Numerička matematika

12. predavanje

Saša Singer i Nela Bosner

PMF - Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočaka

Metoda tangente (Newtonova metoda)

Metoda sekante

Metoda jednostavne iteracije

Derivabilne iteracijske funkcije i metode višeg reda

Newtonova metoda za višestruke nultočke

Primjeri za jednostruke nultočke

Primjeri za višestruke nultočke

Konstrukcija iterativnih metoda

Kod konstrukcije metode bisekcije i regule falsi, koristili smo dvije startne pretpostavke o funkciji f i intervalu $[a, b]$ na kojem radimo. Te pretpostavke su:

- "glatkoća" — funkcija f je neprekidna na intervalu $[a, b]$,
- "lokacija nultočke" — u rubovima intervala vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

  tj. funkcijske vrijednosti u rubovima intervala imaju različit predznak.

Uz prvu, druga pretpostavka osigurava da f ima bar jednu nultočku u $[a, b]$

- i ove rubne točke a, b su bitne za start iteracija.

Obje metode sigurno konvergiraju, ali sporo — linearno.

Konstrukcija iterativnih metoda

U nastavku, krećemo od drugačijih pretpostavki za konstrukciju iterativnih metoda.

Ako funkcija f ima veću glatkoću na nekoj domeni,

- smijemo koristiti vrijednosti prve derivacije f' u točkama,
- može i vrijednosti viših derivacija, ako postoje.

Do sada smo veću glatkoću koristili samo kod ocjene greške.

Što se lokacije tiče, krećemo od slabijih pretpostavki.

- Za konstrukciju iterativne metode — ne pretpostavljamo ništa, tj. lokacija nultočke nije bitna.

Kod analize konvergencije metode — lokacija nultočke, naravno, ima ključnu ulogu.

Konstrukcija iterativnih metoda

Opće ideje za konstrukciju iterativnih metoda za nalaženje nultočaka funkcije su sljedeće.

- Jednu ili više startnih točaka možemo, bar u principu, izabrati bilo gdje.

Zatim, počevši od tih startnih točaka,

- iterativno generiramo neki niz aproksimacija (= metoda).

U svakoj iteraciji, novu aproksimaciju generiramo tako da je

aproksimacija nultočke = nultočka aproksimacije,

s tim da se aproksimacija određuje na osnovu jedne ili više prethodnih točaka — tzv. iteracijskom funkcijom.

Ideja iteracije je slična onoj kod integracijskih formula.

Konstrukcija iterativnih metoda

Na primjer, kod Newtonove metode, funkciju aproksimiramo

- tangentom u jednoj (zadnjoj) točki,

a kod metode sekante,

- sekantom kroz dvije (zadnje) točke.

Kod ovakvog pristupa, gubimo sigurnu konvergenciju, tj.

- može se dogoditi da metode ne konvergiraju, ovisno o startu iteracija.

Međutim, ako konvergiraju,

- konvergencija je brža — kad smo dovoljno blizu nultočke.

Za pojedine metode, navest ćemo i neke uvjete koji osiguravaju konvergenciju (slično kao kod regule falsi).

Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Pretpostavimo da je funkcija f barem

- neprekidno derivabilna na nekoj domeni,
- idealno — na cijelom $\mathbb{R}$.

Nadalje, neka je zadana, ili nekako izabrana,

- početna točka x_0.

Ideja metode tangente je

- povući tangentu na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$,

i definirati novu aproksimaciju x_1

- u točki gdje ta tangenta siječe os x — ako takva točka x_1 postoji. U protivnom, treba uzeti neku drugu točku x_0.

Ideja metode tangente (Newtonove metode)

Drugim riječima, funkciju f

- aproksimiramo pravcem — tangentom u točki $(x_0, f(x_0))$ (to je najbolja linearna aproksimacija funkcije f u okolini točke x_0),

a nepoznatu nultočku funkcije f

- aproksimiramo nultočkom x_1 tog pravca — te tangente na graf funkcije f u zadanoj točki (ako x_1 postoji).

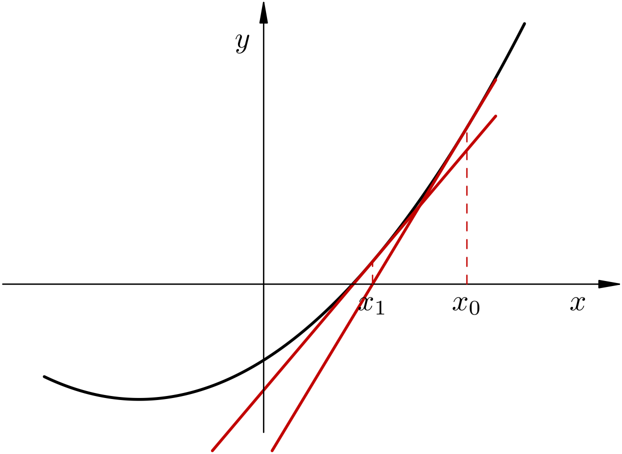
Isti postupak možemo ponoviti u točki x_1 i dobiti sljedeću točku x_2. Kad ovaj postupak iteriramo — induktivno ponovimo u svakoj sljedećoj točki x_n, za $n \geq 0$, dobivamo

- metodu tangente ili Newtonovu metodu

za nalaženje nultočke funkcije f.

Newtonova metoda — grafički

Grafički, Newtonova metoda za nalaženje nultočke izgleda ovako



Geometrijski izvod Newtonove metode

Geometrijski izvod metode je jednostavan.

- U točki x_n napišemo jednadžbu tangente i pogledamo gdje tangenta siječe os x.

Jednadžba tangente je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Iz zahtjeva $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je nova aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0.$$

Za računanje je dovoljno pretpostaviti da $f'(x_n)$ postoji (neprekidnost nije bitna) i da je $f'(x_n) \neq 0$ u svim točkama x_n.

Analitički izvod Newtonove metode

Do Newtonove metode može se doći i analitički,

- ali uz malo jače pretpostavke,
- iz kojih onda slijedi i izraz za grešku.

Neka je α neka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je

- f dva puta neprekidno derivabilna na nekom intervalu oko α.

Tj. pretpostavljamo da je $f \in C^2(I)$, gdje je I segment takav da je $\alpha \in I$.

Neka je $x_n \in I$ bilo koja točka — neka aproksimacija za α.

Onda funkciju f možemo razviti u Taylorov red oko x_n, do uključivo prvog člana, a kvadratni član je greška.

Analitički izvod Newtonove metode

Za $x \in I$, dobivamo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}\,(x - x_n)^2,$$

pri čemu je ξ_n između x i x_n, tj. $\xi_n \in I$.

Uvrštavanjem nultočke $x = \alpha \in I$, dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}\,(\alpha - x_n)^2.$$

Uz pretpostavku $f'(x_n) \neq 0$, dijeljenjem i prebacivanjem izlazi

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2\,\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Analitički izvod Newtonove metode

Ako pretpostavimo da je aproksimacija x_n dovoljno blizu α,

- tj. da je $|\alpha - x_n|$ mali,
- onda očekujemo da je $(\alpha - x_n)^2$ još puno manji.

Zato možemo “zanemariti” zadnji član u relaciji

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

i definirati novu aproksimaciju x_{n+1} kao početak desne strane

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

s idejom da je $x_{n+1} \approx \alpha$ još bolja aproksimacija od x_n.

Relacija za grešku Newtonove metode

Oduzimanjem odmah dobivamo i izraz koji veže greške dviju susjednih iteracija

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Iz ovog "izvoda" samo očekujemo da se greška "smanjuje", ali to tek treba dokazati, uz odgovarajuće pretpostavke!

Sasvim općenito, to ne mora vrijediti!

Čak i kad startamo u nekom intervalu $I = [a, b]$ koji sadrži nultočku α, bez dodatnih pretpostavki — nema garancije

- da aproksimacije ostaju u tom intervalu I,
- a kamo li da konvergiraju (v. primjere kasnije).

Napomene o konvergenciji Newtonove metode

Dakle, Newtonova metoda ne mora konvergirati prema nultočki!

S druge strane, dokazat ćemo da ovaj zaključak vrijedi

- kad je x_n, odnosno, startna točka x_0 — dovoljno blizu α.

Takva konvergencija se obično naziva

- lokalna konvergencija metode.

Općenito, zaključke o konvergenciji metode (uz dovoljno jake pretpostavke) možemo podijeliti u tri grupe:

- brzina (lokalne) konvergencije — ako niz konvergira,
- lokalna konvergencija metode — uz start dovoljno blizu,
- globalna konvergencija metode na nekom intervalu I.

Brzina konvergencije Newtonove metode

Brzina lokalne konvergencije izlazi direktno iz izraza za grešku u susjednim iteracijama.

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i pretpostavimo da je $f \in C^2(I)$, na nekom segmentu I koji sadrži tu nultočku α.

Ako niz aproksimacija x_n, generiran Newtonovom metodom, konvergira prema α,

- onda je brzina konvergencije (barem) kvadratna,

i na limesu vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Brzina konvergencije Newtonove metode

Dokaz. Za greške u susjednim iteracijama vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

s tim da je ξ_n između x_n i α.

Po pretpostavci, niz x_n konvergira prema α. Onda mora vrijediti i $\xi_n \to \alpha$.

Iz $f \in C^2(I)$ slijedi da su f' i f'' neprekidne na I, pa dobivamo

$$f'(x_n) \to f'(\alpha), \quad f''(\xi_n) \to f''(\alpha).$$

Na kraju, iz pretpostavke da je α jednostruka nultočka, slijedi $f'(\alpha) \neq 0$.

Zato smijemo prijeći na limes $x_n \to \alpha$ u relaciji za grešku.

Brzina konvergencije Newtonove metode

Prijelazom na limes $x_n \to \alpha$ dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Odavde čitamo da je Newtonova metoda, kad konvergira,

- (barem) kvadratno konvergentna.

Ako je $f''(\alpha) = 0$, konvergencija može biti i brža od kvadratne!

Ipak, treba biti oprezan, jer prethodni zaključci vrijede

- samo ako je $f'(\alpha) \neq 0$, tj. ako je α jednostruka nultočka.

Za višestruke nultočke ovo ne vrijedi, jer

- konvergencija može biti i samo linearna (v. kasnije).

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Sljedeći rezultat o konvergenciji Newtonove metode je

- lokalna konvergencija za jednostruke nultočke α,

uz pretpostavku da je funkcija $f \in C^2(I)$, na nekom segmentu I koji sadrži tu nultočku α.

Neformalno rečeno, tvrdnja kaže sljedeće:

- ako je početna točka x_0 dovoljno blizu nultočke α,
- onda je Newtonova metoda

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

  dobro definirana — tj. vrijedi $f'(x_n) \neq 0$, za sve $n \geq 0$,
- i ovaj niz konvergira prema α (i to barem kvadratno).

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Prava formulacija je malo složenija, jer precizno opisuje što znači "dovoljno blizu".

