Numerička matematika

10. predavanje

Saša Singer i Nela Bosner

PMF - Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

Osnovna Simpsonova formula

Izvedimo sljedeću (zatvorenu) Newton–Cotesovu formulu za $m = 2$ (s 3 čvora), poznatu pod imenom Simpsonova formula. Ona ima oblik

$$I_2(f) = w_0^{(2)} f(x_0) + w_1^{(2)} f(x_0 + h_2) + w_2^{(2)} f(x_0 + 2h_2),$$

pri čemu je

$$h := h_2 = \frac{b-a}{2}.$$

Ponovno, da bismo olakšali pisanje, izostavimo gornje indekse. Kad h uvrstimo u formulu, dobivamo

$$I_2(f) = w_0 f(a) + w_1\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + w_2 f(b).$$

Osnovna Simpsonova formula

Imamo tri nepoznata parametra, pa moramo postaviti najmanje tri uvjeta za egzaktnost ove formule na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja n. Krećemo s $n = 2$.

- Za $f(x) = 1$ dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0 \, dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1.$$

- Za $f(x) = x$ izlazi

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x \, dx = w_0 \cdot a + w_1 \, \frac{a + b}{2} + w_2 \cdot b.$$

Osnovna Simpsonova formula

- Konačno, za $f(x) = x^2$ dobivamo

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 \, dx = w_0 \cdot a^2 + w_1 \, \frac{(a+b)^2}{4} + w_2 \cdot b^2.$$

Sada imamo linearni sustav s tri jednadžbe i tri nepoznanice

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 + w_2 &= b - a \\ a w_0 + \frac{a+b}{2} w_1 + b w_2 &= \frac{b^2 - a^2}{2} \\ a^2 w_0 + \frac{(a+b)^2}{4} w_1 + b^2 w_2 &= \frac{b^3 - a^3}{3}. \end{aligned}$$

Osnovna Simpsonova formula

Rješavanjem ovog sustava (izračunajte sami!), dobivamo

$$w_0 = w_2 = \frac{h}{3} = \frac{b-a}{6}, \quad w_1 = \frac{4h}{3} = \frac{4(b-a)}{6},$$

Integracijska formula $I_2(f)$ dobivena je iz egzaktnosti na svim polinomima iz $\mathcal{P}_2$, stupnja manjeg ili jednakog 2, i glasi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Zadatak. Ponovite izvod na "simetričnoj" bazi potencija

$$1, \quad x - \frac{a+b}{2}, \quad \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Egzaktna integracija x^3

Simpsonova formula, iako je dobivena iz uvjeta egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2,

- egzaktno integrira i sve polinome stupnja 3.

Pokažimo da je polinomi stupanj egzaktnosti Simpsonove formule jednak 3 — za jedan više nego što bismo očekivali!

- Dovoljno je pokazati da formula egzaktno integrira

$$f(x) = x^3.$$

Egzaktni integral jednak je

$$\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Egzaktna integracija x^3

Po Simpsonovoj formuli, za $f(x) = x^3$ dobivamo

$$I_2(x^3) = \frac{b-a}{6}\left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right)$$
$$= \frac{b-a}{6} \cdot \frac{3}{2}\,(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Nije teško pokazati da je i Simpsonova formula interpolacijska.

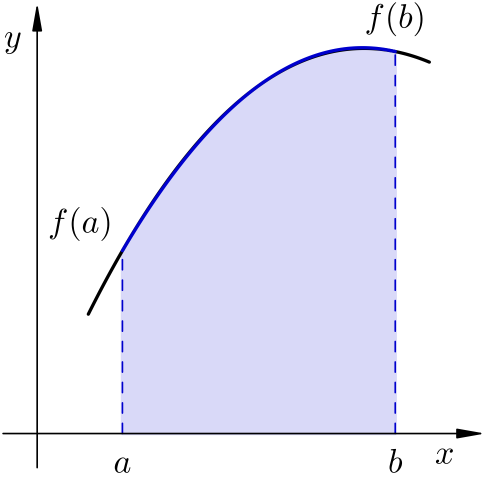
Ako povučemo kvadratni interpolacijski polinom kroz 3 točke

$$(a, f(a)), \quad \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \quad (b, f(b)),$$

a zatim ga egzaktno integriramo od a do b, dobivamo upravo Simpsonovu formulu. Provjerite sami!

Točnost Simpsonove formule

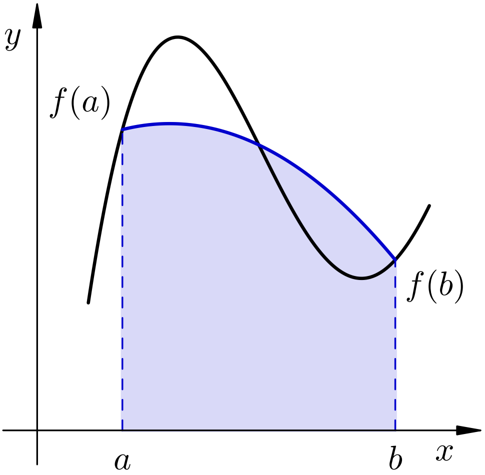
Ilustrirajmo kako Simpsonova formula funkcionira na integralu kojeg smo aproksimirali trapeznom formulom.



Ovdje je aproksimacija integrala vrlo dobra.

Točnost Simpsonove formule

Ovisno o “obliku” funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Dakle, aproksimacija ne mora biti tako dobra.

Greška Simpsonove formule

Označimo, za kraći zapis,

$$c := \frac{a+b}{2}.$$

Grešku Simpsonove formule računamo slično kao kod trapezne, integracijom greške kvadratnog interpolacijskog polinoma p_2.

Zapis je u Newtonovom obliku — preko podijeljene razlike

$$e_2(x) = f(x) - p_2(x) = (x-a)(x-c)(x-b)\, f[a,b,c,x].$$

Za grešku Simpsonove formule vrijedi

$$E_2(f) = \int_a^b e_2(x)\, dx.$$

Greška Simpsonove formule

Nažalost, pripadni polinom čvorova

$$\omega(x) = (x - a)(x - c)(x - b)$$

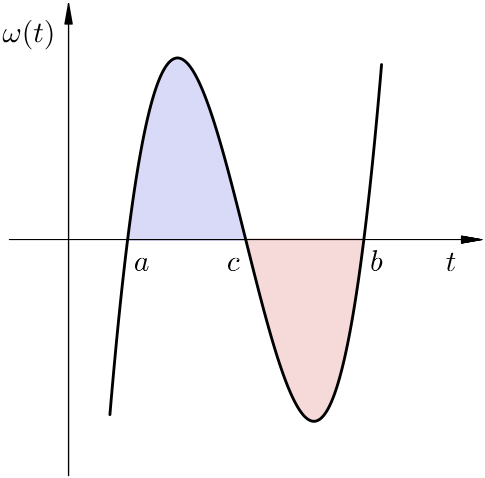
nije fiksnog znaka na $[a, b]$, pa ne možemo direktno primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti za integrale.

Zato definiramo $w(x)$ kao integral polinoma čvorova od a do x

$$w(x) = \int_a^x \omega(t)\, dt = \int_a^x (t - a)\,(t - c)\,(t - b)\, dt.$$

Skiciramo li graf polinoma čvorova $\omega(t) = (t - a)(t - c)(t - b)$, odmah vidimo da je taj graf centralno simetričan oko srednje točke c, pa zaključujemo ...

Greška Simpsonove formule



da će integral rasti od 0 do svog maksimuma (plava površina),
a zatim padati (kad dođe u crveno područje), upravo do 0.

Greška Simpsonove formule

Dakle, za polinom w vrijedi $w' = \omega$ i još je

$$w(a) = w(b) = 0, \quad w(x) > 0, \quad x \in (a, b).$$

Onda grešku Simpsonove formule možemo napisati kao

$$E_2(f) = \int_a^b \underbrace{w'(x)}_{\omega(x)} f[a, b, c, x]\, dx.$$

Parcijalnom integracijom ovog integrala dobivamo

$$E_2(f) = w(x)\, f[a, b, c, x]\,\Big|_a^b - \int_a^b w(x)\, \frac{d}{dx} f[a, b, c, x]\, dx.$$

Prvi član je očito jednak 0, jer je $w(a) = w(b) = 0$.

Greška Simpsonove formule

Ostaje još "srediti" drugi član. Već znamo da je podijeljena razlika s dvostrukim čvorom jednaka derivaciji funkcije.

- Analogno, derivacija treće podijeljene razlike $f[a, b, c, x]$ po x, je isto što i
- četvrta podijeljena razlika s dvostrukim čvorom x.

