Numerička matematika

9. predavanje

Saša Singer i Nela Bosner

PMF - Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

Računanje vrijednosti funkcija

- Hornerova shema
- Generalizirana Hornerova shema
- Primjeri generalizirane Hornerove sheme
- Primjer trigonometrijskih polinoma

Numerička integracija

- Osnovna trapezna formula

Hornerova shema i ortogonalni polinomi

Napomena. Pojam “izvrednjavanje” znači

- računanje vrijednosti zadane funkcije u zadanoj točki.

Na kraju Prog1, radi se Hornerova shema za izvrednjavanje polinoma, zapisanog u bazi potencija.

- Postoji vrlo slična shema za izvrednjavanje u bazi ortogonalnih polinoma.

Za početak, ponovimo svojstva Hornerove sheme za polinome.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Zadan je polinom p_n, stupnja n,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_n \neq 0,$$

kojemu treba izračunati vrijednost u zadanoj točki x_0. To se može napraviti na više načina.

- Prvo, napravimo to direktno po zapisu, potencirajući.

Krenemo li od nulte potencije $x^0 = 1$, svaka sljedeća potencija dobiva se rekurzivno (ili iterativno)

$$x^i = x \cdot x^{i-1}.$$

Imamo li zapamćen x^{i-1}, lako je izračunati x^i — korištenjem samo jednog množenja.

Vrijednost polinoma u točki — potenciranjem

Vrijednost polinoma u točki `x_0` s pamćenjem potencija

```
sum = a[0];
pot = 1;
za i = 1 do n radi {
  pot = pot * x_0;
  sum = sum + a[i] * pot;
};
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum.  */
```

U unutarnjoj petlji javljaju se 2 množenja i 1 zbrajanje. Petlja se izvršava n puta, pa ukupno imamo

$$2n \text{ množenja } + \; n \text{ zbrajanja.}$$

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Izvrednjavanje polinoma u točki može se izvesti i s manje množenja — ako polinom zapišemo u obliku

$$p_n(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

Algoritam koji po prethodnoj relaciji izvrednjava polinom zove se Hornerova shema.

Hornerova shema

```
sum = a[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  sum = sum * x_0 + a[i];
};
/* Na kraju je p_n(x_0) = sum.  */
```

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Očito je da smo, ovim algoritmom, prepolovili broj množenja, tj. da je njegova složenost

$$n \text{ množenja } + \ n \text{ zbrajanja.}$$

Hornerova shema je optimalan algoritam za izvrednjavanje zadanog polinoma u zadanoj točki.

- Ulaz algoritma su: polinom i točka!

Napomena: za izvrednjavanje fiksnog polinoma u puno točaka

- postoje i brži algoritmi — tzv. prethodna obrada koeficijenata, brza Fourierova transformacija (FFT).

Vrijednost polinoma u točki — Hornerova shema

Za opći polinom (ulaz u Horner) automatski pretpostavljamo da je većina koeficijenata različita od nule.

Ako imamo fiksni polinom s malo koeficijenata različitih od nule — postoje i bolji algoritmi! Na primjer, polinom

$$p_{100}(x) = x^{100} + 1$$

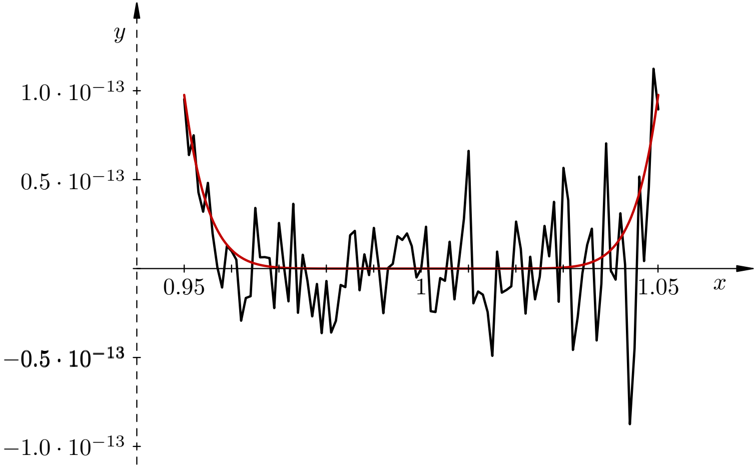
nema smisla izvrednjavati Hornerovom shemom, jer predugo traje. Binarno potenciranje je brže. Sastavite takav algoritam.