Teorem. Neka je α jednostruka nultočka funkcije f i neka je

$$I_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| \leq \varepsilon\}$$

segment radijusa ε oko α (duljina tog segmenta je 2ε).

Pretpostavimo da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$, za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$. Definiramo brojeve

$$m_1(\varepsilon) := \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|, \quad M_2(\varepsilon) := \max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|,$$

i, na kraju,

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}.$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Onda postoji $\varepsilon > 0$, toliko mali da vrijedi

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1.$$

Nadalje, za svaki takav ε, za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$,

- Newtonova metoda je dobro definirana,
- i konvergira prema jedinoj nultočki $\alpha \in I_\varepsilon$.
  (Već znamo da je tada konvergencija barem kvadratna.)

Dokaz. Ide u 4 koraka i počiva na sljedeće dvije pretpostavke:

- α je jednostruka nultočka, tj. vrijedi $f'(\alpha) \neq 0$,
- po definiciji I_ε, za svaku točku $x \in I_\varepsilon$ vrijedi $|x - \alpha| \leq \varepsilon$.

To ćemo iskoristiti nekoliko puta!

Lokalna konvergencija Newtonove metode

1. korak. Pokažimo da postoji $\varepsilon > 0$, takav da je

$$\varepsilon M(\varepsilon) < 1.$$

Iz pretpostavke da je $f \in C^2(I_\varepsilon)$, za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$, slijedi da je

$$M(\varepsilon) := \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}$$

rastuća funkcija od ε (za dovoljno male $\varepsilon > 0$), jer se

- $\max |f''(x)|$ u brojniku i $\min |f'(x)|$ u nazivniku,
- uzimaju po sve većim segmentima I_ε oko α,
- tako da brojnik raste, a nazivnik pada (kad ε raste).

Naravno, ako f' ima nultočku u nekom segmentu I_ε, onda je $m_1(\varepsilon) = 0$, odnosno, $M(\varepsilon) = \infty$, i to treba izbjeći!

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Međutim, zbog $f'(\alpha) \neq 0$ i neprekidnosti f' oko α (za sve dovoljno male $\varepsilon > 0$), sigurno postoji (dovoljno mali) $\varepsilon_0 > 0$,

- takav da je $f'(x) \neq 0$, za svaki $x \in I_{\varepsilon_0}$,
- pa onda vrijedi $m_1(\varepsilon_0) > 0$, odnosno, $M(\varepsilon_0) < \infty$.

No, čim je $M(\varepsilon_0)$ "konačan", onda postoji i $\varepsilon > 0$, takav da je $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, i vrijedi

$$\varepsilon M(\varepsilon_0) < 1.$$

Zato što $M(\varepsilon)$ raste po ε, iz $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ izlazi da je i

$$\varepsilon M(\varepsilon) < \varepsilon M(\varepsilon_0) < 1.$$

Osim toga, iz $m_1(\varepsilon) \geq m_1(\varepsilon_0) > 0$, slijedi da je $f'(x) \neq 0$, za svaki $x \in I_\varepsilon$. Dodatno, iz neprekidnosti f', vidimo da

- $f'(x)$ ima isti predznak kao i $f'(\alpha)$, za svaki $x \in I_\varepsilon$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

2. korak. Pokažimo da je α jedina nultočka funkcije f u I_ε.

Upravo smo pokazali da je $f'(x) \neq 0$ na I_ε, pa je funkcija f monotona na I_ε, tj. može imati najviše jednu nultočku.

Dakle, α je jedina nultočka od f u I_ε.

Digresija: Isti zaključak se može dobiti i direktno, iz $f'(\alpha) \neq 0$.

Iz Taylorovog razvoja f oko α, za bilo koji $x \in I_\varepsilon$, imamo

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - \alpha)^2,$$

za neki ξ između α i x, pa je i $\xi \in I_\varepsilon$.

Znamo da je $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$, pa izlučimo $f'(\alpha)$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dobivamo

$$f(x) = f'(\alpha)(x - \alpha) \cdot \left(1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)}(x - \alpha)\right).$$

Prvi faktor je, očito, različit od nule. Za drugi član u trećem faktoru imamo ocjenu

$$\left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)}(x - \alpha) \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)}\,\varepsilon = \varepsilon M(\varepsilon) < 1,$$

pa za treći faktor vrijedi

$$1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\alpha)}(x - \alpha) > 0.$$

Dakle, $f(x) = 0$, za neki $x \in I_\varepsilon$, ako i samo ako je drugi faktor jednak nuli, tj. za $x = \alpha$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

3. korak. Neka je $x_0 \in I_\varepsilon$ bilo koja startna točka. Onda je $f'(x_0) \neq 0$, pa je prvi korak Newtonove metode dobro definiran

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Kad je $n = 0$, relacija za greške dviju susjednih iteracija glasi

$$\alpha - x_1 = -(\alpha - x_0)^2 \, \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)},$$

gdje je ξ_0 između x_0 i α, pa vrijedi i $\xi_0 \in I_\varepsilon$.

Za drugi faktor na desnoj strani onda vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_0)}{2f'(x_0)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Zatim, imamo redom,

$$\begin{aligned}
|\alpha - x_1| &\leq |\alpha - x_0|^2\, M(\varepsilon) \quad && (\text{iskoristimo } |\alpha - x_0| \leq \varepsilon) \\
&\leq |\alpha - x_0|\, \varepsilon M(\varepsilon) \quad && (\text{zbog } \varepsilon M(\varepsilon) < 1) \\
&< |\alpha - x_0| \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

pa je $|\alpha - x_1| \leq \varepsilon$, što dokazuje da je $x_1 \in I_\varepsilon$.

Dakle, ako startamo u bilo kojoj točki $x_0 \in I_\varepsilon$, onda

- sljedeća aproksimacija x_1 po Newtonovoj metodi, ostaje unutar segmenta I_ε.

Induktivnom primjenom ovog argumenta (x_0 je proizvoljan), dobivamo da isto vrijedi i za svaku sljedeću aproksimaciju x_n.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Dakle, za svaki $n \geq 0$, u točki x_n vrijedi $f'(x_n) \neq 0$, pa je sljedeća aproksimacija dobro definirana relacijom

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

i ostaje unutar polaznog segmenta, tj. vrijedi $x_{n+1} \in I_\varepsilon$.

4. korak. Preostaje još samo dokazati konvergenciju niza (x_n) prema nultočki α.

Relacija koja veže greške dviju susjednih iteracija x_n i x_{n+1} je

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \, \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)},$$

gdje je ξ_n između x_n i α, pa je $\xi_n \in I_\varepsilon$.

Lokalna konvergencija Newtonove metode

Za drugi faktor na desnoj strani opet vrijedi ocjena

$$\left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| \leq \frac{M_2(\varepsilon)}{2m_1(\varepsilon)} = M(\varepsilon).$$

Slično kao u prethodnom koraku, dobivamo redom

$$\begin{aligned} |\alpha - x_{n+1}| &\leq |\alpha - x_n|^2 \, M(\varepsilon) \quad \text{(iskoristimo } |\alpha - x_n| \leq \varepsilon\text{)} \\ &\leq \varepsilon M(\varepsilon) \, |\alpha - x_n| \\ &\leq \ldots \text{ (induktivno spuštamo } n \text{ do nule)} \\ &\leq \big(\varepsilon M(\varepsilon)\big)^{n+1} \, |\alpha - x_0|. \end{aligned}$$

Zbog $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$, odavde odmah slijedi da $x_n \to \alpha$ kad $n \to \infty$ (= “geometrijska” konvergencija s faktorom $c = \varepsilon M(\varepsilon)$).

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Ovaj rezultat o lokalnoj konvergenciji teško možemo iskoristiti u praksi — za osiguranje konvergencije Newtonove metode

- bar iz neke startne točke x_0, koju znamo naći (što bi bilo sasvim dovoljno za nalaženje nultočke).

Problem = traženi ε iz tvrdnje ne znamo i nije ga lako naći!

Pretpostavimo da smo locirali nultočku funkcije f u segmentu $[a, b]$ i znamo da je $f \in C^2[a, b]$. Neka je "globalno" na $[a, b]$

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Pretpostavimo još da je

- f strogo monotona na $[a, b]$, što je ekvivalentno s $m_1 > 0$.

Tada f ima jedinstvenu jednostruku nultočku α u $[a, b]$.

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

To znači da imamo sve osnovne pretpostavke prethodnog teorema o lokalnoj konvergenciji Newtonove metode

- i još znamo da je $f' \neq 0$ na $[a, b]$.

Umjesto "lokalnog" $M(\varepsilon)$, izračunamo "globalnu" veličinu

$$M := \frac{M_2}{2m_1}.$$

Sad možemo pokušati izabrati ε tako da vrijedi

- $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$ — pa mora biti $M \geq M(\varepsilon)$, jer $M(\varepsilon)$ raste s ε,
- i da je $\varepsilon M < 1$ — to onda osigurava i $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Nažalost, prvi uvjet je problem!

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Primjer. Uzmemo ε tako "globalno" vrijedi

$$\varepsilon M < 1.$$

Nažalost, bez dodatnih uvjeta, još uvijek se može dogoditi da

- pripadni interval I_ε nije sadržan u $[a, b]$, već "viri" preko ruba intervala $[a, b]$.

To se sigurno događa ako je $\varepsilon > (b - a)/2$. Inače, dovoljno je da nultočka α leži blizu jednog ruba intervala — bliže od ε.

- Tada ne mora vrijediti $M \geq M(\varepsilon)$, pa ni $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Onda više nemamo garanciju lokalne konvergencije, tj.

- čak i da uzmemo početnu iteraciju $x_0 \in I_\varepsilon \cap [a, b]$,
- već prva sljedeća iteracija x_1 može izaći izvan $[a, b]$, čak izvan I_ε (taj interval ne znamo, jer ne znamo α).

Lokacija i osiguranje konvergencije — problem

Naime, 3. korak je ključni dio teorema o lokalnoj konvergenciji!

Poanta. Treba uzeti još manji ε tako da bude $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$, tj. tako da vrijedi još i

$$a + \varepsilon \leq \alpha \leq b - \varepsilon.$$

No, baš to je problem — jer ne znamo gdje je α.

Kad ima neke koristi? Ako nađemo ε takav da je

$$\varepsilon M < 1 \quad \text{i} \quad \varepsilon < \frac{b-a}{2},$$

i još pokažemo da je $\alpha \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ — na primjer,

- provjerom da $f(a)$ i $f(a + \varepsilon)$ imaju isti znak, te $f(b)$ i $f(b - \varepsilon)$ imaju isti znak,

onda znamo da je $I_\varepsilon \subseteq [a, b]$ i da vrijedi $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$.

Problem — “lokalnost” lokalne konvergencije

Tada imamo sigurnu lokalnu konvergenciju Newtonove metode

- za bilo koju startnu točku $x_0 \in I_\varepsilon$.