Prema tome, dobivamo formulu za grešku u obliku

$$E_2(f) = -\int_a^b w(x)\, f[a, b, c, x, x]\, dx.$$

Funkcija $g(x) = f[a, b, c, x, x]$ je neprekidna na $[a, b]$, čim je f' neprekidna na $[a, b]$ i postoje druge derivacije f'' u čvorovima a, b i c.

Greška Simpsonove formule

Sad je funkcija w nenegativna i možemo primijeniti generalizirani teorem srednje vrijednosti za integrale. Izlazi

$$E_2(f) = -f[a, b, c, \eta, \eta] \int_a^b w(x)\, dx,$$

za neki $\eta \in [a, b]$.

Ako $f^{(4)}$ postoji na cijelom $[a, b]$, napišemo $f[a, b, c, \eta, \eta]$ kao četvrtu derivaciju od f u nekoj točki $\zeta \in [a, b]$, pa dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!} \int_a^b w(x)\, dx.$$

Ostaje još samo integrirati funkciju w.

Greška Simpsonove formule

Za samu funkciju w vrijedi da je integral polinoma čvorova ω

$$
\begin{aligned}
w(x) &= \int_a^x (t-a)\,(t-c)\,(t-b)\,dt \\
&= (\text{zamjena varijable } y = t-c) \\
&= \int_{-h}^{x-c} (y-h)y(y+h)\,dy = \int_{-h}^{x-c} (y^3 - h^2 y)\,dy \\
&= \left(\frac{y^4}{4} - h^2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-h}^{x-c} = \frac{(x-c)^4}{4} - h^2\frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4}.
\end{aligned}
$$

Greška Simpsonove formule

Za integral funkcije w onda dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b w(x)\,dx &= \int_a^b \left(\frac{(x-c)^4}{4} - h^2 \frac{(x-c)^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dx \\
&= (\text{zamjena varijable } y = x - c) \\
&= \int_{-h}^{h} \left(\frac{y^4}{4} - h^2 \frac{y^2}{2} + \frac{h^4}{4} \right) dy \\
&= \left(\frac{y^5}{20} - h^2 \frac{y^3}{6} + \frac{h^4 y}{4} \right) \Bigg|_{-h}^{h} = 2 \left(\frac{h^5}{20} - \frac{h^5}{6} + \frac{h^5}{4} \right) \\
&= \frac{4}{15} h^5.
\end{aligned}$$

Greška Simpsonove formule

Kad to uključimo u formulu za grešku, dobivamo

$$E_2(f) = -\frac{4}{15}\,h^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\zeta)}{24} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta).$$

Dakle, greška Simpsonove formule je

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta).$$

Dobivena greška je za red veličine bolja, no što bi trebala biti, prema upotrijebljenom interpolacijskom polinomu.

Razlog tome je centralna simetrija polinoma čvorova ω oko srednje točke c, pa je $w(a) = w(b) = 0$. To vrijedi za sve integracijske formule s neparnim brojem čvorova $m + 1$, uz uvjet da su čvorovi simetrični oko polovišta intervala.

Povećana točnost Simpsonove formule

Zadatak. Pokažite da se Simpsonova formula može dobiti integracijom (proširenog) Hermiteovog interpolacijskog polinoma $p_3 \in \mathcal{P}_3$, koji interpolira

- funkciju f u čvorovima a, $(a+b)/2$, b,
- i prvu derivaciju f' u srednjem čvoru $(a+b)/2$.

U dobivenoj integracijskoj formuli, koeficijent uz vrijednost derivacije

$$f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

jednak je nuli, zbog simetrije čvorova i težinske funkcije $w(x) = 1$ oko polovišta intervala.

Izvedite grešku Simpsonove formule — integracijom greške polinoma p_3. Polinom čvorova za p_3 ima fiksni znak na $[a, b]$!

Osnovna formula srednje točke

Izvedimo prvu otvorenu Newton–Cotesovu formulu, za $m = 0$ (samo 1 čvor), poznatu pod imenom formula srednje točke, ili pod engleskim nazivom "midpoint" formula.

Formula srednje točke je otvorena formula, pa definiramo

$$x_{-1} := a, \quad x_0 := \frac{a+b}{2}, \quad x_1 := b \quad \text{i} \quad h := h_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Da bismo odredili formulu srednje točke, moramo naći težinski koeficijent $w_0 := w_0^{(0)}$, takav da je formula

$$I_0(f) = w_0 f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

egzaktna na vektorskom prostoru polinoma što višeg stupnja.

Osnovna formula srednje točke

- Za $f(x) = 1$, imamo

$$b - a = \int_a^b 1 \, dx = w_0,$$

odakle odmah slijedi da je

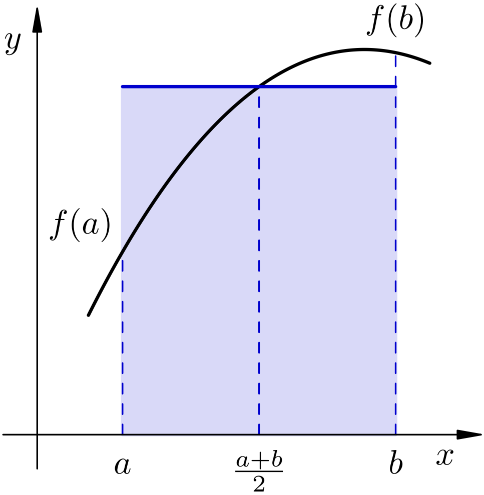
$$\int_a^b f(x) \, dx \approx 2hf\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

I ova formula je interpolacijska, tj. možemo ju dobiti i tako da

- funkciju f interpoliramo polinomom stupnja 0, tj. konstantom, u srednjoj točki $(a+b)/2$,
- a onda egzaktno integriramo tu konstantu na $[a, b]$.

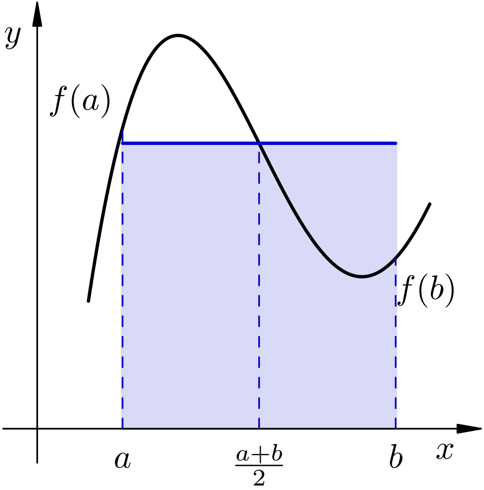
Pravokutna formula u srednjoj točki

Aproksimacija integrala funkcije f površinom pravokutnika.



Pravokutna formula u srednjoj točki

Ovisno o "obliku" funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Egzaktna integracija polinoma stupnja 1

Slično kao i Simpsonova formula,

- formula srednje točke egzaktno integrira i polinome stupnja za jedan većeg — sljedećeg neparnog stupnja.

Pokažimo da formula srednje točke egzaktno integrira i sve polinome stupnja 1.

- Za $f(x) = x$, egzaktni integral je

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

  a aproksimacija integrala po formuli srednje točke je

$$I_0(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,\frac{a+b}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Greška osnovne formule srednje točke

Greška formule srednje točke je integral greške konstantnog interpolacijskog polinoma p_0, koji funkciju f interpolira u srednjoj točki $c := (a + b)/2$.

Ako definiramo $w(x)$ kao integral polinoma čvorova $\omega(t)$

$$w(x) = \int_a^x \omega(t)\,dt = \int_a^x (t - c)\,dt,$$

korištenjem iste tehnike kao kod izvoda greške za Simpsonovu formulu, izlazi da je greška formule srednje točke

$$E_0(f) = \int_a^b e_0(x)\,dx = \frac{h^3}{3} f''(\zeta) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\zeta),$$

uz $\zeta \in [a, b]$.

Formula srednje točke i trapezna formula

Napomena. Za istu duljinu intervala $b - a$,

- formula srednje točke, iako ima samo jednu točku,
- približno je dva puta točnija
- od trapezne formule, koja ima dvije točke.

Greška prve formule ima 24 u nazivniku, a greška druge 12.

Trapeznu formulu možemo dobiti iz formule srednje točke

- linearnom interpolacijom funkcije u srednjoj točki, preko funkcijskih vrijednosti u rubovima intervala

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \approx \frac{1}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big).$$

To unosi dodatnu pogrešku — istog reda veličine kao i u originalnoj formuli (zato dodatni faktor 2). Dokažite to!

Povećana točnost “midpoint” formule

Zadatak. Pokažite da se formula srednje točke može dobiti integracijom Hermiteovog interpolacijskog polinoma $p_1 \in \mathcal{P}_1$, koji interpolira

- funkciju f i prvu derivaciju f' u srednjoj točki $(a+b)/2$.

