, \ldots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \ldots, x_n, x\} = x_{\max},$$

takva da za grešku interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e_n(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

■

Pitanje. Uz koje uvjete na f, smijemo derivirati (po x) ovaj izraz za grešku, tj. njegovu desnu stranu?

Derivacija greške interpolacije — pogrešan izvod

Probajmo! Derivacijom po x (derivacija produkta) dobivamo

$$e_n'(x) = \frac{\omega'(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{\omega(x)}{(n+1)!} \cdot \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi).$$

Jedini problematični član je zadnji. Naime, točka ξ ovisi o x.

Sasvim općenito, $\xi(x)$ uopće ne mora biti funkcija, a kamo li neprekidna, ili još i derivabilna funkcija! Dakle, ne tako.

Nažalost, često se nađe ovakav pogrešan/nepotpun "izvod":

Ako sljedeća derivacija $f^{(n+2)}$ postoji i neprekidna je na $[a, b]$,

- onda drugi član $f^{(n+1)}(\xi(x))$ smijemo derivirati po x,

tako da dobijemo ispravan rezultat za grešku $e_n'(x)$.

Greška polinomne interpolacije — ponavljanje

Treba krenuti iz Newtonovog oblika greške, bez ξ-ova.

Teorem. Pretpostavimo da f' postoji na segmentu $[a, b]$. Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f s međusobno različitim čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, za $k = 0, \ldots, n$.

Za svaku točku $x \in [a, b]$, za grešku interpolacije vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \omega(x) \, f[x_0, \ldots, x_n, x].$$

Ovo vrijedi i u čvorovima interpolacije, zato što f' postoji na cijelom $[a, b]$, pa i u čvorovima. ∎

Pitanje. Uz koje uvjete na f, smijemo derivirati (po x) ovaj izraz za grešku, tj. njegovu desnu stranu?

Treba nam derivacija podijeljene razlike.

Derivacija podijeljene razlike po argumentu

Teorem. Neka su $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ fiksni čvorovi podijeljene razlike i neka je $x \in [a, b]$ "varijabilni" čvor — po toj varijabli deriviramo. Za prvu derivaciju podijeljene razlike vrijedi

$$\frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_n, x] = f[x_0, \ldots, x_n, x, x].$$

Ako je x višestruki čvor, multipliciteta k, onda vrijedi

$$\frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_n, \underbrace{x, \ldots, x}_{k \text{ puta}}] = k \cdot f[x_0, \ldots, x_n, \underbrace{x, \ldots, x, x}_{(k+1) \text{ puta}}].$$

Funkcija f mora biti dovoljno glatka na $[a, b]$, tako da

- lijeva podijeljena razlika postoji oko točke x,
- desna podijeljena razlika postoji u točki x.

Derivacija greške interpolacije — korektan izvod

Dokaz ovog teorema ide iz rekurzije za podijeljenje razlike. Slično se može napraviti i za više derivacije (ponovljena prva).

Grešku interpolacije $e_n(x) = \omega(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x]$ deriviramo po varijabilnom čvoru x. Derivacijom produkta dobivamo

$$\begin{aligned} e_n'(x) &= \omega'(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x] + \omega(x) \cdot \frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_n, x] \\ &= \omega'(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x] + \omega(x)\, f[x_0, \ldots, x_n, x, x]. \end{aligned}$$

Ovdje je dovoljno da f' postoji na cijelom $[a, b]$, a f'' postoji u čvorovima (tu koristimo da su čvorovi međusobno različiti).

Na kraju, iskoristimo teorem srednje vrijednosti za podijeljene razlike. Zadnja razlika ima $n + 3$ čvora $\Longrightarrow$ trebamo $f^{(n+2)}$.

Derivacija greške interpolacijskog polinoma

Zaključak. Ako je $f \in C^{(n+2)}[a, b]$, onda za svaku točku $x \in [a, b]$, postoje točke ξ i ξ_1 u intervalu $(x_{\min}, x_{\max})$, gdje je

$$x_{\min} = \min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \quad x_{\max} = \max\{x_0, \ldots, x_n, x\},$$

takve da za derivaciju greške interpolacijskog polinoma vrijedi

$$\begin{aligned} e_n'(x) &= f'(x) - p_n'(x) \\ &= \frac{\omega'(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{\omega(x)}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi_1). \end{aligned}$$

■

Polinom čvorova ω ima stupanj $n + 1$, a njegova derivacija ω' ima stupanj n. Osim toga, nultočke derivacije ω' leže između čvorova x_{i-1} i x_i — i baš one su tražene posebne točke.