Međutim, još uvijek ne znamo gdje treba startati, jer ne znamo gdje se nalazi “pravi” I_ε unutar $[a, b]$. Što sad?

Možemo napraviti pretragu intervala $[a, b]$ s korakom $h \leq 2\varepsilon$, tj. “testirati” startne točke oblika

$$x_0 = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

Bar jedna takva startna točka x_0 daje sigurnu konvergenciju Newtonove metode. Oprez: za svaku takvu točku x_0 treba

- pažljivo provjeravati sve sljedeće iteracije x_n — ostaju li unutar $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, ili, barem, unutar $[a, b]$.

Finale: ova pretraga je spora — bisekcija je, vjerojatno, brža!

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Pretpostavimo da sve iteracije x_n leže unutar intervala $[a, b]$. Onda možemo dobiti i ocjenu

- lokalne greške susjednih iteracija u Newtonovoj metodi,

u terminima veličina M_2 i m_1 (na tom intervalu $[a, b]$).

Iz ranije relacije za grešku

$$\alpha - x_n = -(\alpha - x_{n-1})^2 \, \frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})},$$

gdje je ξ_{n-1} između nultočke α i x_{n-1}, odmah slijedi

$$|\alpha - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1} \, (\alpha - x_{n-1})^2.$$

Ova ocjena nije naročito korisna za praksu, jer nultočku α ne znamo. Tražimo ocjenu preko veličina koje znamo izračunati.

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Za dvije susjedne iteracije x_{n-1} i x_n u Newtonovoj metodi, također, vrijedi veza preko Taylorove formule

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\ + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2,$$

pri čemu je ξ_{n-1} između x_{n-1} i x_n.

Po definiciji iteracija u Newtonovoj metodi, vrijedi

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

pa je

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Sad iskoristimo pretpostavku da je x_{n-1}, $x_n \in [a, b]$, pa onda mora biti i $\xi_{n-1} \in [a, b]$. Dobivamo

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2}\,(x_n - x_{n-1})^2.$$

Kao i kod metode bisekcije, ako je $m_1 > 0$, onda vrijedi ocjena

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Kombinacijom ovih ocjena dobivamo ocjenu greške za svaku iteraciju x_n u Newtonovoj metodi — preko razlike $x_n - x_{n-1}$,

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}\,(x_n - x_{n-1})^2.$$

Ocjena greške iteracija u Newtonovoj metodi

Ova ocjena se može iskoristiti. Ako je ε tražena točnost, onda zahtjev

$$\frac{M_2}{2m_1}\,(x_n - x_{n-1})^2 \le \varepsilon$$

garantira da je $|\alpha - x_n| \le \varepsilon$, do na greške zaokruživanja.

Pripadni test zaustavljanja iteracija u Newtonovoj metodi je

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}.$$

Naravno, uz ovaj, možemo koristiti i raniji test zaustavljanja

$$|f(x_n)| \le m_1\varepsilon.$$

Veznik između ova dva testa je ili, tj. pitamo je li ispunjen jedan ili drugi.

Globalna konvergencija Newtonove metode

U analizi konvergencije i ocjenama greške koristili smo pretpostavku da je

- f strogo monotona na $[a, b]$,
- tj. da prva derivacija f' ima fiksni predznak na $[a, b]$.

Ako i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, onda možemo dobiti i

- globalnu konvergenciju Newtonove metode,
- uz odgovarajući izbor startne točke x_0,

slično kao kod regule falsi.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Teorem. Neka je $f \in C^2[a,b]$ i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Ako prva i druga derivacija f' i f'' nemaju nultočku u $[a,b]$, tj.

- ako f' i f'' imaju konstantni predznak na $[a,b]$,

onda Newtonova metoda konvergira prema

- jedinstvenoj jednostrukoj nultočki α, funkcije f u $[a,b]$,

i to za svaku startnu aproksimaciju $x_0 \in [a,b]$, za koju vrijedi

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Dokaz. Gledamo samo jedan od četiri moguća slučaja za predznake f' i f''.

U ostalim slučajevima, dokaz ide potpuno analogno.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Uzmimo, na primjer, da je $f' > 0$ i $f'' > 0$ na $[a, b]$, tj. da je

- f monotono rastuća i konveksna na $[a, b]$.

U tom slučaju, jer f raste, mora biti $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$.

Zbog $f'' > 0$, startna aproksimacija x_0

- mora zadovoljavati $f(x_0) > 0$, tj. $\alpha < x_0$, jer f raste.

U praksi možemo uzeti $x_0 = b$, jer je to jedina točka za koju sigurno znamo da vrijedi $f(x_0) > 0$.

Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ niz iteracija generiran Newtonovom metodom iz bilo koje startne točke x_0, za koju je $f(x_0) > 0$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Globalna konvergencija Newtonove metode

Za početak, znamo da je $x_0 > \alpha$. Tvrdimo da je

- $\alpha < x_n \leq x_0$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz ide indukcijom, a bazu već imamo.

Za korak indukcije, pretpostavimo da je $\alpha < x_n \leq x_0$. Onda je

$$f(x_n) > f(\alpha) = 0.$$

Osim toga, jer f raste, znamo da je $f'(x_n) > 0$, pa dobivamo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n \leq x_0,$$

što pokazuje da niz (x_n) monotono pada.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Iz Taylorove formule oko x_n je

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2,$$

pri čemu je $\xi_n \in (\alpha, x_n) \subset [a, b]$. Zbog toga je $f''(\xi_n) > 0$, pa je

$$f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) < 0,$$

odakle slijedi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \alpha.$$

Dakle, niz (x_n) je odozdo ograničen s α i monotono pada, pa postoji limes

$$\alpha' := \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Odmah znamo i da je $\alpha \le \alpha' \le x_0$, tj. vrijedi $\alpha' \in [a, b]$.

Globalna konvergencija Newtonove metode

Prijelazom na limes u formuli za Newtonove iteracije dobivamo

$$\alpha' = \alpha' - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')}.$$

Zbog $f'(\alpha') \neq 0$ (jer $\alpha' \in [a, b]$), odavde slijedi $f(\alpha') = 0$.

No, znamo da f ima

- jedinstvenu nultočku α u intervalu $[a, b]$,

pa mora biti $\alpha = \alpha'$. Dakle, niz (x_n) konvergira baš prema α.

Preostala tri slučaja za predznake prve i druge derivacije dokazuju se potpuno analogno. ∎

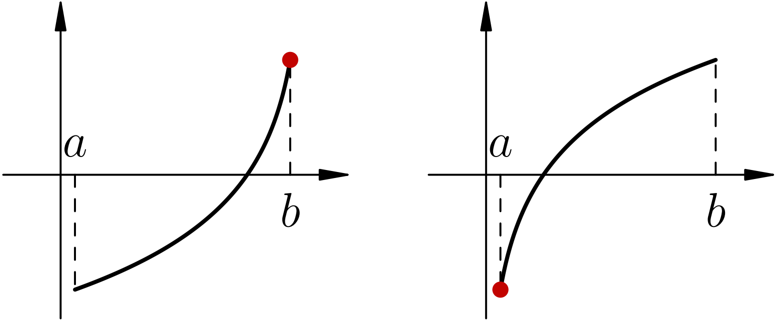
Uvjet $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, na izbor startne točke u prethodnom teoremu, ima vrlo jednostavnu geometrijsku interpretaciju.

Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Ako pogledamo graf funkcije f na $[a, b]$, startnu točku x_0

- treba odabrati na “strmijoj” strani grafa funkcije.

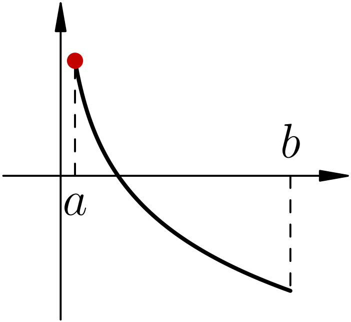
Izbor startne točke x_0 — ako je $f' > 0$, tj. f raste.

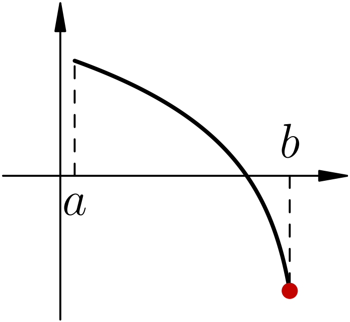


$f'' > 0$ $\qquad$ $f'' < 0$

Izbor startne točke za Newtonovu metodu

Izbor startne točke x_0 — ako je $f' < 0$, tj. f pada





$f'' > 0$ $\qquad$ $f'' < 0$

Newtonova metoda — komentari

Prednost:

- brza = kvadratna konvergencija, za jednostruke nultočke.

Potencijalna mana: osim vrijednosti funkcije,

- trebamo i vrijednost prve derivacije u svakoj iteraciji.

Ako se f' komplicirano računa,

- Newtonova metoda može biti sporija od metode sekante,
- iako ima veći red konvergencije (v. malo dalje).

Uvodno o metodi sekante

U Newtonovoj metodi koristimo

- tangentu u točki x_0 kao aproksimaciju funkcije f.

Ako ne znamo derivaciju f' funkcije f, ili se ona teško računa, onda možemo

- tangentu u točki x_0 aproksimirati sekantom kroz dvije startne točke x_0 i x_1,

što odgovara aproksimaciji derivacije $f'(x_0)$ podijeljenom razlikom

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1].$$

Tako dobivamo metodu sekante.

Ideja metode sekante

Počinjemo s dvije početne točke x_0 i x_1. Poredak je bitan!

Ideja metode sekante je

- povući sekantu grafa funkcije f kroz točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$,

i definirati novu aproksimaciju x_2

- u točki gdje ta sekanta siječe os x (ako x_2 postoji).

Postupak nastavljamo povlačenjem sekante

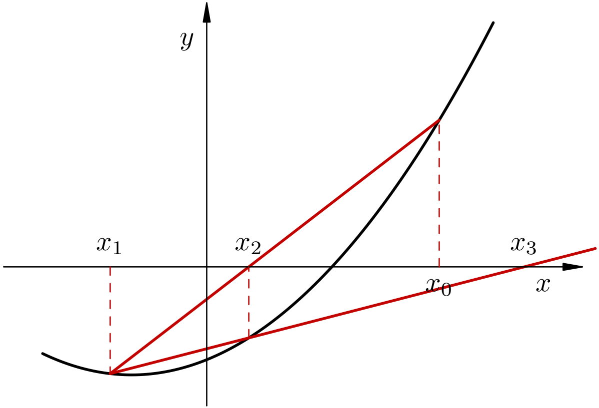
- kroz posljednje dvije točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$,

i tako redom.

Napomena. Tu je ključna razlika od regule falsi — tamo se jedna početna točka drži fiksnom.

Metoda sekante — grafički

Grafički, metoda sekante za nalaženje nultočke izgleda ovako



Primijetite da je treća iteracija izašla izvan početnog intervala, pa metoda sekante ne mora konvergirati. Za obrnute x_0 i x_1?