U dobivenoj integracijskoj formuli, koeficijent uz vrijednost derivacije $f'((a+b)/2)$ jednak je nuli, zbog simetrije težinske funkcije $w(x) = 1$ oko polovišta intervala.

Izvedite grešku formule srednje točke — integracijom greške polinoma p_1. Polinom čvorova za p_1 ima fiksni znak na $[a, b]$!

Napomena. Uočite da je formula srednje točke, ujedno, i Gaussova integracijska formula — red je $m = 0$, a egzaktna je na polinomima stupnja $2m + 1 = 1$ (v. kasnije).

Numerička integracija

- Osnovna Simpsonova formula
- Osnovna formula srednje točke
- Teorija integracijskih formula
- Produljene Newton–Cotesove formule
- Integracijske formule visokog stupnja egzaktnosti
- Gaussove integracijske formule

Interpolacijske integracijske formule — uvod

Nije teško pokazati da su sve obične Newton–Cotesove formule integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži.

Ovaj rezultat vrijedi i općenitije — za bilo kakvu težinsku integracijsku formulu, koja koristi samo vrijednosti funkcije

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f),$$

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

na bilo kojoj (zadanoj) mreži različitih čvorova $x_0^{(m)}, \ldots, x_m^{(m)}$.

Napomene. Radi jednostavnosti pisanja, ponovno ispuštamo gornje indekse m. Ovdje je red m = broj čvorova $- 1$.

Težinska funkcija u integracijskoj formuli

Pretpostavljamo da je težinska funkcija w

- pozitivna (ili barem nenegativna) i integrabilna na $[a, b]$.

Ako je interval $[a, b]$ beskonačan, moramo osigurati da prethodni integral postoji, bar u slučaju kad je

- funkcija f polinom, neovisno o stupnju.

To postižemo zahtjevom da svi momenti težinske funkcije w

$$\mu_k := \int_a^b x^k w(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

postoje (kao integrali) i da su konačni.

Takve težinske funkcije w zovemo polinomno dopustivima. Nadalje pretpostavljamo da je w takva!

Polinomni stupanj egzaktnosti formule

Definicija. Za integracijsku formulu I_m, reda m, kažemo da ima polinomni stupanj egzaktnosti (barem) d, ako je

$$I_m(f) = I(f) \quad \text{ili} \quad E_m(f) = 0, \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{P}_d,$$

pri čemu je $\mathcal{P}_d$ vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog d. Uočiti da d nije jednoznačno definiran kao najveći stupanj egzaktnosti — na primjer, zbog Simpsonove formule!

Integracijska formula I_m je interpolacijska, ako je $d = m$. ■

Preciznije, trebalo bi reći $d \geq m$, tj. stupanj egzaktnosti je barem m, a može biti i veći. Bitno je samo da je

$$E_m(f) = 0, \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{P}_m.$$

Interpolacijske formule

Teorem (Ekvivalencija tvrdnji A, B, C). Integracijska formula

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

ima stupanj egzaktnosti (barem) m (A), ako i samo ako je

- $I_m(f)$ = integral interpolacijskog polinoma p_m za funkciju f u čvorovima $x_0, \ldots, x_m$ (B),

odnosno, ako i samo ako za težinske koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x) \ell_k(x)\, dx, \quad k = 0, \ldots, m,$$

gdje je ℓ_k k-ti polinom Lagrangeove baze, za $k = 0, \ldots, m$ (C).

Interpolacijske formule

Dokaz. Ide u 3 koraka: (C) $\Rightarrow$ (B), (B) $\Rightarrow$ (A), (A) $\Rightarrow$ (C).

1. korak: Pretpostavimo da vrijedi formula za w_k (C). Onda je

$$
\begin{aligned}
I_m(f) &= \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) \int_a^b w(x) \ell_k(x)\, dx \\
&= \int_a^b w(x) \left(\sum_{k=0}^{m} f(x_k) \ell_k(x) \right) dx = \int_a^b w(x) p_m(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

pa je integracijska formula $I_m(f)$ = integral interpolacijskog polinoma p_m za funkciju f u čvorovima $x_0, \ldots, x_m$. Dakle, vrijedi (B).

Interpolacijske formule

2. korak: Pretpostavimo da vrijedi $I_m(f) = I(p_m)$ (B).

Neka je $f = p \in \mathcal{P}_m$ i neka je $p_m \in \mathcal{P}_m$ pripadni interpolacijski polinom za p. Iz jedinstvenosti interpolacije slijedi $p = p_m$, pa je $I_m(p) = I(p)$, za svaki $p \in \mathcal{P}_m$, tj. vrijedi (A).

3. korak: Pretpostavimo da je I_m interpolacijska formula (A).

Za p uzmemo, redom, polinome Lagrangeove baze $\ell_r \in \mathcal{P}_m$, za $r = 0, \ldots, m$. Iz egzaktne integracije ℓ_r slijedi formula (C)

$$\int_a^b w(x)\ell_r(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} w_k \ell_r(x_k) = w_r, \quad r = 0, \ldots, m.$$

■

Korolar. Standardne Newton–Cotesove formule su integrali interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži na $[a, b]$.

■

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

Prethodni korolar kaže još i ovo:

- ako interpolacijski polinomi loše aproksimiraju funkciju, ni integracijske formule neće biti ništa bolje!

Primjer. Uzmimo f = funkcija Runge i pogledajmo kako se ponašaju aproksimacije integrala $I_m(f)$, kad dižemo stupanj m interpolacijskog polinoma. Prava vrijednost integrala je

$$I(f) = \int_{-5}^{5} \frac{dx}{1 + x^2} = 2\mathrm{arctg}5 \approx 2.7468015338900317.$$

Tablice na sljedeće dvije stranice su aproksimacije integrala, izračunate običnim Newton–Cotesovim formulama $I_m(f)$, i pripadne greške $E_m(f) = I(f) - I_m(f)$, za rastuće redove m.

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
1	0.3846153846153846**2**	2.3621861492746471**1**
2	6.794871794871794**87**	−4.048070260981763**15**
3	2.081447963800904**98**	0.665353570089126**74**
4	2.374005305039787**80**	0.372796228850243**92**
5	2.307692307692307**69**	0.439109226197724**03**
6	3.870448673470799**78**	−1.123647139580768**05**
7	2.898994409748378**75**	−0.152192875858347**03**
8	1.500488907127911**79**	1.246312626762119**93**
9	2.398617897841834**72**	0.348183636048197**00**
10	4.673300555653498**76**	−1.926499021763467**04**

Zelene znamenke u aproksimaciji su točne, a sve ostale nisu!

Dizanje stupnja interpolacijskog polinoma

m	Aproksimacija $I_m(f)$	Greška $I(f) - I_m(f)$
11	3.2447729402785852	−0.4979714063885535
12	−0.3129365157534388	3.0597380496434706
13	1.9197972168323889	0.8270043170576428
14	7.8995446408519308	−5.1527431069618990
15	4.1555899270655713	−1.4087574588165254
16	−6.2414373147730832	8.9882388486631150
17	0.2605094414376037	2.4862920924524280
18	18.8766212901092067	−16.1298197562191749
19	7.2460260858819693	−4.4992245519919376
20	−26.8495520888244796	29.5963536227145114

Očito je da aproksimacije $I_m(f)$ ne konvergiraju prema pravoj vrijednosti integrala, kad m raste.

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako izgledaju težinski koeficijenti w_k zatvorenih običnih Newton–Cotesovih formula, za redove $m \geq 1$.

Zbog simetrije težina, u tablici je naveden samo dio w_k.

- Dovoljno je napisati prvu polovinu w_k, za $0 \leq k \leq \lfloor m/2 \rfloor$.
- Za preostale w_k vrijedi $w_k = w_{m-k}$, za $\lfloor m/2 \rfloor < k \leq m$.

Radi preglednosti, koeficijenti w_k prikazani su faktorizirano, kao zajednički faktor A i cjelobrojni faktor W_k, tj. u obliku

$$w_k = A\,W_k\,h, \quad h = (b-a)/m.$$

U tablici su popisane i konstante C_m, p, za grešku formule

$$E_m(f) = C_m\,h^{p+1} f^{(p)}(\zeta), \quad p = \begin{cases} m+1, & \text{za } m \text{ neparan}, \\ m+2, & \text{za } m \text{ paran}. \end{cases}$$

Koeficijenti zatvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	C_m	p
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$-\frac{1}{12}$	2
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$-\frac{1}{90}$	4
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$-\frac{3}{80}$	4
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$-\frac{8}{945}$	6
5	$\frac{5}{288}$	19	75	50	50	75	$-\frac{275}{12096}$	6
6	$\frac{1}{140}$	41	216	27	272	27	$-\frac{9}{1400}$	8
7	$\frac{7}{17280}$	751	3577	1323	2989	2989	$-\frac{8183}{518400}$	8
8	$\frac{4}{14175}$	989	5888	-928	10496	-4540	$-\frac{2368}{467775}$	10

Imena: $m = 3$ — Simpsonova $3/8$, $m = 4$ — Booleova formula.