Greška derivacije interpolacijskog polinoma

Evo zašto. Neka je, H maksimalna udaljenost od točke x do nekog čvora

$$H := \max_{i=0,\dots,n} |x - x_i|.$$

Uz malo truda oko ocjene $\omega'(x)$, dobivamo da za red veličine greške aproksimacije prve derivacije vrijedi

$$e_n'(x) = \begin{cases} O(H^n), & \text{ako je } \omega'(x) \neq 0, \\ O(H^{n+1}), & \text{ako je } \omega'(x) = 0, \end{cases}$$

za "male" H, odnosno, za $H \to 0$.

Dakle, u nultočkama derivacije ω' dobivamo manju grešku, tj. bolju aproksimaciju derivacije $f'(x)$ — za jedan red više!

Greška derivacije — posebni slučajevi

U općem izrazu za grešku aproksimacije prve derivacije

$$e_n'(x) = \frac{\omega'(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) + \frac{\omega(x)}{(n+2)!}\, f^{(n+2)}(\xi_1),$$

posebno su interesantna dva slučaja — kad ostaje samo jedan od članova u ovoj formuli.

Ako je točka x baš jedan od čvorova interpolacije, tj. $x = x_i$, za neki i, onda je $\omega(x_i) = 0$. Za grešku u čvoru x_i onda vrijedi

$$e_n'(x_i) = \frac{\omega'(x_i)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi).$$

Napomena. Iako tada nema člana koji sadrži $f^{(n+2)}$, još uvijek $f^{(n+2)}$ mora postojati, da ne dobijemo neodređeni oblik $0 \cdot \infty$.

Numeričko deriviranje u čvoru interpolacije

Neka je p_n interpolacijski polinom za funkciju f, s čvorovima $x_0, \ldots, x_n$, napisan u Newtonovom obliku

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Ako $f^{(n+1)}$ postoji na cijelom intervalu $[a, b]$ koji sadrži sve čvorove i točku x, onda grešku možemo napisati u obliku

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi),$$

gdje je $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Polinom p_n ne ovisi o numeraciji čvorova, pa je najlakše gledati njegovu derivaciju baš u "prvom" čvoru x_0 — on se javlja u svim faktorima i u polinomu čvorova!

Numeričko deriviranje u čvoru interpolacije

Za derivaciju produkta linearnih faktora u točki x_0 vrijedi

$$[\,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)\,]'\,\Big|_{x=x_0} = (x_0-x_1)\cdots(x_0-x_k).$$

Deriviranjem p_n, a zatim uvrštavanjem $x = x_0$, dobivamo

$$\begin{aligned} p_n'(x_0) &= f[x_0,x_1] + f[x_0,x_1,x_2]\,(x_0-x_1) \\ &\qquad + \cdots + f[x_0,x_1,\ldots,x_n]\,(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Ako f ima još jednu derivaciju, tj. ako $f^{(n+2)}$ postoji na $[a,b]$, onda je greška ove aproksimacije za prvu derivaciju $f'(x_0)$

$$e_n'(x_0) = f'(x_0) - p_n'(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n).$$

Numeričko deriviranje — linearni polinom

Krenimo od najnižeg dozvoljenog stupnja, a to je $n = 1$.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_1 za funkciju f, s čvorovima x_0 i x_1, je

$$p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0).$$

Uočimo da je p_1' konstantni polinom. Prema tome,

- aproksimacija prve derivacije f' u bilo kojoj točki x

je podijeljena razlika

$$f'(x) \approx p_1'(x) = f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h},$$

gdje je $h := x_1 - x_0$ razmak čvorova.

Podijeljene razlike “unaprijed” i “unatrag”

Ako je točka x jedan od čvorova interpolacije, ove razlike imaju standardna imena, iako je to isti broj.

- Imena odgovaraju uzlaznom poretku čvorova $x_0 < x_1$.