Dodatna prednost Hornerove sheme:

- Hornerova shema može biti stabilnija od direktnog potenciranja, zbog redova veličine članova u sumi.

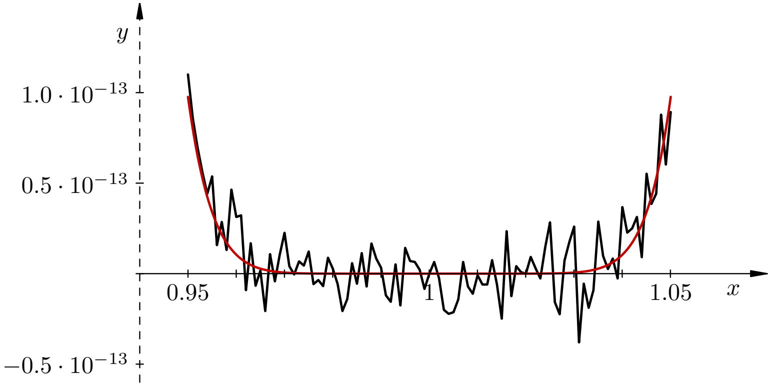
Ilustracija je na sljedeće dvije stranice.

Stabilnost direktnog potenciranja



Izvrednjavanje $(x-1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x:
direktnim potenciranjem (dvostruka točnost).

Stabilnost Hornerove sheme



Izvrednjavanje $(x - 1)^{10}$ razvijenog po potencijama od x:
Hornerovom shemom (dvostruka točnost).

Hornerova shema “na ruke”

Hornerova shema “na ruke” radi se tako da se napravi tablica s dva reda.

- U gornjem redu popišu se svi koeficijenti polinoma p_n, redom — od a_n, do a_0.
- Donji red se računa korištenjem gornjeg reda i točke x_0.

Elemente donjeg reda, slijeva nadesno, označimo s

$$x_0,\ c_{n-1},\ c_{n-2},\ldots,\ c_0,\ r_0,$$

tako da se c_{n-1} nalazi ispod a_n:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline x_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_0 & r_0 \end{array}.$$

Hornerova shema “na ruke”

Elementi donjeg reda računaju se ovako:

$$\begin{aligned} c_{n-1} &:= a_n, \\ c_{i-1} &:= c_i * x_0 + a_i, \qquad i = n-1, \ldots, 1, \\ r_0 &:= c_0 * x_0 + a_0. \end{aligned}$$

Dakle,

- vodeći koeficijent a_n se prepiše,
- svi ostali se računaju tako da se posljednji izračunati c_i pomnoži s x_0, a zatim mu se doda a_i (napiše se ispod a_i).

Na kraju je $p_n(x_0) = r_0$.

Hornerova shema “na ruke”

Primjer. Izračunajmo vrijednost polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki $x_0 = -1$.

Formirajmo tablicu:

	2	0	−1	4	0	1
−1	2	−2	1	3	−3	4

Dakle, $p_5(-1) = 4$.

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Koeficijenti c_i u donjem redu tablice imaju posebno značenje.

Promatrajmo polinom koji dobijemo dijeljenjem polinoma p_n s polinomom stupnja 1, oblika $x - x_0$.

- Kvocijent ta dva polinoma nazovimo q_{n-1} — to je ponovno polinom, stupnja $n - 1$,
- a ostatak je broj (mora biti stupnja manjeg od polinoma kojim dijelimo) — označimo ga s b_0.