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

Pogledajmo kako izgledaju težinski koeficijenti w_k otvorenih običnih Newton–Cotesovih formula, za redove $m \geq 0$.

Slično kao kod zatvorenih formula, zbog simetrije, u tablici je naveden samo dio koeficijenata w_k.

Koeficijenti w_k prikazani su u istom obliku $w_k = A\, W_k\, h$, s tim da je za otvorene formule

$$h = \frac{b-a}{m+2}.$$

U tablici su popisane i konstante C_m, p, za grešku formule

$$E_m(f) = C_m\, h^{p+1} f^{(p)}(\zeta), \quad p = \begin{cases} m+2, & \text{za } m \text{ paran}, \\ m+1, & \text{za } m \text{ neparan}. \end{cases}$$

Koeficijenti otvorenih Newton–Cotesovih f.

m	A	W_0	W_1	W_2	C_m	p
0	2	1			$\frac{1}{3}$	2
1	$\frac{3}{2}$	1	1		$\frac{3}{4}$	2
2	$\frac{4}{3}$	2	-1	2	$\frac{14}{45}$	4
3	$\frac{5}{24}$	11	1	1	$\frac{95}{144}$	4
4	$\frac{3}{10}$	11	-14	26	$\frac{41}{140}$	4

Zaključak. Koeficijenti u integracijskim formulama, za veće m,

- poprimaju i pozitivne i negativne predznake,
- rastu po apsolutnoj vrijednosti.

Zbog kraćenja, može doći do velike greške u rezultatu, a sa porastom m-a zbog toga može doći do divergencije od polazne funkcije f (v. kasnije).

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Zadatak. Pokažite da koeficijenti w_k običnih (ekvidistantnih) Newton–Cotesovih formula moraju biti simetrični, tj. ako je

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

integracijska formula reda m, onda za koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = w_{m-k}, \quad 0 \le k \le \lfloor m/2 \rfloor \ \text{(može i do } m\text{)}.$$

Uputa. Uzeti "simetričnu" (par–nepar) bazu potencija oko polovišta

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k, \quad k = 0, \ldots, m,$$

i napisati jednadžbe egzaktne integracije na toj bazi.

Simetrija koeficijenata Newton–Cotesovih f.

Alternativa: Zbog ekvidistantnosti, čvorovi x_k, pa onda i Lagrangeova baza ℓ_k, za $k = 0, \ldots, m$, moraju biti simetrični (parni) oko polovišta intervala. Zaključak slijedi iz formule

$$w_k = \int_a^b \ell_k(x)\,dx, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Isti zaključak vrijedi i za težinske Newton–Cotesove formule

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

uz pretpostavke da su čvorovi x_k simetrični oko polovišta intervala i da je težinska funkcija w parna oko polovišta.

Produljene formule

Umjesto dizanja reda m osnovne formule, puno bolje je

- interval $[a, b]$ podijeliti na n podintervala,
- na svakom podintervalu primijeniti osnovnu formulu,
- i dobivene rezultate zbrojiti.

Tako dobivene formule zovemo produljene formule.

Kod dijeljenja na podintervale treba biti oprezan, jer se osnovna formula izvodi za odgovarajući broj podintervala.

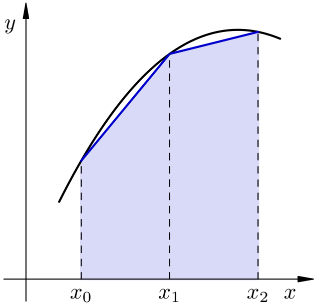
- Na primjer, osnovna Simpsonova formula zahtijeva 2 podintervala, pa n mora biti paran.

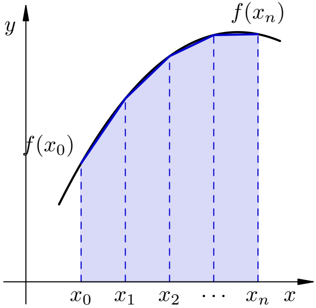
Produljenu formulu možemo interpretirati i kao integral

- odgovarajućeg interpolacijskog splajna za funkciju f.

Produljene formule

Na primjer, produljene trapezne formule, s $n = 2$ i $n = 4$ podintervala, izgledaju ovako:





Produljena trapezna formula

Produljenu trapeznu formulu dobivamo tako da cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$, s tim da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada je

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx.$$

Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,

- iskoristimo “običnu” trapeznu formulu
- i dobivene aproksimacije zbrojimo u produljenu trapeznu aproksimaciju.

Produljena trapezna formula

Najjednostavniji je slučaj kad su točke x_k ekvidistantne, tj. kad je svaki podinterval $[x_{k-1}, x_k]$ iste duljine h. To znači da je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Za skraćenje zapisa formula, uvedimo još oznaku

$$f_k = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Obična trapezna formula na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big(f_{k-1} + f_k\big) + E_{1,k}(f),$$

gdje je $E_{1,k}(f)$ pripadna greška.

Produljena trapezna formula

Znamo da za greške vrijedi (ako f'' postoji na cijelom $[a, b]$)

$$E_{1,k}(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{h}{2}(f_{k-1} + f_k) + E_{1,k}(f) \right) \\ &= \frac{h}{2}((f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \cdots + (f_{n-1} + f_n)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f).\end{aligned}$$

Produljena trapezna formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n\big) + E_n^T(f).$$

U ovoj formuli,

- prvi član je aproksimacija integrala produljenom trapeznom formulom,
- a drugi član $E_n^T(f)$ je greška produljene formule.

Greška $E_n^T(f)$ je zbroj grešaka osnovnih trapeznih formula

$$E_n^T(f) = \sum_{k=1}^{n} E_{1,k}(f) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{h^3}{12} f''(\zeta_k).$$

Greška produljene trapezne formule

Greška, ovako napisana, nije naročito korisna, pa ju treba napisati u drugačijem obliku — "proširimo" faktorom n/n i stavimo zagrade na pravo mjesto:

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3}{12} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right).$$

- Izraz u zagradi je aritmetička sredina vrijednosti drugih derivacija funkcije f u točkama ζ_k.
- Taj se broj sigurno nalazi između najmanje i najveće vrijednosti druge derivacije funkcije f na intervalu $[a, b]$.
- Ako je f'' još i neprekidna na $[a, b]$, onda je broj u zagradi $=$ vrijednost druge derivacije u nekoj točki $\xi \in [a, b]$.

Greška produljene trapezne formule

Dakle, ako je $f \in C^2[a, b]$, onda postoji točka $\xi \in [a, b]$, takva da je

$$f''(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k).$$

Stoga, formulu za grešku možemo napisati kao

$$E_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

Tu smo iskoristili da je $nh = b - a$.

Ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^T(f)$. Dobivamo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Iz ocjene greške produljene trapezne formule

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|,$$

možemo naći i broj podintervala n, koji je potreban da se postigne neka zadana točnost aproksimacije integrala.

Želimo li da je $|E_n^T(f)| \leq \varepsilon$, gdje je ε tražena točnost, dovoljno je tražiti da je

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon,$$

pa treba uzeti

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}, \quad n \text{ cijeli broj.}$$

Produljena Simpsonova formula

Na sličan se način izvodi i produljena Simpsonova formula, koja mora imati paran broj podintervala n. Ograničimo se samo na ekvidistantni slučaj. Imamo

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom Simpsonovom formulom dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo "običnu" Simpsonovu formulu.

Produljena Simpsonova formula

Obična Simpsonova formula na podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_{2k-2} + 4f_{2k-1} + f_{2k}\big) + E_{2,k}(f),$$

gdje je $E_{2,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{2,k}(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}],$$

uz pretpostavku da $f^{(4)}$ postoji na cijelom $[a, b]$.