Za $x = x_0$, aproksimaciju prve derivacije

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

zovemo podijeljena razlika unaprijed.

Za $x = x_1$, aproksimaciju prve derivacije

$$f'(x_1) \approx \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

zovemo podijeljena razlika unatrag.

"Centralna" ili "simetrična" podijeljena razlika

Ako se točka x nalazi između čvorova interpolacije x_0 i x_1, ova razlika (opet isti broj) se obično zove

- centralna ili simetrična podijeljena razlika.

Tada se čvorovi interpolacije obično označavaju s x_{-1} i x_1 (indeks sugerira relativni položaj čvorova, obzirom na x).

Dakle, za $x_{-1} < x < x_1$, aproksimaciju prve derivacije

$$f'(x) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{x_1 - x_{-1}}$$

zovemo centralna ili simetrična podijeljena razlika.

Potpuno opravdanje naziva i stvarnu "korist" dobivamo u

- specijalnom slučaju, kad je x polovište intervala $[x_{-1}, x_1]$.

Polinom prvog stupnja — posebna točka

Neka je p_1 interpolacijski polinom za f, s čvorovima x_0 i x_1. Ako f''' postoji na $[x_0, x_1]$, u točki $x \in [x_0, x_1]$, za grešku aproksimacije $f'(x)$ podijeljenom razlikom onda vrijedi

$$e_1'(x) = f'(x) - f[x_0, x_1] = \frac{\omega'(x)}{2!} f''(\xi) + \frac{\omega(x)}{3!} f'''(\xi_1).$$

Derivacija polinoma čvorova $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ je

$$\omega'(x) = 2x - (x_0 + x_1) = 2\left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right).$$

Ako je točka x polovište intervala $[x_0, x_1]$, onda je $\omega'(x) = 0$ i tada nema prvog člana

$$\omega'(x) \frac{f''(\xi)}{2!}.$$

Greška podijeljene razlike

Neka je $h = x_1 - x_0$ dijametar mreže. U "općoj" točki $x \in [x_0, x_1]$, iz $|\omega'(x)| \leq h$ i $|\omega(x)| \leq h^2/4$, dobivamo ocjenu

$$\left| f'(x) - f[x_0, x_1] \right| \leq \frac{h}{2}\,|f''(\xi)| + \frac{h^2}{24}\,|f'''(\xi_1)|.$$

Ako je $x = x_0$ ili $x = x_1$ (čvor), onda nema drugog člana. Za $x = x_0$ greška je

$$e_1'(x_0) = \frac{f''(\xi)}{2!}\,(x_0 - x_1) = -\frac{f''(\xi)}{2}\,h.$$

Greška je reda veličine $O(h)$ za $h \to 0$.

Greška simetrične podijeljene razlike

U polovištu $x_e = (x_0 + x_1)/2$, ostaje samo drugi član, pa je

$$\big|\, f'(x_e) - f[x_0, x_1] \,\big| \leq \frac{h^2}{24}\, |f'''(\xi_1)|.$$

Dakle, greška u polovištu je reda veličine $O(h^2)$, a u svim ostalim točkama je $O(h)$. Tu se vidi prava "korist"

- simetrične ili centralne razlike — kad je zaista simetrična!

Numeričko deriviranje — kvadratni polinom

Stupanj $n = 2$. Ovdje gledamo samo ekvidistantne mreže, za ilustraciju ponašanja greške (opći slučaj je Besselova aproksimacija).

Točke x_1, x_2 možemo uzeti na više raznih načina, obzirom na čvor x_0 — simetrično oko x_0 ili s iste strane x_0.

1. Simetrični izbor točaka
Izaberemo x_1 i x_2 simetrično oko x_0 (desno i lijevo), tako da je

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 - h.$$

Sugestivnija oznaka je

$$x_{-1} := x_2,$$

jer se točke pišu u prirodnom redosljedu: x_{-1}, x_0, x_1. Onda je

$$p_2'(x_0) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_{-1}]\,(x_0 - x_1).$$

Numeričko deriviranje — simetrične točke

Izračunajmo potrebne podijeljene razlike.