Geometrijski izvod metode sekante

Geometrijski izvod metode je jednostavan.

- Napišemo jednadžbu sekante u točkama x_{n-1} i x_n i pogledamo gdje taj pravac siječe os x.

Jednadžba sekante je (linearna interpolacija za f u x_{n-1} i x_n)

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \, (x - x_n).$$

Iz zahtjeva $y = 0$ za $x = x_{n+1}$, izlazi da je nova aproksimacija x_{n+1} dana izrazom

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \, \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

Za računanje je dovoljno pretpostaviti da je $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ u svim "susjednim" točkama (iteracijama) x_{n-1} i x_n.

Formula za iteracije u metodi sekanti

Formulu za metodu sekante možemo dobiti i iteriranjem početne formule za regulu falsi.

Izraz za novu aproksimaciju možemo napisati i ovako

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]},$$

za $n \geq 1$.

Relacija koja "veže" greške susjednih aproksimacija, izvodi se na isti način kao kod regule falsi, i ima oblik

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)\,(\alpha - x_{n-1})\,\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(\xi_n)},$$

gdje je ζ_n između x_{n-1}, x_n i α, a ξ_n između x_{n-1} i x_n.

Red konvergencije metode sekante

Iz ove relacije može se izračunati red konvergencije metode sekante, uz odgovarajuće pretpostavke. Dobivamo da je

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

Dokaz je dosta kompliciran (i ima veze s Fibonaccijevim brojevima, a p je veće rješenje jednadžbe $p^2 = p + 1$).

Napomena. Metoda sekante se još naziva i

- metoda (inverzne) linearne interpolacije,

jer sljedeću aproksimaciju x_{n+1} dobivamo kao

- nultočku linearne interpolacije za f, u prethodne dvije iteracije x_{n-1} i x_n.

Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Uvodno o metodi jednostavne iteracije

Problem. Pretpostavimo da tražimo rješenje jednadžbe

$$x = \varphi(x).$$

Točke α za koje je $\alpha = \varphi(\alpha)$ zovu se fiksne točke funkcije φ.

Ideja. Definiramo jednostavnu iteracijsku funkciju (iteracijsku funkciju koja "pamti" samo jednu prethodnu točku), s

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

uz x_0 kao neku početnu aproksimaciju za α.

Primjer. Newtonovu metodu možemo interpretirati i kao jednostavnu iteraciju, uz

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Reformulacija problema $f(x) = 0$

Uobičajeno, rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$, pa taj problem treba reformulirati u problem jednostavne iteracije, odnosno, traženja fiksne točke. Za to postoji mnogo načina.

Primjer. Reformulirajmo problem "kvadratnog korijena" iz a

$$f(x) = x^2 - a = 0, \quad \text{za} \quad a > 0,$$

u oblik jednostavne iteracije.

To možemo napraviti na razne načine. Nekoliko mogućnosti:

1. $x = x^2 + x - a$ (dodamo x na obje strane) ili, općenitije, $x = x + c(x^2 - a)$, za neki $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = \frac{1}{2}(x + a/x)$, što izlazi iz $x = x + \frac{1}{2}(a/x - x)$.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Prirodno je pitanje kako se različite jednostavne iteracije ponašaju. Odgovor dobivamo sljedećim nizom tvrdnji.

Lema (Egzistencija). Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$a \leq \varphi(x) \leq b, \quad \forall x \in [a, b],$$

u oznaci $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$. Tada jednostavna iteracija $x = \varphi(x)$ ima bar jedno rješenje, tj. bar jednu fiksnu točku α, na $[a, b]$.

Dokaz. Za neprekidnu funkciju $g(x) = \varphi(x) - x$ na $[a, b]$ vrijedi

$$g(a) = \varphi(a) - a \geq 0, \qquad g(b) = \varphi(b) - b \leq 0.$$

Dakle, funkcija $g(x) = \varphi(x) - x$ mijenja predznak na $[a, b]$, a to može samo prolaskom kroz nultočku α (neprekidna je!). $\blacksquare$

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Teorem (Kontrakcija). Neka je funkcija φ neprekidna na $[a, b]$ i neka je

$$\varphi([a, b]) \subseteq [a, b].$$

Pretpostavimo da postoji konstanta q, takva da je $0 < q < 1$, i vrijedi

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q\,|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

To svojstvo kaže da je φ kontrakcija na $[a, b]$ (približava točke).

Onda funkcija φ ima jedinstvenu fiksnu točku α unutar $[a, b]$.
Nadalje, za proizvoljnu startnu točku $x_0 \in [a, b]$, niz iteracija

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

konvergira prema α.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Dokaz. Prema prethodnoj lemi, postoji bar jedna fiksna točka $\alpha \in [a, b]$. Pokažimo da ne može postojati više od jedne.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje barem dvije fiksne točke. Uzmimo bilo koje dvije od njih, nazovimo ih α i β. Budući da su to fiksne točke za φ, onda vrijedi

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \text{i} \quad \varphi(\beta) = \beta.$$

Po pretpostavci, funkcija φ je kontrakcija na $[a, b]$, pa je

$$|\alpha - \beta| = |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| \leq q|\alpha - \beta|,$$

odakle slijedi

$$(1 - q)\,|\alpha - \beta| \leq 0.$$

Zbog $1 - q > 0$, mora biti $\alpha = \beta$, što dokazuje i jedinstvenost.

Jednostavne neprekidne iteracijske funkcije

Dokažimo još konvergenciju niza jednostavnih iteracija $(x_n = \varphi(x_{n-1}), n \geq 1)$, za proizvoljnu startnu točku $x_0 \in [a, b]$.

Uočimo da $x_{n-1} \in [a, b]$ povlači da je $x_n = \varphi(x_{n-1}) \in [a, b]$. Nadalje, jer je φ kontrakcija, vrijedi

$$|\alpha - x_n| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|\alpha - x_{n-1}|.$$

Odavde, indukcijom po n, dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq q^n|\alpha - x_0|, \quad n \geq 1.$$

Ako pustimo $n \to \infty$, onda $q^n \to 0$, pa vrijedi $x_n \to \alpha$. ■

Primijetimo da posljednja formula znači da metoda jednostavne iteracije konvergira linearno, s faktorom q.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Uz pretpostavke prethodnog teorema — da je

- φ neprekidna kontrakcija s faktorom $q < 1$ na $[a, b]$,

lako se izvodi ocjena greške za metodu jednostavne iteracije.

Za dvije susjedne iteracije $x_n = \varphi(x_{n-1})$ i $x_{n-1} = \varphi(x_{n-2})$ vrijedi

$$|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}|.$$

Prethodnu relaciju, induktivno po n, možemo raspisati kao

$$|x_n - x_{n-1}| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|.$$

Za ocjenu prave greške trebamo ocjenu vrijednosti $|\alpha - x_n|$, za bilo koji $n \geq 0$.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Zato, za fiksni n, gledamo ponašanje niza $|x_{n+p} - x_n|$, uz $p > 0$, s idejom da napravimo limes $p \to \infty$. Izlazi

$$
\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq q^p|x_n - x_{n-1}| + \cdots + q|x_n - x_{n-1}| \\
&= q(q^{p-1} + \cdots + 1)\,|x_n - x_{n-1}| \\
&= q\,\frac{1-q^p}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| \leq \text{(vrijedi } 1 - q^p \leq 1) \\
&\leq \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}|.
\end{aligned}
$$

Na limesu kad $p \to \infty$, vrijedi $x_{n+p} \to \alpha$.

Ocjena greške za metodu jednostavne iteracije

Lijeva strana postaje $|\alpha - x_n|$ i izlazi sljedeća ocjena pogreške

$$
\begin{aligned}
|\alpha - x_n| &\leq \frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| \\
&\leq (\text{iskoristimo ocjenu } |x_n - x_{n-1}| \leq q^{n-1}|x_1 - x_0|) \\
&\leq \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|.
\end{aligned}
$$

Ako želimo da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je tražiti da je desna strana neke od prethodnih nejednakosti manja ili jednaka ε.

Za desnu stranu možemo uzeti i prvi red, koji ovisi o x_n i x_{n-1},

$$
\frac{q}{1-q}\,|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon,
$$

pa ćemo dobiti . . .

Kriteriji zaustavljanja

... dinamički kriterij za zaustavljanje procesa iteracija

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\varepsilon(1-q)}{q}.$$

Ako želimo "rano" znati potreban broj iteracija n, onda treba zahtijevati (donji red ovisi samo o prve dvije iteracije x_0 i x_1)

$$\frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon,$$

pa dobivamo

$$n \geq \frac{\log \dfrac{\varepsilon(1-q)}{|x_1 - x_0|}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon + \log(1-q) - \log |x_1 - x_0|}{\log q}.$$

Kriteriji zaustavljanja

Kriterij zaustavljanja možemo napisati i tako da ovisi samo o rubovima intervala a i b, neovisno o iteracijama.

U teoremu o kontrakciji, kod dokaza konvergencije, pokazali smo da vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq q^n |\alpha - x_0|.$$

Za start x_0 vrijedi $|\alpha - x_0| \leq b - a$, pa je $|\alpha - x_n| \leq q^n(b - a)$. Iz zahtjeva

$$q^n(b - a) \leq \varepsilon,$$

dobivamo ocjenu "unaprijed" za broj iteracija n

$$n \geq \frac{\log \dfrac{\varepsilon}{b - a}}{\log q} = \frac{\log \varepsilon - \log(b - a)}{\log q}.$$

Opći slučaj — kontrakcija i Banachov teorem

Napomena. U općem slučaju metode jednostavnih iteracija (ili sukcesivnih aproksimacija), iteracijska funkcija φ ne mora biti neprekidna — što smo koristili u prvoj lemi (egzistencija α).

Dovoljno je pretpostaviti da je

- φ kontrakcija, ali na potpunom metričkom prostoru X.

To je tzv. Banachov teorem o fiksnoj točki.

Skica dokaza. Prvo se dokaže da je niz iteracija Cauchyjev niz (kao u ocjeni greške, uz zamjenu $|x - y|$ s $d(x, y)$ = udaljenost)

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

Zatim, potpunost prostora $X \Longrightarrow$ konvergencija niza $x_n \to \alpha$.
Na kraju se pokaže da je α fiksna točka za φ i jedinstvenost. $\blacksquare$

Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Konstrukcija iterativnih metoda za nalaženje nultočaka

Metoda tangente (Newtonova metoda)

Metoda sekante

Metoda jednostavne iteracije

Derivabilne iteracijske funkcije i metode višeg reda

Newtonova metoda za višestruke nultočke

Primjeri za jednostruke nultočke

Primjeri za višestruke nultočke

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Pretpostavimo sad da je φ neprekidno derivabilna na $[a, b]$.