Produljena Simpsonova formula

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{n/2}\left(\frac{h}{3}\big(f_{2k-2}+4f_{2k-1}+f_{2k}\big)+E_{2,k}(f)\right)\\ &= \frac{h}{3}\big((f_0+4f_1+f_2)+(f_2+4f_3+f_4)+\cdots\\ &\qquad + (f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n)\big)\\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f).\end{aligned}$$

Produljena Simpsonova formula

Sređivanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\big(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots \\ + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\big) + E_n^S(f),$$

pri čemu je $E_n^S(f)$ greška produljene formule. Ova greška je zbroj grešaka osnovnih Simpsonovih formula na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$

$$E_n^S(f) = \sum_{k=1}^{n/2} E_{2,k}(f) = \sum_{k=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta_k).$$

Greška produljene Simpsonove formule

Slično kao kod trapezne formule, grešku je korisno napisati malo drugačije

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f^{(4)}(\zeta_k) \right).$$

Ako je $f^{(4)}$ još i neprekidna, tj. ako je $f \in C^4[a, b]$, onda izraz u zagradi možemo zamijeniti s $f^{(4)}(\xi)$, za neki $\xi \in [a, b]$, pa je

$$E_n^S(f) = -\frac{h^5 n}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

Ponovno, ocijenimo po apsolutnoj vrijednosti $E_n^S(f)$

$$|E_n^S(f)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4, \qquad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Broj podintervala za zadanu točnost

Želimo li da je $|E_n^S(f)| \leq \varepsilon$, dovoljno je tražiti da bude

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4 \leq \varepsilon,$$

pa treba uzeti

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad n \text{ paran cijeli broj.}$$

Produljena formula srednje točke

Da bismo izveli produljenu formulu srednje točke, podijelimo interval $[a, b]$ na n podintervala, gdje je n paran broj.

U ekvidistantnom slučaju je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Aproksimaciju integrala produljenom formulom srednje točke dobivamo iz

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx,$$

tako da na svakom podintervalu $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, za $k = 1, \ldots, n/2$, primijenimo "običnu" formulu srednje točke.

Produljena formula srednje točke

Obična formula srednje točke na $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ima oblik

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = 2h\,f_{2k-1} + E_{0,k}(f),$$

gdje je $E_{0,k}(f)$ pripadna greška

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{2k-2}, x_{2k}].$$

uz pretpostavku da f'' postoji na cijelom $[a, b]$.

Zbrajanjem po $k = 1, \ldots, n/2$, dobivamo

$$I_n(f) = 2h\big(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1}\big) + E_n^M(f).$$

Greška produljene formule srednje točke

Za $f \in C^2[a,b]$, ukupna greška $E_n^M(f)$ produljene formule je

$$E_n^M(f) = \sum_{k=1}^{n/2} \frac{h^3}{3} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{3} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2} f''(\zeta_k) \right)$$
$$= \frac{h^3 n}{6} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\xi),$$

za neki $\xi \in [a,b]$. Ocjena greške $E_n^M(f)$ ima oblik

$$|E_n^M(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{6} M_2 = \frac{(b-a)^3}{6n^2} M_2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Broj podintervala, za zadanu apsolutnu točnost ε, dobivamo na isti način kao prije, s tim da n mora biti paran.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Katkad se produljena formula srednje točke piše s polovičnim (a ne cjelobrojnim) indeksima!

Ovaj oblik formule dobiva se primjenom obične formule srednje točke

- na podintervalima oblika $[x_{k-1}, x_k]$, za $k = 1, \ldots, n$,
- s tim da n više ne mora biti paran,

tj., isto kao kod produljene trapezne formule.

U ekvidistantnom slučaju je

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ovaj h odgovara ranijem $2h$.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Srednja točka podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ je

$$x_{k-1/2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Uz oznaku $f_{k-1/2} = f(x_{k-1/2})$, za $k = 1, \ldots, n$, obična formula srednje točke na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ima oblik

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = hf_{k-1/2} + E_{0,k}(f),$$

a pripadna greška $E_{0,k}(f)$ je sada

$$E_{0,k}(f) = \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k), \quad \text{za neki} \quad \zeta_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke onda ima oblik

$$I_n(f) = h\big(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{n-1/2}\big) + E_n^M(f).$$

Uz pretpostavku $f \in C^2[a,b]$, greška $E_n^M(f)$ ove produljene formule jednaka je

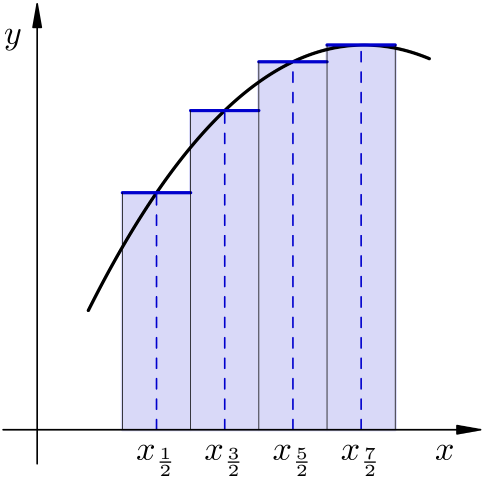
$$\begin{aligned} E_n^M(f) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{h^3}{24} f''(\zeta_k) = \frac{h^3}{24} \cdot n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f''(\zeta_k) \right) \\ &= \frac{h^3 n}{24} f''(\xi) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi), \end{aligned}$$

za neki $\xi \in [a,b]$.

Opet, greška je upola manja od $E_n^T(f)$ i suprotnog znaka.

Produljena formula srednje točke — drugi oblik

Produljena formula srednje točke s $n = 4$ podintervala izgleda ovako:



Numerička integracija

- Osnovna Simpsonova formula
- Osnovna formula srednje točke
- Teorija integracijskih formula
- Produljene Newton–Cotesove formule
- Integracijske formule visokog stupnja egzaktnosti
- Gaussove integracijske formule

Težinske integracijske formule — sažetak

Do sada smo radili integracijske formule oblika

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

(ispuštamo gornje indekse m) u kojima su

- čvorovi integracije $x_0, \ldots, x_m$ bili unaprijed zadani/fiksni,
- a težinske koeficijente $w_0, \ldots, w_m$ određivali smo iz uvjeta egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_d$, što većeg stupnja d (tzv. Newton–Cotesove formule).

Iz teorema o “interpolacijskim” formulama znamo da za polinomni stupanj egzaktnosti d takvih formula vrijedi $d = m$.

Indeks ili red m formule = “očekivani” stupanj egzaktnosti.

Težinske integracijske formule — sažetak

Kod nekih formula (Simpson, srednja točka) dobili smo da je

- za parne m, stvarni stupanj egzaktnosti za jedan veći, tj. vrijedi $d = m + 1$,

iako se težine određuju iz uvjeta egzaktnosti na prostoru $\mathcal{P}_m$.

U nastavku tražimo integracijske formule još višeg stupnja egzaktnosti — za koje vrijedi $d > m$. To znači da

- neki ili svi čvorovi integracije moraju biti "slobodni",
- tako da i njih određujemo iz uvjeta egzaktne integracije.

Iz tradicionalnih razloga, zbog veze s

- ortogonalnim polinomima i njihovim nultočkama,

takve formule se malo drugačije označavaju!

Promjena oznaka za integracijske formule

Promjene u oznakama su:

- čvorovi se broje od 1, a ne od 0,
- broj čvorova označava se s n, umjesto $m + 1$.

Težinska integracijska ili kvadraturna formula onda ima sljedeći oblik:

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k).$$

- Broj $n \in \mathbb{N}$ zove se red formule = broj čvorova.

Opet ispuštamo gornje indekse n, tj. ne pišemo $w_k^{(n)}$, $x_k^{(n)}$.

Interpolacijske težinske kvadraturne formule

Uz ove pretpostavke i oznake,

- za bilo kojih n različitih čvorova $x_1, \ldots, x_n$,

težinska integracijska ili kvadraturna formula

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx \approx I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$

ima polinomni stupanj egzaktnosti (barem) $d = n - 1$,

- ako i samo ako je interpolacijska,

tj. dobivena je kao

- egzaktni integral interpolacijskog polinoma za funkciju f u čvorovima $x_1, \ldots, x_n$.

Težine u interpolacijskim formulama

Ekvivalentno, polinomni stupanj egzaktnosti integracijske formule I_n je (barem) $d = n - 1$, ako i samo ako za težinske koeficijente w_k vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x)\ell_k(x)\,dx, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje su ℓ_k, za $k = 1, \ldots, n$, polinomi Lagrangeove baze na mreži čvorova $x_1, \ldots, x_n$ (stupanj tih polinoma je sada $n - 1$)

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Napomena: Ovo smo već dokazali, samo su oznake nove!

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Nameće se prirodno pitanje: može li se postići i bolje, tj.

- možemo li dobiti veći stupanj egzaktnosti, $d > n - 1$?

Uočite: Jedina šansa za to je

- "pažljiviji" izbor čvorova integracije x_k.

Naime, čim je $d \geq n - 1$,

- težine w_k su nužno određene prethodnom formulom,

pa njih više ne možemo "birati".

Odgovor je potvrdan i relativno jednostavan!
Za formulaciju rezultata definiramo tzv. polinom čvorova

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Teorem. Neka je ℓ zadani cijeli broj, takav da je $0 \le \ell \le n$.
Težinska integracijska formula

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),$$

ima polinomni stupanj egzaktnosti $d = n - 1 + \ell$, ako i samo ako je formula interpolacijska i, dodatno, vrijedi

- polinom čvorova ω_n je ortogonalan na sve polinome $p \in \mathcal{P}_{\ell-1}$ s težinskom funkcijom w,

$$\int_a^b w(x)\, \omega_n(x) p(x)\, dx = 0, \quad \text{za svaki} \quad p \in \mathcal{P}_{\ell-1}.$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Dokaz. Iz prošlog teorema znamo da za stupanj egzaktnosti vrijedi $d \geq n - 1$, ako i samo ako je formula interpolacijska.