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$
x_{-1}	f_{-1}		
		$\dfrac{f_0 - f_{-1}}{h}$	
x_0	f_0		$\dfrac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2}$
		$\dfrac{f_1 - f_0}{h}$	
x_1	f_1		

Aproksimacija derivacije u srednjem čvoru x_0 je

$$p_2'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} - h\,\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

Uočiti: U ovoj formuli se ne pojavljuje f_0 (koef. uz f_0 je nula).

Numeričko deriviranje — simetrična razlika

Rezultat je simetrična ili centralna podijeljena razlika, tj.

- ista aproksimacija kao iz linearne interpolacije p_1, s čvorovima x_{-1} i x_1 (udaljenost je ovdje $2h$, a ne h).

Ovdje deriviramo kvadratni polinom p_2 u čvoru x_0, pa u izrazu za grešku simetrične razlike ostaje samo prvi član

$$e_2'(x_0) = \frac{f'''(\xi)}{6}\,(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_{-1}) = -h^2\,\frac{f'''(\xi)}{6}.$$

Dobivamo isti izraz za grešku kao iz p_1 (ovaj h je pola ranijeg)!

Simetrična razlika u polovištu x_0 i manja greška, obzirom na “obične” podijeljene razlike, može se gledati na dva načina:

- x_0 je posebna točka za p_1 ili čvor kvadratnog polinoma p_2.

Numeričko deriviranje — točke s iste strane

2. Točke x_1 i x_2 s iste strane x_0

Stavimo x_1 i x_2 (na primjer) desno od x_0, tako da je

$$x_1 = x_0 + h, \qquad x_2 = x_0 + 2h.$$

I ovdje su točke ekvidistantne, ali deriviramo u najljevijoj, a ne u srednjoj točki. Tablica potrebnih podijeljenih razlika je

t_j	$f[t_j]$	$f[t_j, t_{j+1}]$	$f[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]$
x_0	f_0		
		$\dfrac{f_1 - f_0}{h}$	
x_1	f_1		$\dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}$
		$\dfrac{f_2 - f_1}{h}$	
x_2	f_2		

Numeričko deriviranje — točke s iste strane

Aproksimacija derivacije u lijevom čvoru x_0 je

$$\begin{aligned} p_2'(x_0) &= f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2]\,(x_0 - x_1) \\ &= \frac{f_1 - f_0}{h} - h\,\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2} \\ &= \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h}. \end{aligned}$$

Pripadna greška je

$$e_2'(x_0) = \frac{f'''(\xi)}{6}\,(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2) = h^2\,\frac{f'''(\xi)}{3}.$$

Greška je istog reda veličine $O(h^2)$, kao u simetričnom slučaju.
Međutim, konstanta je ovdje dvostruko veća ($-1/6 \mapsto 1/3$).

Numeričko deriviranje — druga derivacija

Kvadratni interpolacijski polinom p_2 možemo iskoristiti i za aproksimaciju druge derivacije. Druga derivacija p_2'' je konstanta, pa u bilo kojoj točki x možemo uzeti $f''(x) \approx p_2''(x)$.

Neka su čvorovi interpolacije simetrično raspoređeni oko x_0, tj. $x_{-1} = x_0 - h$, $x_1 = x_0 + h$. Uz te oznake je (v. raniju tablicu)

$$p_2''(x) = 2\, f[x_0, x_1, x_{-1}] = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}.$$

Zadatak. Dokažite da za grešku $e_2''(x) := f''(x) - p_2''(x)$ vrijedi

$$e_2''(x_0) = -\frac{1}{12}\, h^2\, f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_{-1}, x_1),$$

a za sve ostale točke $x \in [x_{-1}, x_1]$ vrijedi $e_2''(x) = O(h)$. Nađite točan izraz za grešku. $\Rightarrow$ Polovište x_0 je opet posebna točka! $(\omega''(x_0) = 0)$

Numeričko deriviranje — zaključci

Formula za derivaciju postaje sve točnija,

- što su bliže točke iz kojih se derivacija aproksimira, tj. što je h manji.

Međutim, to vrijedi samo u teoriji.

U praksi, mnogi podaci su mjereni, pa nose neku pogrešku, u najmanju ruku — zbog grešaka zaokruživanja.

Osnovu numeričkog deriviranja čine podijeljene razlike.