Po teoremu srednje vrijednosti, za bilo koje $x, y \in [a, b]$, vrijedi

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y),$$

gdje je ξ između x i y, tj. vrijedi $\xi \in [a, b]$. Definiramo

$$q := M_1 = \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|.$$

Onda možemo pisati

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Primijetite da q, općenito, može biti i veći od 1. No, ako je $q < 1$ i još vrijedi $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$, onda je φ kontrakcija.

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Teorem. Neka je $\varphi \in C^1[a,b]$, takva da je $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$. Ako je

$$q := M_1 = \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| < 1,$$

onda jednadžba $x = \varphi(x)$ ima točno jedno rješenje $\alpha \in [a,b]$.

- Za proizvoljnu startnu točku $x_0 \in [a,b]$ i niz jednostavnih iteracija definiran s $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, za $n \geq 0$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \alpha, \\
|\alpha - x_n| &\leq q^n |\alpha - x_0|, \quad n \geq 0, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} &= \varphi'(\alpha).
\end{aligned}$$

Jednostavne derivabilne iteracijske funkcije

Dokaz. Sve tvrdnje ovog teorema su dokazane u prethodnom teoremu, osim zadnje tvrdnje o linearnoj brzini konvergencije.

Po teoremu srednje vrijednosti, imamo

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n), \quad n \geq 0,$$

gdje je ξ_n neki broj između α i x_n.

Budući da $x_n \to \alpha$, onda i $\xi_n \to \alpha$. Zbog neprekidnosti derivacije φ' u fiksnoj točki α, onda vrijedi i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = \lim_{n\to\infty} \varphi'(\xi_n) = \varphi'(\alpha).$$

■

Bitna pretpostavka $q < 1$

Pretpostavka $q < 1$ u prethodnom teoremu je ključna.

Kontraprimjer. Pretpostavimo “samo” da je $|\varphi'(\alpha)| > 1$, u fiksnoj točki α funkcije φ.

Za neku startnu točku $x_0 \in [a, b]$, generiramo niz jednostavnih iteracija $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Zbog $\alpha = \varphi(\alpha)$, onda vrijedi

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n) = \varphi'(\xi_n)(\alpha - x_n).$$

Za bilo koji x_n dovoljno blizu α, mora biti $|\varphi'(\xi_n)| > 1$. Ako je $x_n \neq \alpha$, onda je

$$|\alpha - x_{n+1}| > |\alpha - x_n|.$$

Dakle, konvergencija metode nije moguća! Upravo suprotno, imamo divergenciju (iteracije se udaljuju od α, ako su blizu α).

Pojednostavljeni — “lokalni” teorem

Prethodni teorem možemo izreći i u “lokalnoj” formi — oko α.

Teorem. Neka je α rješenje jednostavne iteracije $x = \varphi(x)$ i neka je φ neprekidno diferencijabilna na nekoj okolini od α. Ako je $|\varphi'(\alpha)| < 1$, onda vrijede svi rezultati prethodnog teorema — uz pretpostavku da je start x_0 dovoljno blizu α.

Dokaz. Postoji $\varepsilon > 0$ takav da za interval $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ vrijedi

$$\max_{x \in I} |\varphi'(x)| \leq q < 1.$$

Tada je $\varphi(I) \subseteq I$ (dovoljno je $q \leq 1$), jer $|\alpha - x| \leq \varepsilon$ povlači

$$|\alpha - \varphi(x)| = |\varphi(\alpha) - \varphi(x)| = |\varphi'(\xi)||\alpha - x| \leq q|\alpha - x| \leq \varepsilon.$$

Sada možemo primijeniti prethodni teorem za $[a, b] = I$. ∎

Primjer iteracijskih funkcija za $\sqrt{a}$

Primjer. Za problem $x^2 - a = 0$, gdje je $a > 0$, definirali smo tri jednostavne iteracijske funkcije:

1. $x = x^2 + x - a$, ili općenitije, $x = x + c(x^2 - a)$, za $c \neq 0$,
2. $x = a/x$,
3. $x = \frac{1}{2}(x + a/x)$.

Ispitajte konvergenciju ovih iteracijskih funkcija oko $\alpha = \sqrt{a}$.

1. Za $\varphi(x) = x^2 + x - a$, izlazi $\varphi'(x) = 2x + 1$. U $x = \sqrt{a}$ je

   $$\varphi'(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a} + 1 > 1,$$

   pa ta iteracijska funkcija neće konvergirati. Baš suprotno, za bilo koji start x_0, ove iteracije divergiraju!

Primjer iteracijskih funkcija za $\sqrt{a}$

1. Općenito, $\varphi(x) = x + c(x^2 - a)$, pa je $\varphi'(x) = 1 + 2cx$ i

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 1 + 2c\sqrt{a}.$$

   Da bismo osigurali lokalnu konvergenciju, mora biti

$$-1 < 1 + 2c\sqrt{a} < 1,$$

   odnosno,

$$-\frac{1}{\sqrt{a}} < c < 0.$$

2. Za $\varphi(x) = a/x$, dobivamo $\varphi'(x) = -a/x^2$, pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = -1,$$

   što znači da iteracijska funkcija neće konvergirati. Niz iteracija je $x_0, \; a/x_0, \; x_0, \; a/x_0, \; \ldots$ (periodički niz).

Primjer iteracijskih funkcija za $\sqrt{a}$

3. Za $\varphi(x) = \frac{1}{2}\,(x + a/x)$, izlazi $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\,(1 - a/x^2)$, pa je

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 0.$$

   Zato ova iteracijska funkcija konvergira u okolini $\alpha = \sqrt{a}$.

Posljednja iteracijska funkcija je baš Newtonova metoda za jednadžbu $x^2 - a = 0$, a poznavali su ju još Babilonci.

Vidimo da metoda jednostavne iteracije može imati

- lokalnu konvergenciju koja je brža od linearne.

Stvarni "krivac" za kvadratnu konvergenciju je $\varphi'(\alpha) = 0$.

Slično tome, jednostavne iteracijske funkcije mogu poslužiti za konstrukciju iterativnih metoda proizvoljno visokog reda p.

Iterativne metode višeg reda konvergencije

Teorem. Neka je α rješenje jednadžbe $x = \varphi(x)$ i neka je φ

- p puta neprekidno diferencijabilna za sve x u okolini α, za neki $p \geq 2$.

Nadalje, pretpostavimo da je

$$\varphi'(\alpha) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0.$$

Ako je startna točka x_0 dovoljno blizu α, onda niz iteracija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \geq 0,$$

konvergira prema α s redom konvergencije (barem) p i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

Iterativne metode višeg reda konvergencije

Dokaz. Funkciju φ razvijemo, u okolini od α, u Taylorov polinom stupnja p, s tim da najviši član predstavlja ostatak. Zatim uvrstimo $x = x_n$, pa dobijemo

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) &= \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)(x_n - \alpha) + \cdots \\ &\quad + \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}\,(x_n - \alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}\,(x_n - \alpha)^p,\end{aligned}$$

za neki ξ_n između x_n i α.

Sad iskoristimo da je $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(x_n) = x_{n+1}$ i pretpostavku da za derivacije vrijedi $\varphi^{(k)}(\alpha) = 0$, za $k = 1, \ldots, p-1$. Izlazi

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!}\,(x_n - \alpha)^p,$$

Iterativne metode višeg reda konvergencije

odnosno,

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} (x_n - \alpha)^p.$$

Zbog $\varphi'(\alpha) = 0 < 1$, iz “lokalnog” teorema slijedi da

- niz iteracija x_n konvergira prema α, za svaku startnu točku x_0 koja je dovoljno blizu α (lokalna konvergencija).

Iz $x_n \to \alpha$ slijedi i $\xi_n \to \alpha$. Na kraju, u gornjoj relaciji, na limesu $n \to \infty$, iskoristimo neprekidnost $\varphi^{(p)}$ u α. Izlazi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = (-1)^{p-1} \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi^{(p)}(\xi_n)}{p!} = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

∎

Za $p = 1$, ovaj rezultat odgovara ranijem “lokalnom” teoremu!

Primjer — analiza Newtonove metode

Primjer. Primjenom prethodnog teorema, analizirajmo red konvergencije Newtonove metode u okolini jednostruke nultočke α funkcije f. Pripadna iteracijska funkcija φ je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Deriviranjem dobivamo da je

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Nultočka α je jednostruka, pa je $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$. Onda je

$$\varphi'(\alpha) = 0,$$

tj. Newtonova metoda konvergira (barem) kvadratno oko α.

Primjer — analiza Newtonove metode

Za detaljniju analizu, pogledajmo drugu derivaciju $\varphi''(\alpha)$.
Deriviranjem $\varphi'(x)$ u produktnom obliku, dobivamo

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \left(f(x)\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\right)' = f'(x)\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} + f(x)\left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\right)' \\ &= \frac{f''(x)}{f'(x)} + f(x)\left(\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\right)'.\end{aligned}$$

Zbog $f(\alpha) = 0$ i $f'(\alpha) \neq 0$, odmah izlazi

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Ako je $f''(\alpha) \neq 0$, red konvergencije Newtonove metode je 2.

Ako je $f''(\alpha) = 0$, red konvergencije je barem 3.

Multiplicitet nultočke funkcije

Definicija (Multiplicitet nultočke). Neka je $f(\alpha) = 0$. Ako postoji prirodni broj m, takav da je

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), \quad g(\alpha) \neq 0,$$

gdje je g neprekidna funkcija u okolini od α, onda nultočka α ima multiplicitet (višestrukost, kratnost ili red) m.

Teorem. Pretpostavimo da funkcija f ima neprekidnu m-tu derivaciju u okolini od α, tj. f je klase C^m oko α. Onda je

- α nultočka od f multipliciteta m, ako i samo ako vrijedi

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Dokaz "$\Leftarrow$" ide direktno iz Taylorovog razvoja do stupnja m, za funkciju f oko α (slično kao malo prije — u teoremu za φ).

Nultočka funkcije i njezinih derivacija

Obrat “$\Rightarrow$” je nešto složeniji, jer g ne mora biti derivabilna. Zato ne “ide” Leibnizovo pravilo za derivaciju produkta!

Početak: Za $k = 0, \ldots, m$, definiramo funkciju g_k oko α, kao

$$g_k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{(x-\alpha)^{m-k}}, \quad x \neq \alpha.$$

Uočimo da je $g_0(x) = g(x)$. Po pretpostavci, g_0 je neprekidna u α i vrijedi $f(\alpha) = 0$, $g_0(\alpha) \neq 0$ (baza indukcije, zbog $m \geq 1$).

Korak: Neka je $k \geq 0$ i $k < m$, i uzmimo da za k vrijedi

$$f^{(k)}(\alpha) = 0, \quad \text{i postoji} \quad \lim_{x \to \alpha} g_k(x) = g_k(\alpha) \neq 0,$$

gdje je $g_k(\alpha)$ definiran proširenjem po neprekidnosti, tako da je g_k neprekidna u α, pa onda i oko α (iz definicije za $x \neq \alpha$).