- Preostaje pokazati da je $d = n - 1 + \ell$ ekvivalentno relaciji ortogonalnosti za polinom ω_n.

1. smjer (nužnost): $d = n - 1 + \ell \implies$ ortogonalnost.

Neka je $p \in \mathcal{P}_{\ell-1}$ bilo koji polinom stupnja najviše $\ell - 1$.
Za produkt $f = \omega_n p$ onda vrijedi $\omega_n p \in \mathcal{P}_{n+\ell-1}$.

Zbog pretpostavke $d = n - 1 + \ell$, integracijska formula egzaktno integrira polinom $f = \omega_n p$, pa je

$$\int_a^b w(x)\,\omega_n(x)p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} w_k\,\omega_n(x_k)p(x_k).$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

No, svi čvorovi x_k su nultočke polinoma čvorova ω_n, tj. vrijedi

$$\omega_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Onda je

$$\int_a^b w(x)\,\omega_n(x)p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} w_k\,\omega_n(x_k)p(x_k) = 0,$$

za svaki $p \in \mathcal{P}_{\ell-1}$, što dokazuje prvi smjer.

2. smjer (dovoljnost): ortogonalnost $\implies$ $d = n - 1 + \ell$.

Neka je $p \in \mathcal{P}_{n+\ell-1}$ bilo koji polinom. Treba pokazati da integracijska formula I_n egzaktno integrira polinom p.

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Prvo podijelimo p s polinomom čvorova ω_n — po Euklidovom teoremu o dijeljenju s ostatkom. Onda je

$$p = q\,\omega_n + r,$$

gdje je $q \in \mathcal{P}_{\ell-1}$ kvocijent, a $r \in \mathcal{P}_{n-1}$ ostatak.

Egzaktnom integracijom dobivamo

$$\int_a^b w(x)p(x)\,dx = \int_a^b w(x)q(x)\,\omega_n(x)\,dx + \int_a^b w(x)r(x)\,dx.$$

Zbog $q \in \mathcal{P}_{\ell-1}$ i pretpostavke ortogonalnosti

- prvi integral na desnoj strani je nula.

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Dobivamo da je

$$\int_a^b w(x)p(x)\,dx = \int_a^b w(x)r(x)\,dx.$$

No, zbog $r \in \mathcal{P}_{n-1}$ i pretpostavke da je formula interpolacijska,

- formula I_n egzaktno integrira polinom r.

Zato je

$$\int_a^b w(x)r(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} w_k r(x_k).$$

Integracijske formule višeg stupnja egzaktnosti

Sad uvrstimo $r = p - q\,\omega_n$. Dobivamo redom

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} w_k r(x_k) &= \sum_{k=1}^{n} w_k \big(p(x_k) - q(x_k)\,\omega_n(x_k)\big) \\
&= \{ \text{ znamo } \omega_n(x_k) = 0, \text{ za } k = 1, \ldots, n \, \} \\
&= \sum_{k=1}^{n} w_k p(x_k).
\end{aligned}$$

Kad “spojimo” zadnje tri relacije, izlazi

$$\int_a^b w(x) p(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} w_k p(x_k) = I_n(p),$$

pa formula I_n egzaktno integrira sve polinome $p \in \mathcal{P}_{n+\ell-1}$.

O granicama za stupanj egzaktnosti

Nekoliko komentara na prethodni rezultat.

Relacija ortogonalnosti polinoma čvorova ω_n

$$\int_a^b w(x)\,\omega_n(x)p(x)\,dx = 0, \quad \text{za svaki} \quad p \in \mathcal{P}_{\ell-1},$$

omogućava povećanje stupnja egzaktnosti formule za ℓ,

- s $d = n - 1$,
- na $d = n - 1 + \ell$.

Ograničenje $0 \leq \ell \leq n$ u teoremu je prirodno i nužno!

Naime, ova relacija ortogonalnosti postavlja

- točno ℓ dodatnih uvjeta na čvorove $x_1, \ldots, x_n$.

O granicama za stupanj egzaktnosti

Za $\ell = 0$ — nema dodatnih ograničenja, jer za bilo koji izbor čvorova možemo dobiti $d = n - 1$ (interpolacijska formula).

S druge strane, zbog nenegativnosti težinske funkcije w, mora biti $\ell \leq n$. Opravdanje:

- Polinom čvorova ω_n mora biti ortogonalan na sve polinome iz $\mathcal{P}_{\ell-1}$, tj. na polinome stupnja najviše $\ell - 1$.
- Za $\ell > n$, polinom ω_n bi trebao biti ortogonalan (barem) na sve polinome iz $\mathcal{P}_n$, a to znači i na samog sebe, što je nemoguće!

Dakle, $\ell = n$ je maksimalno povećanje stupnja egzaktnosti koje se može postići, a

- maksimalni stupanj egzaktnosti je $d_{\max} = 2n - 1$.

Gaussove integracijske formule — $d = 2n - 1$

Integracijske ili kvadraturne formule maksimalnog stupnja egzaktnosti $d = 2n - 1$ zovu se

- Gaussove ili Gauss–Christoffelove formule.

Relacija ortogonalnosti iz prethodnog teorema, za $\ell = n$, glasi

$$\int_a^b w(x)\, \omega_n(x) p(x)\, dx = 0, \quad \text{za svaki} \quad p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Drugim riječima, polinom čvorova ω_n (stupnja n)

- mora biti ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja — do najviše $n - 1$.

No, to isto svojstvo zadovoljava i odgovarajući ortogonalni polinom p_n, stupnja n, s težinskom funkcijom w na $[a, b]$.

Čvorovi u Gaussovim formulama

Znamo da je p_n jednoznačno određen, do na multiplikativnu konstantu.

Ako za p_n uzmemo da ima vodeći koeficijent $A_n = 1$, onda je

$$\omega_n = p_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zato se formule najvišeg stupnja egzaktnosti obično zovu

- Gaussove formule s težinskom funkcijom w na $[a, b]$.

U Gaussovim formulama, čvorovi x_k su potpuno određeni kao sve nultočke polinoma p_n,

$$p_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Sjetite se, te nultočke su realne, jednostruke i leže u otvorenom intervalu (a, b).

Težine u Gaussovim formulama

Za težine w_k znamo da vrijedi

$$w_k = \int_a^b w(x)\ell_k(x)\,dx, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje su ℓ_k, za $k = 1, \ldots, n$, polinomi Lagrangeove baze na mreži čvorova $x_1, \ldots, x_n$ (stupanj od ℓ_k je $n - 1$).

Kod Lagrangeove interpolacije, pokazali smo da polinome ℓ_k možemo izraziti preko polinoma čvorova $\omega_n = p_n$ (ranije ω), u obliku

$$\ell_k(x) = \frac{p_n(x)}{(x - x_k)\,p_n'(x_k)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Uočite da multiplikativna konstanta u p_n nije bitna — skrati se, pa možemo uzeti bilo koju normalizaciju za polinome p_n.

Težine u Gaussovim formulama

Dobivamo izraz za težine w_k preko ortogonalnih polinoma p_n

$$w_k = \int_a^b w(x) \, \frac{p_n(x)}{(x - x_k) \, p_n'(x_k)} \, dx, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Prema autoru ove formule, težine w_k u Gaussovim formulama ponekad se zovu i Christoffelovi brojevi.

Navedeni integral se može eksplicitno izračunati! O tome, kao i o ostalim svojstvima Gaussovih formula — malo kasnije.

Prvo, spomenimo još dva tipa integracijskih formula koje se koriste u praksi, a imaju

- visoki, ali ne i maksimalni stupanj egzaktnosti, tj. $\ell < n$.

Integracijske formule s fiksnim rubovima

Prethodni teorem ima praktične primjene i za $\ell < n$.
U težinskoj integracijskoj ili kvadraturnoj formuli

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k).$$

unaprijed zadamo $n - \ell$ čvorova integracije u $[a, b]$, a

- preostalih ℓ čvorova određujemo tako da dobijemo maksimalni mogući stupanj egzaktnosti $d = n - 1 + \ell$.

Ovaj pristup se najčešće koristi za $n - \ell = 1$ i $n - \ell = 2$, a zadani čvorovi su

- jedan ili oba ruba intervala integracije $[a, b]$,

s tim da zadani rubni čvor mora biti konačan.

Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

Neka je lijevi rub intervala — točka a, konačna

- i zadana kao čvor integracije $x_1 = a$.