- Ako su točke bliske, dolazi do kraćenja. Do kraćenja mora doći, zbog neprekidnosti funkcije f.

Problem je to izrazitiji, što su točke bliže, tj. što je h manji.

Dakle, imamo dva oprečna zahtjeva na veličinu h. Manji h daje bolju ocjenu greške, ali veću grešku zaokruživanja.

Numeričko deriviranje — ilustracija problema

Ilustrirajmo to analizom simetrične (ili centralne) razlike,

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + e_2'(x_0), \qquad e_2'(x_0) = -h^2\,\frac{f'''(\xi)}{6}.$$

Pretpostavimo da smo, umjesto vrijednosti f_{-1} i f_1, uzeli malo perturbirane vrijednosti (u apsolutnom smislu, da bude lakše)

$$\widehat{f}_1 = f_1 + \varepsilon_1, \qquad \widehat{f}_{-1} = f_{-1} + \varepsilon_{-1}, \qquad |\varepsilon_1|, |\varepsilon_{-1}| \leq \varepsilon.$$

Ako odatle izrazimo f_1 i f_{-1}, a zatim ih uvrstimo u formulu za derivaciju, dobivamo

$$f'(x_0) = \frac{\widehat{f}_1 - \widehat{f}_{-1}}{2h} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h} + e_2'(x_0).$$

Koliko malen smije biti h?

Prvi član s desne strane je ono što smo zaista izračunali kao aproksimaciju derivacije, a ostalo je greška.

Radi jednostavnosti analize, pretpostavimo da je

- h prikaziv u računalu,
- a greška pri računanju kvocijenta u podijeljenoj razlici je zanemariva.

U tom je slučaju napravljena ukupna greška

$$err_2 = f'(x_0) - \frac{\widehat{f}_1 - \widehat{f}_{-1}}{2h} = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}}{2h} + e_2'(x_0).$$

Ogradimo err_2 po apsolutnoj vrijednosti. Greška u prvom članu je najveća, ako su ε_1 i ε_{-1} suprotnih predznaka i maksimalne apsolutne vrijednosti ε — dobijemo $\pm(2\varepsilon)/(2h)$.

Koliko malen smije biti h?

Za drugi član koristimo ocjenu za $e_2'(x_0)$, uz pretpostavku da je f''' neprekidna na $[a, b]$. Zbrajanjem ovih ocjena dobivamo

$$|err_2| \leq \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M_3}{6} h^2, \qquad M_3 = \max_{x \in [x_{-1}, x_1]} |f'''(x)|.$$

Lako se vidi da je ocjena na desnoj strani najbolja moguća, tj. da se može dostići. Označimo tu ocjenu s $e(h)$

$$e(h) := \frac{\varepsilon}{h} + \frac{M_3}{6} h^2.$$

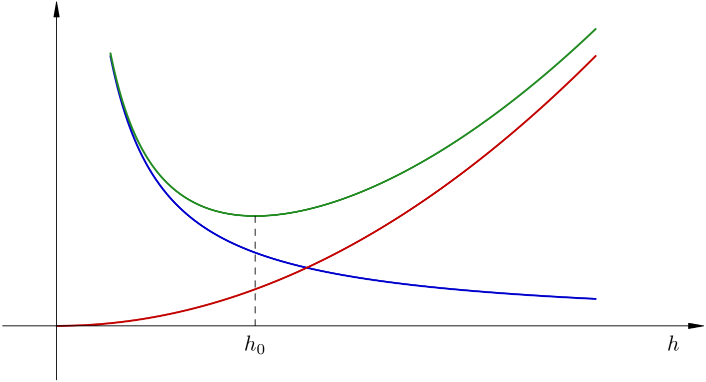
Ponašanje ove ocjene i njezina dva člana, u ovisnosti o h, možemo prikazati sljedećim grafom.

Koliko malen smije biti h?

Legenda:

- plava boja — prvi član ε/h, oblika hiperbole, koji dolazi od greške u podacima,
- crvena boja — drugi član $(M_3/6)h^2$, oblika parabole, koji predstavlja maksimalnu grešku aproksimacije derivacije simetričnom podijeljenom razlikom,
- zelena boja — označava zbroj grešaka $e(h)$.