Nultočka funkcije i njezinih derivacija

Onda je

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{f^{(k)}(x)}{x - \alpha} = (x - \alpha)^{m-k-1} g_k(x).$$

Desna strana je neprekidna u α, pa prijelazom na limes $x \to \alpha$ slijedi

$$f^{(k+1)}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{za } k + 1 < m, \\ g_k(\alpha), & \text{za } k + 1 = m. \end{cases}$$

Treba još pokazati da postoji $\lim\limits_{x \to \alpha} g_{k+1}(x)$ i da je $g_{k+1}(\alpha) \neq 0$.

Ako je $k + 1 = m$, onda je (po definiciji) $g_m(x) = f^{(m)}(x)$, pa neprekidnost $f^{(m)}$ u α daje

$$g_m(\alpha) = g_{m-1}(\alpha) \neq 0.$$

Nultočka funkcije i njezinih derivacija

Za $k+1 < m$, iz definicije dobivamo neodređeni oblik $0/0$, kojeg računamo "obratnim" L'Hospitalovim pravilom, tj.

- integriramo brojnik i nazivnik, a ne deriviramo.

Izlazi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\alpha} g_{k+1}(x) &= \lim_{x\to\alpha} \frac{f^{(k+1)}(x)}{(x-\alpha)^{m-k-1}} = \{\text{ L'Hospital }\} \\ &= \lim_{x\to\alpha} \frac{f^{(k)}(x)}{\frac{1}{m-k}\,(x-\alpha)^{m-k}} \\ &= (m-k)\lim_{x\to\alpha} g_k(x) = (m-k)g_k(\alpha) \neq 0.\end{aligned}$$

Na kraju, vidimo da je $g_k(\alpha) = m(m-1)\cdots(m-k+1)g(\alpha)$, za $k = 1, \ldots, m$. Posebno, vrijedi $g_1(\alpha) = mg(\alpha)$.

Veza nultočke funkcije i derivacije

U nastavku, radi jednostavnosti, pretpostavljamo da je i funkcija g dovoljno glatka oko α, tako da ju možemo derivirati koliko puta treba. Onda prethodni obrat ide puno lakše.

Na primjer, uzmimo da je g' neprekidna oko α. Pokažimo da

- ako funkcija f ima nultočku multipliciteta m u α,
- onda derivacija f' ima nultočku multipliciteta $m - 1$ u α.

Dokaz. Napišimo f u obliku

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), \quad g(\alpha) \neq 0.$$

Onda je

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x - \alpha)^{m-1} g(x) + (x - \alpha)^m g'(x) \\ &= (x - \alpha)^{m-1} \Big(mg(x) + (x - \alpha) g'(x) \Big). \end{aligned}$$

Veza nultočke funkcije i derivacije

Zatim, definiramo funkciju g_1 na okolini od α, kao drugi faktor iz prethodnog produkta

$$g_1(x) := mg(x) + (x - \alpha)\, g'(x),$$

tako da je

$$f'(x) = (x - \alpha)^{m-1}\, g_1(x).$$

Iz pretpostavke da je g' neprekidna u okolini od α, slijedi da su f' i g_1, također, neprekidne oko α. U točki α je

$$g_1(\alpha) = mg(\alpha) + (\alpha - \alpha)\, g'(\alpha) = mg(\alpha) \neq 0,$$

što pokazuje da f' ima $(m - 1)$-struku nultočku u α.

■

Ovu formulu za $g_1(\alpha)$ koristimo više puta u nastavku.

Dodatno, uzimamo da je g klase C^2 oko α, iako ide i bez toga.

Konvergencija Newtona za višestruku nultočku

Analizirajmo što će se dogoditi s konvergencijom Newtonove metode, ako funkcija f ima višestruku nultočku u α.

Newtonovu metodu promatramo kao jednostavnu iteraciju,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Pretpostavimo da

- f ima m-struku nultočku u α, za neki $m \geq 2$, i da je
- f dovoljno glatka na okolini od α — barem klase C^{m+1}, tako da je iteracijska funkcija φ barem klase C^m.

Onda je

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)^m g(x), & g(\alpha) &\neq 0, \\ f'(x) &= (x-\alpha)^{m-1} g_1(x), & g_1(\alpha) &\neq 0. \end{aligned}$$

Konvergencija Newtona za višestruku nultočku

Kad uvrstimo ove relacije za f i f', dobivamo

$$\varphi(x) = x - \frac{(x-\alpha)^m \, g(x)}{(x-\alpha)^{m-1} \, g_1(x)} = x - (x-\alpha)\frac{g(x)}{g_1(x)}.$$

Deriviranjem izlazi

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{g(x)}{g_1(x)} - (x-\alpha)\left(\frac{g(x)}{g_1(x)}\right)'.$$

U nultočki α je

$$\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)} = 1 - \frac{g(\alpha)}{mg(\alpha)} = 1 - \frac{1}{m}.$$

Za $m \geq 2$, vrijedi $\varphi'(\alpha) \neq 0$. Prema ranijem teoremu, to znači

- da Newtonova metoda onda konvergira samo linearno!

Konvergencija Newtona za višestruku nultočku

Dodatno, faktor linearne konvergencije je $\varphi'(\alpha) = 1 - 1/m$, što je vrlo sporo. U prosjeku, to je

- podjednako brzo kao bisekcija, za $m = 2$,
- ili čak lošije od bisekcije, za $m \geq 3$.

Newtonovu metodu možemo popraviti na dva načina:

- ako unaprijed točno znamo red m nultočke,
- ako ne znamo red (višestruke) nultočke.

Ako znamo m, onda u okolini m-struke nultočke definiramo iteracijsku funkciju

$$\varphi(x) = x - m\,\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newtonova metoda kad znamo red nultočke

Na isti način kao malo prije, redom, dobivamo

$$\varphi(x) = x - m(x - \alpha)\frac{g(x)}{g_1(x)},$$

$$\varphi'(x) = 1 - m\frac{g(x)}{g_1(x)} - m(x - \alpha)\left(\frac{g(x)}{g_1(x)}\right)',$$

pa je

$$\varphi'(\alpha) = 1 - m\frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)} = 1 - m\frac{g(\alpha)}{mg(\alpha)} = 1 - m\frac{1}{m} = 0.$$

To pokazuje da ova modifikacija Newtonove metode,

- s m-strukom korekcijom,
- osigurava barem kvadratnu konvergenciju, za bilo koji m.

Newtonova metoda kad ne znamo red nultočke

Što ćemo napraviti ako unaprijed ne znamo m? Primijetimo da funkcija u — to je korekcija u običnoj Newtonovoj metodi,

$$u(x) := \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-\alpha)^m g(x)}{(x-\alpha)^{m-1} g_1(x)} = (x-\alpha)\frac{g(x)}{g_1(x)},$$

uvijek ima jednostruku nultočku u α, jer je $g(\alpha)/g_1(\alpha) \neq 0$.

Dakle, obična Newtonova metoda, primijenjena na u (a ne f)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)},$$

gdje je

$$u'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 - \frac{f''(x)}{f'(x)}\,u(x),$$

konvergira barem kvadratno, iako ne znamo red nultočke!

Ostale metode kad ne znamo red nultočke

Sasvim isto vrijedi i za sve ostale metode, koje imaju

- red konvergencije $p > 1$, u okolini jednostruke nultočke α.

Ako se metoda "uspori" u okolini višestruke nultočke,

- treba metodu primijeniti na $u = f/f'$, umjesto na f.

Na primjer, za višestruke nultočke, metodu sekante treba primijeniti na funkciju u,

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{u(x_n) - u(x_{n-1})}.$$

Dodatna "cijena" = računanje još jedne derivacije više.

Na primjer, u Newtonovoj metodi, za u' treba računati i f'', a u metodi sekante, za u treba računati i f'.

Numerički red konvergencije

U praksi se može sasvim dobro

- numerički procijeniti red konvergencije iterativne metode.

Kako se to radi?

Red konvergencije niza iteracija $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$, koji konvergira prema nultočki α, je najveći eksponent p, uz $p \geq 1$, za koji vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - x_{n-1}|}{|\alpha - x_{n-2}|^p} = c > 0.$$

Ovdje je x_n niz iteracija generiran nekom metodom, uz neki start dovoljno blizu nultočke (ranije su indeksi bili n i $n - 1$).

Ovako dobiveni p i c su “teorijske” vrijednosti koje vrijede asimptotski — na limesu $n \to \infty$.

Numerički red konvergencije

Definicijsku relaciju ne možemo direktno iskoristiti za računanje p i c, jer ne znamo nultočku α.

Praktični pogled. Ako su iteracije x_k dovoljno blizu α, onda limes možemo "zaboraviti", pa je

$$|\alpha - x_k| \approx c|\alpha - x_{k-1}|^p,$$

za dovoljno velike k. Umjesto α, uzmemo aproksimaciju za α!

Dakle, ako smo dovoljno blizu nultočke, onda možemo uzeti da je $\alpha \approx x_n$, a za k uzmemo $k = n-1, n-2$. Onda vrijedi

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &= c_n|x_n - x_{n-2}|^{p_n}, \\ |x_n - x_{n-2}| &= c_n|x_n - x_{n-3}|^{p_n}, \end{aligned}$$

s tim da očekujemo da je $p_n \approx p$ i $c_n \approx c$, za dovoljno velike n.

Numerički red konvergencije

Dijeljenjem dobivamo

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|} = \left(\frac{|x_n - x_{n-2}|}{|x_n - x_{n-3}|}\right)^{p_n},$$

pa logaritmiranjem izlazi tzv. numerički red konvergencije p_n

$$p_n = \frac{\log(\,|x_n - x_{n-1}|/|x_n - x_{n-2}|\,)}{\log(\,|x_n - x_{n-2}|/|x_n - x_{n-3}|\,)}.$$

Nakon toga, c_n možemo dobiti (recimo) iz prve relacije, kao

$$c_n = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n - x_{n-2}|^{p_n}}.$$

Ovaj račun možemo provesti tek za $n \geq 3$, a vrijednosti p_n i c_n ovise o n — pa treba pratiti njihovo ponašanje kroz iteracije.

Jednostavni primjer

Primjer. Za uspoređivanje metoda za nalaženje nultočaka, izračunajmo $\sqrt[3]{1.5}$. Problem možemo interpretirati kao traženje realne, pozitivne nultočke funkcije (polinoma)

$$f(x) = x^3 - 1.5.$$

Jednostavna lokacija nultočke je $\alpha \in [1, 2]$. Iz neprekidnosti funkcije f i

$$f(1) = -0.5 < 0, \quad f(2) = 6.5 > 0,$$

znamo da sigurno postoji nultočka $\alpha \in [1, 2]$. To je i jedina realna nultočka funkcije f, jer f strogo raste na $\langle -\infty, 0\rangle$ (tamo je $f < 0$) i na $\langle 0, \infty\rangle$.