Preostalih $\ell = n - 1$ čvorova određujemo tako da

- dobijemo maksimalni stupanj egzaktnosti $d = 2n - 2$.

Ove integracijske formule zovu se Gauss–Radau formule.

Prema prethodnom teoremu, pripadni polinom čvorova

$$\omega_n(x) = (x - a)(x - x_2)\cdots(x - x_n) =: (x - a)\, p_{n-1}(x)$$

mora zadovoljavati relaciju ortogonalnosti za $\ell = n - 1$

$$\int_a^b w(x)\, \omega_n(x) p(x)\, dx = 0, \quad \text{za svaki} \quad p \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

To možemo zapisati i ovako

$$\int_a^b w(x)\,(x-a)\,p_{n-1}(x)\,p(x)\,dx = 0, \quad \text{za svaki} \quad p \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Faktor $(x-a)$, koji odgovara fiksnom čvoru $x_1 = a$, ima fiksni predznak na $[a, b]$ — nenegativan je. Zato ga smijemo

- "izvaditi" iz polinoma čvorova ω_n
- i "dodati" težinskoj funkciji w.

Tako dobivamo "novu" težinsku funkciju

$$w_a(x) := (x-a)\,w(x),$$

koja je, također, nenegativna na $[a, b]$.

Gauss–Radau formule — jedan rub, $d = 2n - 2$

Relacija ortogonalnosti sada ima oblik

$$\int_a^b w_a(x)\, p_{n-1}(x) p(x)\, dx = 0, \quad \text{za svaki} \quad p \in \mathcal{P}_{n-2},$$

gdje je p_{n-1} polinom stupnja $n - 1$.

Slično ranijem, odavde dobivamo sljedeći zaključak:

- preostalih $n - 1$ čvorova $x_2, \ldots, x_n$ moraju biti nultočke ortogonalnog polinoma p_{n-1} s težinskom funkcijom w_a.

Potpuno isti princip radi i za desni rub b, s faktorom $b - x$.

Ako fiksiramo $x_n = b$, preostali čvorovi $x_1, \ldots, x_{n-1}$ moraju biti nultočke ortogonalnog polinoma p_{n-1} s težinskom funkcijom $w_b(x) := (b - x)\, w(x)$.

Gauss–Lobatto formule — oba ruba, $d = 2n - 3$

Neka su oba ruba intervala — točke a i b, konačne

- i zadane kao čvorovi integracije $x_1 = a$, $x_n = b$.

Preostala $\ell = n - 2$ čvora određujemo tako da

- dobijemo maksimalni stupanj egzaktnosti $d = 2n - 3$.

Ove integracijske formule zovu se Gauss–Lobatto formule.

Na potpuno isti način se dokazuje da

- preostala $n - 2$ čvora $x_2, \ldots, x_{n-1}$ moraju biti nultočke ortogonalnog polinoma p_{n-2} s težinskom funkcijom $w_{a,b}$,

$$w_{a,b}(x) := (x - a)(b - x)\, w(x).$$

Napomena: ovo “transformiranje” težinske funkcije radi samo za čvorove u rubovima intervala (nenegativnost).

Numerička integracija

Gaussove integracijske formule — ponavljanje

Gaussova integracijska ili kvadraturna formula s težinskom funkcijom w na intervalu $[a, b]$ ima oblik

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = I_n(f) + E_n(f), \quad I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k),$$

i dostiže maksimalni stupanj egzaktnosti $d_{\max} = 2n - 1$.

- Čvorovi x_k su sve nultočke ortogonalnog polinoma p_n s težinskom funkcijom w na $[a, b]$,
- Težine w_k su dane formulom (ℓ_k preko p_n i x_k)

$$w_k = \int_a^b w(x) \frac{p_n(x)}{(x - x_k)\, p_n'(x_k)}\, dx, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Čvorovi Gaussovih integracijskih formula

U nastavku, detaljnije analiziramo neka bitna svojstava Gaussovih formula. Samo radi jednostavnosti, dodatno pretpostavljamo da je težinska funkcija w

- pozitivna na cijelom intervalu $[a, b]$, osim eventualno u konačno mnogo točaka (singulariteti dozvoljeni).

Teorem (Svojstva čvorova). Svi čvorovi x_k su realni, različiti i leže unutar otvorenog intervala (a, b).

Dokaz. Znamo da su čvorovi x_k sve nultočke odgovarajućeg ortogonalnog polinoma p_n s težinskom funkcijom w na $[a, b]$,

$$p_n(x_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Sve tvrdnje o čvorovima direktna su posljedica tvrdnji o nultočkama odgovarajućih ortogonalnih polinoma. ■

Težine Gaussovih integracijskih formula

Integral u formuli za težine w_k može se eksplicitno izračunati.

Teorem (Izrazi za težine). U Gaussovoj integracijskoj formuli reda n, za težine w_k vrijede sljedeće dvije relacije

$$w_k = \frac{a_{n-1}\gamma_{n-1}}{p_{n-1}(x_k)\, p_n'(x_k)} = \frac{-a_n\gamma_n}{p_{n+1}(x_k)\, p_n'(x_k)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

pri čemu je A_n vodeći koeficijent polinoma p_n,

$$a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}, \qquad \gamma_n = \|p_n\|^2 = \langle p_n, p_n \rangle > 0.$$

Dokaz. Treba izračunati integrale za težine

$$w_k = \int_a^b w(x)\, \frac{p_n(x)}{(x - x_k)\, p_n'(x_k)}\, dx. \quad k = 1, \ldots, n.$$

Težine Gaussovih integracijskih formula

Zbog člana $p_n(x)/(x - x_k)$, koristimo Christoffel–Darbouxov identitet u x i $y = x_k$, za n (ili za $n + 1$), a zatim integriramo. Fiksiramo indeks k (tj. čvor x_k) i izlučimo broj $p_n'(x_k)$, pa je

$$w_k = \frac{1}{p_n'(x_k)} \int_a^b w(x) \, \frac{p_n(x)}{x - x_k} \, dx.$$

Integral računamo iz Christoffel–Darbouxovog identiteta za n, tj. suma na lijevoj strani ide do $n - 1$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x) p_j(y)}{\gamma_j} = \frac{p_n(x) p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x) p_n(y)}{a_{n-1} \gamma_{n-1} (x - y)}.$$

Uvrstimo $y = x_k$ i iskoristimo da je $p_n(x_k) = 0$, pa dobijemo

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x) p_j(x_k)}{\gamma_j} = \frac{p_n(x) p_{n-1}(x_k)}{a_{n-1} \gamma_{n-1} (x - x_k)}.$$

Težine Gaussovih integracijskih formula

Pomnožimo obje strane s $w(x)\,p_0(x)$ i integriramo na $[a, b]$. Izlazi

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{p_j(x_k)}{\gamma_j} \int_a^b w(x)\,p_j(x) p_0(x)\,dx$$

$$= \frac{p_{n-1}(x_k)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}} \int_a^b w(x)\,p_0(x)\,\frac{p_n(x)}{x - x_k}\,dx.$$

Zbog ortogonalnosti polinoma p_j i p_0, na lijevoj strani ostaje samo član za $j = 0$, a pripadni integral je $\|p_0\|^2 = \gamma_0$, tj.

$$\frac{p_0(x_k)}{\gamma_0} \cdot \gamma_0 = \frac{p_{n-1}(x_k)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}} \int_a^b w(x)\,p_0(x)\,\frac{p_n(x)}{x - x_k}\,dx.$$

Težine Gaussovih integracijskih formula

Na kraju, znamo da je $p_0(x) = c \neq 0$, pa skratimo i tu konstantu, tako da na lijevoj strani ostaje 1. Onda je

$$\int_a^b w(x)\,\frac{p_n(x)}{x - x_k}\,dx = \frac{a_{n-1}\gamma_{n-1}}{p_{n-1}(x_k)}.$$

Kad ovo uvrstimo u izraz za w_k s početka dokaza, dobijemo prvu formulu iz tvrdnje

$$w_k = \frac{1}{p_n'(x_k)} \int_a^b w(x)\,\frac{p_n(x)}{x - x_k}\,dx = \frac{a_{n-1}\gamma_{n-1}}{p_{n-1}(x_k)\,p_n'(x_k)}.$$

Druga izlazi iz Christoffel–Darbouxovog identiteta za $n + 1$, ili tročlane rekurzije u x_k, pa je $p_{n+1}(x_k) = -c_n p_{n-1}(x_k)$. ■