Optimalni h_0



Optimalni h_0 i minimum ukupne greške

Odmah vidimo da $e(h)$ ima minimum po h. Taj minimum se lako računa deriviranjem. Iz

$$e'(h) = -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{M_3}{3} h = 0$$

izlazi da se lokalni minimum postiže za

$$h_0 = \left(\frac{3\varepsilon}{M_3} \right)^{1/3}.$$

Zbog $e''(h) > 0$ za $h > 0$, to je, ujedno, i globalni minimum. Najmanja vrijednost funkcije ukupne greške je

$$e(h_0) = \frac{3}{2} \left(\frac{M_3}{3} \right)^{1/3} \varepsilon^{2/3}.$$

Ukupna greška koju ne očekujemo

Vidimo da, i u najboljem slučaju,

- kad je ukupna greška najmanja (za $h = h_0$), ta je greška reda veličine $O(\varepsilon^{2/3})$, a ne $O(\varepsilon)$, kao što bismo željeli.

To predstavlja značajni gubitak točnosti. Posebno,

- daljnje smanjivanje koraka h samo povećava grešku!

Isti problem se javlja, u još ozbiljnijem obliku, kod formula za aproksimaciju derivacija višeg reda.

Zadatak. Napravite sličnu analizu za "običnu" podijeljenu razliku unaprijed, kad je greška aproksimacije derivacije

$$e_1'(x_0) = -\frac{f''(\xi)}{2}\,h.$$

Pokažite da je najmanja ukupna greška reda veličine $O(\varepsilon^{1/2})$.

Interpolacija polinomima — zaključci

Polinomna interpolacija visokog stupnja

- može imati vrlo loša svojstva — između čvorova,
- i u praksi se ne smije koristiti.

Umjesto toga, koristi se

- po dijelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu koristi se polinom fiksnog, niskog stupnja.

Pretpostavka: čvorovi interpolacije su uzlazno numerirani,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

i baš u njima su rubovi podintervala za pojedine polinome. Može i drugačije (čvorovi su različiti od rubova). Međutim, ovo je zgodno za neparne stupnjeve polinoma.

Po dijelovima polinomna interpolacija

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ koristimo polinom fiksnog stupnja m, tj. tražimo da je

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje je $p_k \in \mathcal{P}_m$.

Svaki polinom p_k (stupnja najviše m)

- određen je s $m + 1$ koeficijenata, i
- moramo odrediti koeficijente n takvih polinoma — na svakom intervalu po jedan.

Dakle, ukupan broj koeficijenata koje treba odrediti je

$$(m + 1) \cdot n.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Interpolacijski uvjeti su

$$\varphi(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Gledano na $[x_{k-1}, x_k]$, za svaki polinom p_k imamo po 2 uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, \\ p_k(x_k) &= f_k, \end{aligned} \quad \text{za} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Dakle, ukupno imamo $2n$ uvjeta interpolacije (ne samo $n + 1$).

Digresija. Ovi uvjeti interpolacije osiguravaju neprekidnost funkcije φ u svim "unutarnjim" čvorovima mreže $x_1, \ldots, x_{n-1}$, jer je

$$p_k(x_k) = p_{k+1}(x_k) = f_k, \quad k = 1, \ldots, n - 1.$$

Po dijelovima polinomna interpolacija

Zaključak.

- Uvjeta interpolacije je $2n$, a
- treba naći $(m+1) \cdot n$ koeficijenata.

Bez dodatnih uvjeta, to je moguće jedinstveno napraviti

- samo za $m = 1$,
- tj. za po dijelovima linearnu interpolaciju.

Za $m > 1$,

- dodaju se uvjeti na glatkoću interpolacijske funkcije φ u (unutarnjim) čvorovima mreže za podintervale.

Uz naš dogovor, to su upravo i čvorovi interpolacije.

Po dijelovima linearna interpolacija

Osnovna ideja po dijelovima linearne interpolacije je:

- umjesto jednog polinoma visokog stupnja,
- koristi se više polinoma, ali stupnja 1.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, polinom p_k je stupnja 1

- i jedinstveno je određen iz uvjeta interpolacije.

Zapisujemo ga relativno obzirom na početnu točku intervala (stabilnost) u obliku

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}),$$

gdje je $x \in [x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$.