Svo računanje provedeno je u `extended` tipu ($u \approx 5.4 \cdot 10^{-20}$).

Metoda bisekcije

Pokažimo kako se ponaša metoda bisekcije ako je $[a, b] = [1, 2]$, a tražena točnost je

- $\varepsilon = 10^{-8}$,
- $\varepsilon = 10^{-18}$.

Na sljedeće dvije stranice, sa z_n je označena veličina

$$z_n := f(a_n) \cdot f(x_n).$$

Primijetite da pogrešno očitan predznak od z_n (umjesto < 0, očitamo > 0, ili obratno)

- možemo detektirati samo gledanjem $f(x_n)$ — uglavnom, tada $f(x_n) \not\to 0$,
- ali i dalje ne znamo točno mjesto gdje smo pogriješili.

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$ (početak)

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z_n
0	1.000000000	2.000000000	1.500000000	1.875000000	< 0
1	1.000000000	1.500000000	1.250000000	0.453125000	< 0
2	1.000000000	1.250000000	1.125000000	−0.076171875	> 0
3	1.125000000	1.250000000	1.187500000	0.174560547	< 0
4	1.125000000	1.187500000	1.156250000	0.045806885	< 0
5	1.125000000	1.156250000	1.140625000	−0.016017914	> 0
6	1.140625000	1.156250000	1.148437500	0.014684200	< 0
7	1.140625000	1.148437500	1.144531250	−0.000719249	> 0
8	1.144531250	1.148437500	1.146484375	0.006969355	< 0
9	1.144531250	1.146484375	1.145507813	0.003121776	< 0
10	1.144531250	1.145507813	1.145019531	0.001200444	< 0
11	1.144531250	1.145019531	1.144775391	0.000240393	< 0
12	1.144531250	1.144775391	1.144653320	−0.000239479	> 0
13	1.144653320	1.144775391	1.144714355	0.000000444	< 0

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}$ (nastavak)

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	z_n
14	1.144653320	1.144714355	1.144683838	−0.000119521	> 0
15	1.144683838	1.144714355	1.144699097	−0.000059539	> 0
16	1.144699097	1.144714355	1.144706726	−0.000029548	> 0
17	1.144706726	1.144714355	1.144710541	−0.000014552	> 0
18	1.144710541	1.144714355	1.144712448	−0.000007054	> 0
19	1.144712448	1.144714355	1.144713402	−0.000003305	> 0
20	1.144713402	1.144714355	1.144713879	−0.000001431	> 0
21	1.144713879	1.144714355	1.144714117	−0.000000493	> 0
22	1.144714117	1.144714355	1.144714236	−0.000000025	> 0
23	1.144714236	1.144714355	1.144714296	0.000000210	< 0
24	1.144714236	1.144714296	1.144714266	0.000000092	< 0
25	1.144714236	1.144714266	1.144714251	0.000000034	< 0
26	1.144714236	1.144714251	1.144714244	0.000000005	< 0
27	1.144714236	1.144714244	1.144714240	−0.000000010	

Metoda bisekcije, točnost $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-18}$

Izračunata rješenja su (uz ispis na 18 znamenki):

- za točnost 10^{-8} , rješenje je $x_{27} = 1.14471423998475075$,
- za točnost 10^{-18}, rješenje je $x_{60} = 1.14471424255333187$.

Iz ovih rezultata vidi se

- spora konvergencija metode bisekcije — broj vodećih nula u $f(x_n)$ se, uglavnom, linearno povećava.

Ponegdje, kao u x_{13}, dolazi do čudnog povećanja broja vodećih nula u $f(x_n)$. Objašnjenje:

- Slučajno smo "pogodili" blizu nultočke, iako je duljina intervala još uvijek prevelika za zaustavljanje iteracija.

Uočite broj iteracija potreban za odgovarajuću točnost!

Newtonova metoda, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Nije teško pokazati da će Newtonova metoda na $[1, 2]$ sigurno konvergirati, ako krenemo sa strmijeg ruba (to je $x_0 = 2$), jer su f' i f'' fiksnog znaka na $[1, 2]$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	0.541666666666667
1	1.458333333333333	1.601490162037037	0.251009070294785
2	1.207324263038549	0.259834330619978	0.059419284771986
3	1.147904978266562	0.012578134527712	0.003181874908824
4	1.144723103357739	0.000034833084971	0.000008860735819
5	1.144714242621919	0.000000000269625	0.000000000068587
6	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.144714242553332	0.000000000000000	

Izračunata nultočka je $x_7 = 1.1447142425533187$ (sve točno).

Newtonova metoda, kvadratna konvergencija

Gledamo li korekcije napisane u znanstvenoj notaciji, vidimo područje kvadratne konvergencije — gdje se broj točnih znamenki u x_n, u svakom koraku, udvostručava.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.0000000000000000	6.50000000000E+00	5.416666667E−01
1	1.4583333333333333	1.60149016204E+00	2.510090703E−01
2	1.20732426303854875	2.59834330620E−01	5.941928477E−02
3	1.14790497826656245	1.25781345277E−02	3.181874909E−03
4	1.14472310335773870	3.48330849709E−05	8.860735819E−06
5	1.14471424262191933	2.69625000386E−10	6.858746179E−11
6	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	2.758003708E−20
7	1.14471424255333187	1.08420217249E−19	

Isti smo zaključak mogli vidjeti i bez znanstvene notacije — pogledajte kako se povećava broj vodećih nula u korekciji.

Newtonova m., numerički red konvergencije

Prema formuli s početka ovog odjeljka, možemo izračunati i numerički red konvergencije p_n za Newtonovu metodu.

n	x_n	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.4583333333333333	—	—
2	1.20732426303854875	—	—
3	1.14790497826656245	1.63738	4.03440E−01
4	1.14472310335773870	1.84894	5.34225E−01
5	1.14471424262191933	1.97750	7.64767E−01
6	1.14471424255333187	1.99937	8.67206E−01
7	1.14471424255333187	—	—

Završne vrijednosti p_5 i p_6 su vrlo blizu očekivanog teorijskog reda konvergencije $p = 2$!

Metoda sekante, točnost $\varepsilon = 10^{-18}$

Za metodu sekante potrebne su dvije startne točke — to su $x_0 = 2$ i $x_1 = 1.5$. Izračunata nultočka x_{10} ima sve znamenke jednake aproksimaciji x_7 iz Newtonove metode.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	2.000000000000000	6.500000000000000	
1	1.500000000000000	1.875000000000000	0.202702702702703
2	1.297297297297297	0.683325765502537	0.116233090792778
3	1.181064206504520	0.147481413791545	0.031991044609771
4	1.149073161894749	0.017200732670849	0.004223722208545
5	1.144849439686204	0.000531537856385	0.000134683664909
6	1.144714756021295	0.000002018501023	0.000000513407324
7	1.144714242613971	0.000000000238377	0.000000000060639
8	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
9	1.144714242553332	0.000000000000000	0.000000000000000
10	1.144714242553332	0.000000000000000	

Metoda sekante, numerički red konvergencije

Red konvergencije metode sekante je
$p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.6180$, a numerički red konvergencije p_n ga dobro aproksimira.

n	x_n	p_n	c_n
0	2.0000000000000000	—	—
1	1.5000000000000000	—	—
2	1.2972972972972973	—	—
3	1.1810642065045196	1.07039	3.94966E−01
4	1.1490731618947491	1.77904	9.54986E−01
5	1.1448494396862039	1.49493	6.02649E−01
6	1.1447147560212947	1.63923	9.97717E−01
7	1.1447142426139705	1.60467	8.29830E−01
8	1.1447142425533319	1.62274	9.74858E−01
9	1.1447142425533319	1.61618	8.86501E−01
10	1.1447142425533319	—	—

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Primjer. Jedina nultočka funkcije

$$f(x) = \mathrm{arctg}(x)$$

je $x = 0$. Međutim, Newtonova metoda ne konvergira iz svake startne točke x_0.

- Sigurnu konvergenciju (po ranijem teoremu) ne možemo osigurati, jer f'' mijenja znak baš u nultočki (infleksija).

Naći ćemo točku β za koju vrijedi:

$$\begin{cases} |x_0| < |\beta| \;\Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ konvergira,} \\ |x_0| > |\beta| \;\Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ divergira,} \\ |x_0| = |\beta| \;\Rightarrow \text{Newtonova metoda sa startom } x_0 \text{ “ciklira”.} \end{cases}$$

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Kako ćemo naći točku "cikliranja" (ili "kruženja") β?

Funkcija $f(x) = \text{arctg} x$ je neparna, pa je dovoljno da

- tangenta na graf funkcije f u točki $(\beta, f(\beta))$ presiječe os x u točki $-\beta$ — dobijemo neparnu simetriju oko nule.

Jednadžba tangente na arctg u točki β je

$$y - \text{arctg}\beta = \frac{1}{1+\beta^2}\,(x-\beta),$$

pa će tangenta sjeći os x u $-\beta$ (tada je $y = 0$), ako je

$$\text{arctg}\beta = \frac{2\beta}{1+\beta^2}.$$

Dobili smo nelinearnu jednadžbu za β, koju treba riješiti.

Primjer (ne)konvergencije Newtonove metode

Zbog neparnosti, postoje dva rješenja, suprotnih predznaka. Možemo ih izračunati, recimo, metodom bisekcije i dobijemo

$$\beta = \pm 1.3917452002707348 9.$$

Pokažimo ponašanje Newtonove metode ako za startnu točku uzmemo, redom,

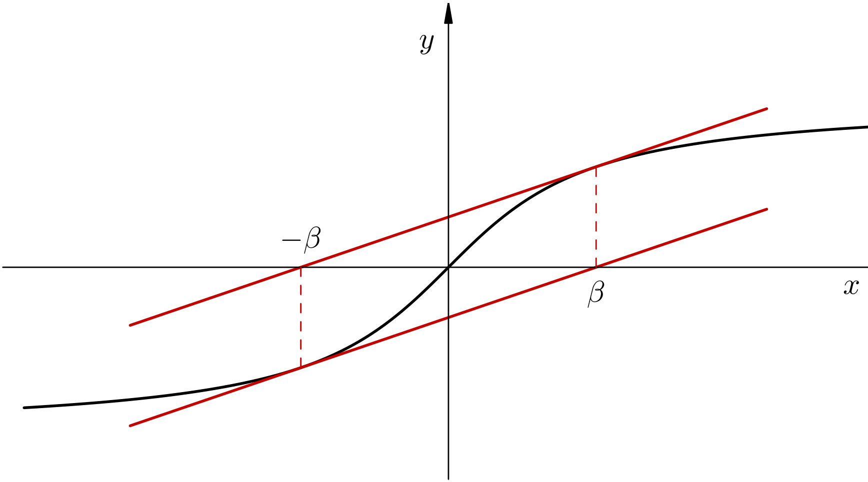
$$x_0 = \beta, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 1.5,$$

a zaustavljamo se

- ako postignemo točnost 10^{-18} za nađenu nultočku,
- ili nakon najviše 10 iteracija.