Tada vrijedi

$$p_n(x) = (x - x_0)q_{n-1}(x) + b_0.$$

Uvrštavanje $x = x_0$ u prethodnu relaciju pokazuje da je

$$b_0 = p_n(x_0) = r_0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Označimo koeficijente polinoma q_{n-1} s b_i, za $i = 1, \ldots, n$,

$$q_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} x^i .$$

Kad to uvrstimo u relaciju za dijeljenje i sredimo koeficijenate uz odgovarajuće potencije, izlazi

$$\begin{aligned} p_n(x) = b_n x^n &+ (b_{n-1} - x_0\, b_n) x^{n-1} + \cdots + (b_1 - x_0\, b_2) x \\ &+ b_0 - x_0\, b_1 . \end{aligned}$$

Za vodeći koeficijent b_n, odmah vidimo da je $b_n = a_n$, a za ostale koeficijente dobivamo

$$a_i = b_i - x_0 \cdot b_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 0.$$

Dijeljenje polinoma linearnim faktorom $x - x_0$

Dakle, b_i možemo izračunati iz b_{i+1} rekurzijom

$$b_i = a_i + x_0 \cdot b_{i+1}.$$

Primijetite da je to relacija istog oblika kao za dobivanje c_i, samo s pomaknutim indeksima. Kako je na startu $b_n = c_{n-1}$, zaključujemo da je

$$b_i = c_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zaključak: koeficijenti koje dobijemo u Hornerovoj shemi su

- koeficijenti kvocijenta i ostatka pri dijeljenju polinoma p_n linearnim faktorom $x - x_0$.

Primjer

Primjer. Podijelimo

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

linearnim polinomom $x + 1$.

Primijetite da je to ista tablica kao u prošlom primjeru, pa imamo

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{array}.$$

Odatle lako čitamo

$$2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1 = (x + 1)\left(2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 3\right) + 4.$$

■

Algoritam za dijeljenje polinoma s $x - x_0$

Dijeljenje polinoma s $(x - x_0)$

```
b[n] = a[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  b[i] = b[i + 1] * x_0 + a[i];
};
/* Polinom-kvocijent:  */
```

/* $q_{n-1}(x) = \mathtt{b[n]} \cdot x^{n-1} + \cdots + \mathtt{b[2]} \cdot x + \mathtt{b[1]}$.   */

Potpuna Hornerova shema

Što se događa ako postupak dijeljenja polinoma linearnim faktorom nastavimo, tj. ponovimo više puta (dok ide)?

Dobivamo

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (x - x_0) q_{n-1}(x) + r_0 \\ &= (x - x_0) \big[(x - x_0) q_{n-2}(x) + r_1 \big] + r_0 \\ &= (x - x_0)^2 q_{n-2}(x) + r_1 (x - x_0) + r_0 \\ &= \quad \cdots \\ &= r_n (x - x_0)^n + \cdots + r_1 (x - x_0) + r_0. \end{aligned}$$

Dakle, polinom p_n razvijen je po potencijama od $(x - x_0)$.

Koja su značenja koeficijenata r_i?

Potpuna Hornerova shema

Usporedimo dobiveni oblik s Taylorovim polinomom oko x_0

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!} \, (x - x_0)^i,$$

pa zaključujemo da vrijedi

$$r_i = \frac{p_n^{(i)}(x_0)}{i!}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Dakle, potpuna Hornerova shema računa

- sve Taylorove koeficijente polinoma u zadanoj točki x_0,

tj. sve derivacije polinoma u točki x_0, podijeljene pripadnim faktorijelima.

Primjer

Primjer. Nađimo sve derivacije polinoma

$$p_5(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 1$$

u točki -1.

Formirajmo potpunu Hornerovu tablicu.

	2	0	−1	4	0	1
−1	2	−2	1	3	−3	4
−1	2	−4	5	−2	−1	
−1	2	−6	11	−13		
−1	2	−8	19			
−1	2	−10				
−1	2					

Primjer

Odatle lako čitamo

$$
\begin{aligned}
p_5(-1) &= 4, & p_5^{(1)}(-1) &= -1 \cdot 1! = -1, \\
p_5^{(2)}(-1) &= -13 \cdot 2! = -26, & p_5^{(3)}(-1) &= 19 \cdot 3! = 114, \\
p_5^{(4)}(-1) &= -10 \cdot 4! = -240, & p_5^{(5)}(-1) &= 2 \cdot 5! = 240.
\end{aligned}
$$