Po dijelovima linearna interpolacija

Interpolacijski polinom p_k zapisujemo u Newtonovoj formi

$$p_k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1}),$$

pa je očito

$$\begin{aligned} c_{0,k} &= f[x_{k-1}] = f_{k-1}, \\ c_{1,k} &= f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \end{aligned} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Za aproksimaciju vrijednosti funkcije f u jednoj točki $x \in [a, b]$, treba

- prvo pronaći indeks k takav da vrijedi $x \in [x_{k-1}, x_k]$,
- a onda izračunati vrijednost $p_k(x)$ pripadnog linearnog polinoma p_k na tom podintervalu.

Po dijelovima linearna interpolacija

Za traženje tog intervala koristimo binarno pretraživanje.

Binarno pretraživanje

```
low = 0;
high = n;
dok je (high - low) > 1 radi {
  /* U sljedećoj liniji cjelobrojno / */
  mid = (low + high) / 2;
  ako je x < x[mid] onda
    high = mid;
  inače
    low = mid;
};
```

Trajanje ovog algoritma je proporcionalno s $\log_2(n)$.

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Ako je funkcija f klase $C^2[a,b]$, onda je pogreška takve interpolacije, zapravo,

- maksimalna pogreška od n linearnih interpolacija.

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, pogreška je

- greška linearne interpolacije polinomom p_k.

Ocjena lokalne pogreške, ovisna o točki x, je

$$|f(x) - p_k(x)| \leq |\omega_k(x)| \, \frac{M_2^{(k)}}{2!},$$

pri čemu je

$$\omega_k(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad M_2^{(k)} = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Nađimo maksimum po apsolutnoj vrijednosti za $\omega_k(x)$, na zatvorenom intervalu $[x_{k-1}, x_k]$.

Funkcija $|\omega_k|$ može imati maksimum samo na otvorenom intervalu (x_{k-1}, x_k) — u rubovima je vrijednost 0 (minimum).

Deriviranjem dobivamo da se lokalni ekstrem funkcije

$$\omega_k(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k),$$

postiže u polovištu $x_e = (x_{k-1} + x_k)/2$ (tjeme parabole).

Vrijednost funkcije ω_k u lokalnom ekstremu je

$$\omega_k(x_e) = (x_e - x_{k-1})(x_e - x_k) = -\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Za bilo koji $x \in (x_{k-1}, x_k)$ je $\omega_k(x) < 0$, pa je x_e

- točka lokalnog minimuma za ω_k, odnosno,
- točka lokalnog maksimuma za $|\omega_k|$, tj. vrijedi

$$|\omega_k(x)| \leq |\omega_k(x_e)| = \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Neka je h maksimalni razmak čvorova po svim podintervalima

$$h := \max_{k=1,\ldots,n} \{h_k := x_k - x_{k-1}\},$$

i neka je M_2 maksimum apsolutne vrijednosti f'' na cijelom intervalu $[a, b]$

$$M_2 := \max_{k=1,\ldots,n} \{M_2^{(k)}\} = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Greška po dijelovima linearne interpolacije

Na cijelom intervalu $[a, b]$, onda možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^2}{4} \cdot \frac{M_2}{2!} = \frac{1}{8} h^2 M_2.$$

Zaključak. Ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova n, tako da maksimalni razmak čvorova $h \to 0$ (kad $n \to \infty$),

- onda i maksimalna greška teži u 0, tj.
- dobivamo uniformnu konvergenciju!

Na primjer, za ekvidistantne mreže, za koje je

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b - a}{n},$$

pogreška je reda veličine h^2, odnosno, n^{-2}.

Komentar na po dijelovima linearnu interpolaciju

Mane po dijelovima linearne interpolacije:

- Potrebno je dosta podintervala da se dobije umjerena točnost aproksimacije.
- Na primjer, za $h = 0.01$, tj. za $n = 100$, greška aproksimacije je reda veličine 10^{-4}, do na faktor $M_2/8$.
- Funkcija φ nije dovoljno glatka — samo je neprekidna.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Primjer. Funkciju

$$f(x) = \ln x$$

na intervalu $[1, 100]$ aproksimiramo po dijelovima linearnom interpolacijom, s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$, koju tražimo na cijelom intervalu.