Primjer cikliranja Newtonove metode

Za $x_0 = \beta$ graf je



Primjer cikliranja Newtonove metode

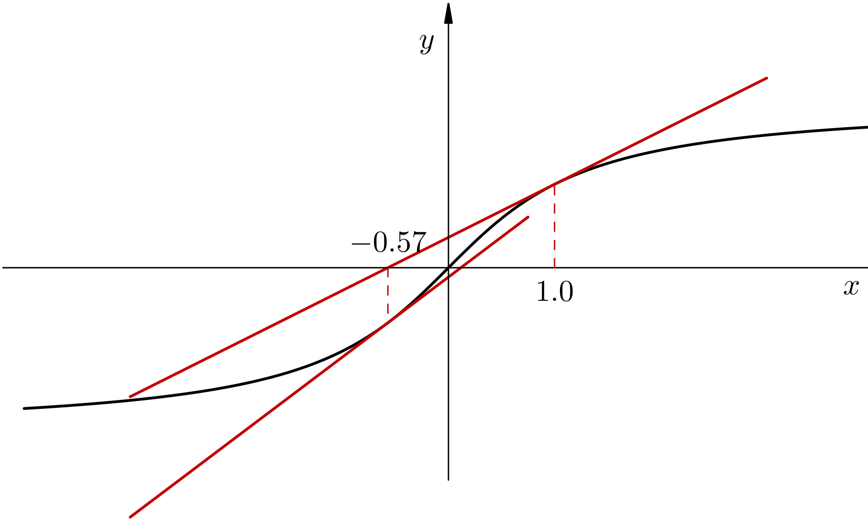
Točnost nije postignuta nakon 10 iteracija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541470
1	−1.391745200270735	−0.947747133516990	−2.783490400541470
2	1.391745200270735	0.947747133516990	2.783490400541469
3	−1.391745200270734	−0.947747133516990	−2.783490400541468
4	1.391745200270734	0.947747133516990	2.783490400541466
5	−1.391745200270732	−0.947747133516989	−2.783490400541459
6	1.391745200270727	0.947747133516988	2.783490400541440
7	−1.391745200270713	−0.947747133516983	−2.783490400541391
8	1.391745200270678	0.947747133516971	2.783490400541262
9	−1.391745200270584	−0.947747133516939	−2.783490400540922
10	1.391745200270337	0.947747133516939	

Zbog malih grešaka zaokruživanja, metoda bi konvergirala.

Primjer konvergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1$ graf je



Primjer konvergencije Newtonove metode

Zadana točnost 10^{-18} se postiže nakon 6 iteracija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.000000000000000	0.785398163397448	1.570796326794897
1	−0.570796326794897	−0.518669369255017	−0.687656230793810
2	0.116859903998913	0.116332265113896	0.117920926115958
3	−0.001061022117045	−0.001061021718890	−0.001061022913354
4	0.000000000796310	0.000000000796310	0.000000000796310
5	−0.000000000000000	−0.000000000000000	−0.000000000000000
6	0.000000000000000	−0.000000000000000	

Metoda kubno konvergira (zbog $f''(0) = 0$), ali ne konvergira monotono prema nultočki $\alpha = 0$.

Newton kvg., numerički red konvergencije

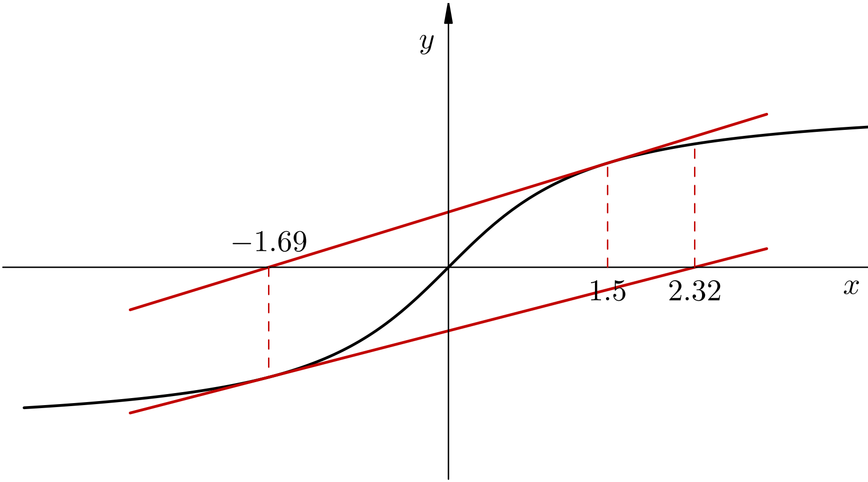
Numerički red konvergencije pokazuje da metoda zaista kubno konvergira prema $\alpha = 0$.

n	x_n	p_n	c_n
0	1.0000000000000000	—	—
1	$-$0.5707963267948966	—	—
2	0.1168599039989130 5	—	—
3	$-$0.0010610221170447 2	4.02288	1.13367E+00
4	0.0000000007963096 0	2.97361	6.28237E$-$01
5	$-$0.0000000000000000 0	2.99942	6.64032E$-$01
6	0.0000000000000000 0	2.99655	6.51104E$-$01

Na kraju iteracija dolazi do kraćenja, zbog nemonotonosti. Zato je p_6 malo manje točan od p_5.

Primjer divergencije Newtonove metode

Za $x_0 = 1.5$ graf je



Primjer divergencije Newtonove metode

Metoda kvadratno divergira, ali $f(x)$ “konvergira” prema $\pm\frac{\pi}{2}$.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.5000000000E+000	0.9827937232473	3.1940796006E+000
1	−1.6940796006E+000	−1.0375463591379	−4.0152065620E+000
2	2.3211269614E+000	1.1640020424220	7.4352147982E+000
3	−5.1140878368E+000	−1.3776945287028	−3.7409771751E+001
4	3.2295683914E+001	1.5398423269080	1.6076126347E+003
5	−1.5753169508E+003	−1.5701615339901	−3.8965513247E+006
6	3.8949760078E+006	1.5707960700539	2.3830292869E+013
7	−2.3830288974E+013	−1.5707963267949	−8.9202801611E+026
8	8.9202801611E+026	1.5707963267949	1.2499045994E+054
9	−1.2499045994E+054	−1.5707963267949	−2.4539946375E+108
10	2.4539946375E+108	1.5707963267949	

Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Newtonova metoda i višestruke nultočke

Primjer. Funkcija (polinom)

$$f(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

ima dvostruku nultočku u $x = 1.23$ (treća nultočka je 3.1).

Pokažimo, redom, ponašanje

- obične Newtonove metode,
- Newtonove metode za dvostruku nultočku — stavljen je faktor $m = 2$ za korekciju,
- obične Newtonove metode, ali za funkciju $u = f/f'$.

Startna točka je $x_0 = 1.5$, a tražena točnost je $\varepsilon = 10^{-15}$.

- Točnost za nultočku je namjerno “slabija” nego prije.

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$ (početak)

Pažljivo promatrajte kako se ponaša $f(x_n)$ i korekcija.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.500000000000000	−0.116640000000000	0.147440273037543
1	1.352559726962457	−0.026248102309329	0.063506947954921
2	1.289052779007536	−0.006315190760541	0.030015778457640
3	1.259037000549896	−0.001552203168203	0.014633908572506
4	1.244403091977390	−0.000384941831542	0.007229603981965
5	1.237173487995426	−0.000095859059122	0.003593663348690
6	1.233579824646736	−0.000023918444247	0.001791630511788
7	1.231788194134948	−0.000005973865556	0.000894525173287
8	1.230893668961661	−0.000001492750955	0.000446941328040
9	1.230446727633621	−0.000000373098481	0.000223390506264
10	1.230223337127356	−0.000000093263474	0.000111675233252
11	1.230111661894104	−0.000000023314476	0.000055832614098

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$ (nastavak)

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
12	1.230055829280006	−0.000000005828445	0.000027915056720
13	1.230027914223287	−0.000000001457089	0.000013957215816
14	1.230013957007471	−0.000000000364270	0.000006978529777
15	1.230006978477694	−0.000000000091067	0.000003489245354
16	1.230003489232340	−0.000000000022767	0.000001744617791
17	1.230001744614549	−0.000000000005692	0.000000872307704
18	1.230000872306845	−0.000000000001423	0.000000436153629
19	1.230000436153216	−0.000000000000356	0.000000218076376
20	1.230000218076841	−0.000000000000089	0.000000109038186
21	1.230000109038655	−0.000000000000022	0.000000054517907
22	1.230000054520748	−0.000000000000006	0.000000027259838
23	1.230000027260910	−0.000000000000001	0.000000013624333
24	1.230000013636577	−0.000000000000000	0.000000006828241
25	1.230000006808336	−0.000000000000000	0.000000003389306

Newtonova metoda, $\varepsilon = 10^{-15}$ (kraj)

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
26	1.230000003419030	−0.000000000000000	0.000000001729681
27	1.230000001689349	−0.000000000000000	0.000000000823684
28	1.230000000865665	−0.000000000000000	0.000000000401855
29	1.230000000463810	0.000000000000000	−0.000000000000000
30	1.230000000463810	0.000000000000000	

Korekcija linearno teži u 0, puno sporije nego $f(x)$. Razlog:

- Oko višestruke nultočke, funkcijska vrijednost je relativno mala, čak i kad smo relativno daleko od nultočke, tj.
- u okolini višestruke nultočke α, graf funkcije f se bolje "priljubi" uz os x, nego kad je nultočka jednostruka.

Modificirana Newtonova metoda, $m = 2$

Modificirana metoda pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.500000000000000	−0.116640000000000	0.294880546075085
1	1.205119453924915	−0.001173009833879	−0.024718265674538
2	1.229837719599453	−0.000000049250590	−0.000162273360038
3	1.229999992959491	−0.000000000000000	−0.000000007049176
4	1.230000000008667	0.000000000000000	−0.000000026758865
5	1.230000026767532	−0.000000000000001	0.000000026771877
6	1.229999999995655	0.000000000000000	0.000000000000000
7	1.229999999995655	0.000000000000000	

Da smo pogriješili m — dobili bismo linearnu konvergenciju!

Newtonova metoda za funkciju $u = f/f'$

Obična Newtonova metoda za funkciju $u = f/f'$, također, pokazuje očitu kvadratnu konvergenciju prema jednostrukoj nultočki funkcije u.

n	x_n	$f(x_n)$	korekcija
0	1.500000000000000	0.147440273037543	0.243748194650388
1	1.256251805349612	0.013220017840880	0.026062273270891
2	1.230189532078721	0.000094770842551	0.000189522471849
3	1.230000009606872	0.000000004803964	0.000000009608985
4	1.229999999997887	0.000000000000000	0.000000000000000
5	1.229999999997887	0.000000000000000	

Cijena:

- računanje vrijednosti druge derivacije funkcije f za u'.