Algoritam za Taylorov razvoj polinoma

Taylorov razvoj polinoma oko x_0

Algoritam nalazi koeficijente r_i u Taylorovom razvoju zadanog polinoma oko točke x_0, koristeći jedno jednodimenzionalno polje (ono izlazno, bez pomoćnih).

```
za i = 0 do n radi {
  r[i] = a[i];
};
za i = 1 do n radi {
  za j = n - 1 do i - 1 radi {
    r[j] = r[j + 1] * x_0 + r[j];
  }; };
```

Razvoji po ortogonalnim polinomima

U primjenama se često koriste razvoji oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

gdje je $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ neki ortogonalni sustav funkcija na domeni aproksimacije (ne moraju biti polinomi).

- Razvoj funkcije f u red po ortogonalnim polinomima je očita generalizacija reda potencija.
- Takvi redovi koriste se za aproksimaciju funkcije f, ako znamo da red konvergira prema f na nekoj domeni.

Razvoji po ortogonalnim polinomima

"Rezanjem" reda dobivamo aproksimaciju funkcije f

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x).$$

Posebno se često koriste razvoji po Čebiševljevim polinomima prve vrste T_n (i to u smislu neprekidnih najmanjih kvadrata)

- za aproksimaciju elementarnih i "manje elementarnih" specijalnih funkcija,
- zbog skoro jednolikog rasporeda greške na domeni — tj. dobivamo tzv. "skoro minimaks aproksimacije".

Primjer ide malo kasnije!

Razvoji po ortogonalnim polinomima

Da bismo izračunali $f_N(x)$, moramo znati sve koeficijente a_n i sve funkcije p_n.

- Najčešće nemamo formulu za p_n, nego znamo da funkcije p_n zadovoljavaju jednostavnu tročlanu rekurziju po n.

Pristup računanju vrijednosti $f_N(x)$ je isti kao i ranije.

- Ako unaprijed ne znamo N, onda se sumacija vrši unaprijed, a $p_n(x)$ se računa redom iz rekurzije.

Iz teorije aproksimacija ili iz vrijednosti koeficijenata a_n, često je moguće unaprijed naći koliko članova N treba uzeti za (uniformnu) zadanu točnost.

- Tada se koristi generalizacija Hornerove sheme za brzo izvrednjavanje f_N.

Izvrednjavanje tročlanih homogenih rekurzija

Ortogonalni polinomi, ali i mnoge druge specijalne funkcije (koje ne moraju biti ortogonalne), zadovoljavaju tročlanu homogenu rekurziju oblika

$$p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

s tim da su poznate "početne" funkcije p_0 i p_1, i sve funkcije α_n, β_n, za $n \in \mathbb{N}$.

- Naglasak je na obliku rekurzije, a ne na ortogonalnosti.

Definiramo silaznu rekurziju za koeficijente B_n:

$$\begin{aligned} B_{N+2} &= B_{N+1} = 0, \\ B_n &= a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Generalizirana Hornerova shema

Uvrštavanjem u formulu za $f_N(x)$, dobivamo

$$
\begin{aligned}
f_N(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x) = (\text{uvrstimo } a_n \text{ iz rekurzije za } B_n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \big(B_n + \alpha_n(x) B_{n+1} + \beta_{n+1}(x) B_{n+2}\big)\, p_n(x) \\
&= \sum_{n=-1}^{N-1} B_{n+1} p_{n+1}(x) + \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(x) B_{n+1} p_n(x) \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{N+1} \beta_n(x) B_{n+1} p_{n-1}(x) \\
&= (\text{rastavimo indekse na } 1 \text{ do } N-1 \text{ i ostale}) = \cdots
\end{aligned}
$$

Generalizirana Hornerova shema

$$\begin{aligned}
\cdots &= \sum_{n=1}^{N-1} B_{n+1}\big(p_{n+1}(x) + \alpha_n(x)p_n(x) + \beta_n(x)p_{n-1}(x)\big) \\
&\qquad + B_0p_0(x) + B_1p_1(x) + \alpha_0(x)B_1p_0(x) \\
&= \text{(iskoristimo da je tročlana rekurzija homogena)} \\
&= B_0p_0(x) + B_1\big(p_1(x) + \alpha_0(x)p_0(x)\big).
\end{aligned}$$

U pripadnom silaznom algoritmu, uobičajeno je napraviti jedan korak rekurzije za koeficijente B_n “na ruke”, tako da

- algoritam počinje indeksima $B_{N+1} = 0$, $B_N = a_N$.