Nađite broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne ta točnost ε, uz

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu,

(b) interval $[1, 100]$ podijelimo na tri podintervala $[1, 2]$, $[2, 7]$, $[7, 100]$ i na svakom od njih koristimo posebnu ekvidistantnu mrežu.

Po obje metode nađite aproksimaciju za $\ln 2$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Rješenje. Za po dijelovima linearnu interpolaciju φ vrijedi sljedeća ocjena pogreške

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 M_2.$$

Ako je mreža ekvidistantna na $[a, b]$, onda je

$$h = \frac{b - a}{n},$$

pri čemu je n broj podintervala interpolacije.

Tražimo li točnost ε, onda mora biti

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Da bi se to postiglo, dovoljno je zatražiti da je

$$\frac{1}{8} h^2 M_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 M_2 \leq \varepsilon.$$

Odatle odmah slijedi da mora biti

$$n \geq (b-a) \sqrt{\frac{M_2}{8\varepsilon}}.$$

Sada još samo treba izračunati M_2. Deriviranjem dobivamo

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Budući da je f'' negativna, strogo rastuća funkcija, onda je maksimum njezine apsolutne vrijednosti na lijevom rubu, tj.

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{a^2}.$$

Rješenje za (a). Na intervalu $[1, 100]$ je $M_2 = 1$. Dobivamo

$$n \geq (100 - 1)\sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{9900}{\sqrt{8}} \approx 3500.1785667,$$

pa je $n = 3501$, dok je broj čvorova $n + 1 = 3502$.

Da bismo odredili aproksimaciju za $\ln 2$, moramo naći u kojem podintervalu se nalazi točka $x_* = 2$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Ako je x_* u podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, mora biti

$$a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \leq x_* \leq a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

U našem slučaju je $x_* = 2$. Onda dobivamo

$$1 + (k-1) \cdot \frac{99}{3501} \leq 2 \leq 1 + k \cdot \frac{99}{3501}$$

$$(k-1) \cdot \frac{99}{3501} \leq 1 \leq k \cdot \frac{99}{3501}$$

$$(k-1) \leq \frac{3501}{99} \leq k$$

$$(k-1) \leq 35.\dot{3}\dot{6} \leq k.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Prema tome, $k = 36$, $x_{35} \approx 1.9897172240$, $x_{36} \approx 2.0179948590$, pa imamo tablicu podijeljenih razlika

x_j	$f[x_j]$	$f[x_j, x_{j+1}]$
1.9897172240	0.6879925301	
		0.4990461264
2.0179948590	0.7021043744	

Interpolacijski polinom na tom podintervalu onda glasi:

$$p_{36}(x) = 0.6879925301 + 0.4990461264(x - 1.9897172240),$$

pa je

$$p_{36}(2) = 0.6931241097, \quad |\ln(2) - p_{36}(2)| = 0.0000230709.$$

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Rješenje za (b). Na intervalu $[1, 2]$ je $M_2 = 1$, odakle dobivamo

$$n_1 \geq (2-1)\sqrt{\frac{1}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{100}{\sqrt{8}} \approx 35.3535,$$

pa je $n_1 = 36$.

Na intervalu $[2, 7]$ je $M_2 = \frac{1}{4}$, odakle dobivamo

$$n_2 \geq (7-2)\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{500}{2\sqrt{8}} \approx 88.388834765,$$

pa je $n_2 = 89$.

Primjer — po dijelovima linearna interpolacija

Na intervalu $[7, 100]$ je $M_2 = \dfrac{1}{49}$, odakle dobivamo

$$n_3 \geq (100 - 7)\sqrt{\frac{\frac{1}{49}}{8 \cdot 10^{-4}}} = \frac{9300}{7\sqrt{8}} \approx 469.7209334,$$

pa je $n_3 = 470$.

Ukupan broj podintervala je $n = n_1 + n_2 + n_3 = 595$, što je skoro 6 puta manje nego u (a). Broj čvorova je 596.

Budući da je 2 čvor interpolacije, onda nemamo što računati, i vrijednost u čvoru je upravo $\ln 2 \approx 0.6931471806$.