Težine Gaussovih integracijskih formula

Teorem. U Gaussovoj integracijskoj formuli reda n, za težine vrijedi

$$w_k = \frac{1}{\|\widetilde{z}_k\|_2^2} > 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje je $\widetilde{z}_k$ vektor vrijednosti ortonormiranih polinoma u čvoru x_k

$$\widetilde{z}_k := \widetilde{z}(x_k) = \left[\frac{p_0(x_k)}{\|p_0\|}, \ldots, \frac{p_{n-1}(x_k)}{\|p_{n-1}\|} \right]^T \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz. Iz Christoffel–Darbouxovog identiteta (za n) u jednoj točki x_k, dobivamo

$$\|\widetilde{z}_k\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\big(p_j(x_k)\big)^2}{\gamma_j} = \frac{p_n'(x_k) p_{n-1}(x_k) - p_{n-1}'(x_k) p_n(x_k)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}}.$$

Težine Gaussovih formula — pozitivnost

Zbog $p_n(x_k) = 0$, iz prve formule u prošlom teoremu, slijedi

$$\|\widetilde{z}_k\|_2^2 = \frac{p_n'(x_k)p_{n-1}(x_k)}{a_{n-1}\gamma_{n-1}} = \frac{1}{w_k}.$$

Nađimo prvu komponentu vektora $\widetilde{z}_k$. Neka je $p_0(x) = c \neq 0$. Onda je

$$\|p_0\|_2^2 = \int_a^b w(x)\, p_0^2(x)\, dx = c^2 \int_a^b w(x)\, dx = c^2 \mu_0,$$

pa je

$$\widetilde{z}_{k,1} = p_0(x_k)/\|p_0\| = 1/\sqrt{\mu_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \|\widetilde{z}_k\|_2 > 0.$$

Iz $\|\widetilde{z}_k\|_2^2 > 0$ odmah slijedi $w_k > 0$ u Gaussovim formulama.

$\blacksquare$

U nastavku, dajemo još jedan dokaz pozitivnosti, zato jer se može lako generalizirati i na neke druge integracijske formule.

Pozitivnost težina u Gaussovim formulama

Teorem (Pozitivnost težina). Sve težine w_k su pozitivne.

Dokaz. Neka su ℓ_j, za $j = 1, \ldots, n$, polinomi Lagrangeove baze na mreži čvorova $x_1, \ldots, x_n$ (stupanj od ℓ_j je $n - 1$).

Za polinom ℓ_j u čvoru x_k vrijedi

$$\ell_j(x_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k. \end{cases}$$

Uočite da ista relacija vrijedi i za kvadrate ℓ_j^2 polinoma Lagrangeove baze u čvorovima x_k

$$\ell_j^2(x_k) = \ell_j(x_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq k, \\ 1, & \text{za } j = k. \end{cases}$$

Pozitivnost težina u Gaussovim formulama

Onda je očito da vrijedi

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} w_k \ell_j(x_k) = \sum_{k=1}^{n} w_k \ell_j^2(x_k), \quad j = 1, \ldots, n.$$

No, polinomi ℓ_j^2 imaju stupanj $2n - 2$, pa ih Gaussova formula integrira egzaktno! To znači da je

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} w_k \ell_j^2(x_k) = \int_a^b w(x) \ell_j^2(x)\, dx > 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

zbog pozitivnosti podintegralne funkcije na desnoj strani.

Time je dokazana pozitivnost svih težina w_k u Gaussovim integracijskim formulama.

$\blacksquare$

Pozitivnost težina u formulama s $d = 2n - 2$

Potpuno isti argument vrijedi i za

- integracijske formule stupnja egzaktnosti $2n - 2$, (za jedan manjeg nego u Gaussovim formulama),
- jer egzaktno integriraju polinome ℓ_k^2, za $k = 1, \ldots, n$.

Na primjer,

- težine u Gauss–Radau formulama su, također, pozitivne.

Napomena. Može se pokazati i da su težine u Gauss–Lobatto formulama, također, pozitivne.

Međutim, dokaz je nešto složeniji — ide preko polinoma kardinalne baze za pripadnu interpolaciju: rubni čvorovi a i b su jednostruki, a ostali čvorovi $x_2, \ldots, x_{n-1}$ su dvostruki.

Konvergencija Gaussovih formula

Teorem. Ako je $[a,b]$ konačni interval, tada Gaussove formule konvergiraju za bilo koju neprekidnu funkciju f, tj. za svaku funkciju $f \in C[a,b]$ vrijedi

$$E_n(f) \to 0, \quad \text{za} \quad n \to \infty.$$

Dokaz se temelji na Weierstrassovom teoremu o uniformnoj aproksimaciji funkcije f polinomima, koji kaže:

Ako je $\widehat{p}_{2n-1}(f;\cdot)$ polinom stupnja $\leq 2n-1$ koji najbolje uniformno aproksimira f na $[a,b]$, onda vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \|f(\cdot) - \widehat{p}_{2n-1}(f;\cdot)\|_\infty = 0.$$

Za bilo koji $n \in \mathbb{N}$, gledamo grešku Gaussove formule reda n.

Konvergencija Gaussovih formula

Zbog polinomnog stupnja egzaktnosti $d = 2n - 1$, odmah vidimo da je $E_n(\widehat{p}_{2n-1}) = 0$. Zatim, redom, dobivamo

$$
\begin{aligned}
|E_n(f)| &= |E_n(f - \widehat{p}_{2n-1})| \\
&= \left| \int_a^b w(x)\big(f(x) - \widehat{p}_{2n-1}(x)\big)\,dx - \sum_{k=1}^{n} w_k \big(f(x_k) - \widehat{p}_{2n-1}(f; x_k)\big) \right| \\
&\le \int_a^b w(x) \big| f(x) - \widehat{p}_{2n-1}(x) \big|\,dx + \sum_{k=1}^{n} |w_k| \big| f(x_k) - \widehat{p}_{2n-1}(f; x_k) \big| \\
&\le \|f(\cdot) - \widehat{p}_{2n-1}(f; \cdot)\|_\infty \left(\int_a^b w(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} |w_k| \right).
\end{aligned}
$$

Konvergencija Gaussovih formula

Sad iskoristimo da su težinski koeficijenti w_k pozitivni u Gaussovim formulama. Zato je $|w_k| = w_k$, odakle slijedi

$$\sum_{k=1}^{n} |w_k| = \sum_{k=1}^{n} w_k.$$

Na kraju, uočimo još da je (egzaktna integracija konstante 1)

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = \int_a^b w(x)\,dx = \mu_0.$$

Iz prethodne formule za ocjenu greške $|E_n(f)|$ zaključujemo

$$|E_n(f)| \leq 2\mu_0 \, \|f(\cdot) - \widehat{p}_{2n-1}(f;\cdot)\|_\infty \to 0, \quad \text{za} \quad n \to \infty,$$

što je trebalo dokazati. ∎

Ne vrijedi za Newton–Cotesove formule

Ovaj zaključak ne vrijedi za Newton–Cotesove formule,

- iako formula s n čvorova egzaktno integrira polinom $\widehat{p}_{n-1}$.

Naime, za malo veće n, težine w_k mogu biti i negativne. Tada još uvijek vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = \int_a^b w(x)\,dx = \mu_0,$$

zbog egzaktne integracije konstante 1. Međutim, apsolutne vrijednosti težina neograničeno rastu, kad n raste, tako da

$$\sum_{k=1}^{n} |w_k| \to \infty, \quad \text{za} \quad n \to \infty,$$

a upravo ova suma ulazi u ocjenu greške.

Simetrija u Gaussovim integracijskim formulama

Pretpostavimo da je težinska funkcija w

- simetrična na intervalu integracije $[a, b]$.

Za konačni interval $[a, b]$, to znači da je w parna oko polovišta intervala

$$x_0 := \frac{a+b}{2},$$

tj. vrijedi

$$w(x_0 + h) = w(x_0 - h), \quad \text{za} \quad |h| \leq \frac{b-a}{2}.$$

Za cijeli $\mathbb{R}$, to znači da je w parna oko neke točke $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$w(x_0 + h) = w(x_0 - h), \quad \text{za} \quad h \in \mathbb{R}.$$

Onda su pripadni ortogonalni polinomi simetrični (par–nepar) i Gaussove integracijske formule su, također, simetrične.

Simetrija u Gaussovim integracijskim formulama

Preciznije, ortogonalni polinomi p_n su parni ili neparni oko x_0, ovisno o parnosti od n, tj. za svaki $h \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$p_n(x_0 + h) = \begin{cases} p_n(x_0 - h), & n \text{ paran}, \\ -p_n(x_0 - h), & n \text{ neparan}. \end{cases}$$

U Gaussovoj integracijskoj formuli reda n,

- čvorovi x_k su simetrični obzirom na x_0,
- za simetrični par čvorova, težine w_k su jednake.

Ako čvorove poredamo uzlazno, $x_1 < \cdots < x_n$, onda vrijedi

$$\frac{x_k + x_{n+1-k}}{2} = x_0, \quad w_k = w_{n+1-k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$