Algoritam za generaliziranu Hornerovu shemu

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ (silazni algoritam)

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k]-alpha_k(x)*B_1-beta_k+1(x)*B_2;
};
f_N(x) = B_0 * p_0(x)
            +B_1*(p_1(x)+alpha_0(x)*p_0(x));
```

Ovaj algoritam se još zove i Clenshaw-ov algoritam.

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Ako trebamo izračunati i derivaciju $f_N'(x)$, do pripadnog algoritma dolazimo deriviranjem rekurzije za B_n.

- Koeficijente B_n shvatimo kao funkcije od x.
- Deriviramo $B_n = a_n - \alpha_n(x) B_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}$, s tim da B_n' označava derivaciju B_n po x, u točki x.

"Formalnim" deriviranjem dobivamo rekurziju za B_n'

$$
\begin{aligned}
B_{N+2} &= B_{N+1} = 0, \\
B'_{N+2} &= B'_{N+1} = 0, \\
B_n &= a_n - \alpha_n(x) B_{n+1} - \beta_{n+1}(x) B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0, \\
B_n' &= -\alpha_n'(x) B_{n+1} - \alpha_n(x) B'_{n+1} \\
&\qquad - \beta'_{n+1}(x) B_{n+2} - \beta_{n+1}(x) B'_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.
\end{aligned}
$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Odavde je vidljivo da je i $B'_N = 0$. Uz standardnu oznaku

$$b_n = -\alpha'_n(x)B_{n+1} - \beta'_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0,$$

vidimo da je $b_N = 0$. Onda rekurziju za B'_n pišemo u obliku

$$B'_n = b_n - \alpha_n(x)B'_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B'_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0.$$

Ovo ima skoro isti oblik kao i rekurzija za B_n, osim zamjene a_n s b_n.

Vrijednost $f'_N(x)$ dobivamo deriviranjem $f_N(x)$ po x,

$$f_N(x) = B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big).$$

Gen. Hornerova shema za funkciju i derivaciju

Deriviranjem izlazi

$$\begin{aligned} f_N'(x) = B_0 p_0'(x) + B_0' p_0(x) \\ &+ B_1 \big(p_1'(x) + \alpha_0'(x) p_0(x) + \alpha_0(x) p_0'(x)\big), \\ &+ B_1' \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big). \end{aligned}$$

Zaključak. Da bismo izračunali $f_N'(x)$, dovoljno je znati samo derivacije "početnih" funkcija p_0' i p_1', kao i α_n' i β_n'.

- Za računanje $f_N'(x)$ treba i rekurzija za $f_N(x)$, pa se te dvije vrijednosti obično zajedno računaju.
- Rekurzije za B_n i B_n' provodimo u istoj petlji.

Algoritam za funkciju i derivaciju

Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$ i $f'_N(x)$

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
B'_1 = 0;
B'_0 = 0;
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k]-alpha_k(x)*B_1-beta_k+1(x)*B_2;
  B'_2 = B'_1;
  B'_1 = B'_0;
  b = - alpha'_k(x)*B_1-beta'_k+1(x)*B_2;
  B'_0 = b-alpha_k(x)*B'_1-beta_k+1(x)*B'_2;
};
```

Algoritam za funkciju i derivaciju

```
f_N(x)  = B_0*p_0(x)
            +B_1*(p_1(x)+alpha_0(x)*p_0(x));
f'_N(x)  = B_0*p'_0(x)+B'_0*p_0(x)
            +B_1*(p'_1(x)+alpha'_0(x)*p_0(x)
                  +alpha_0(x)*p'_0(x))
            +B'_1*(p_1(x)+alpha_0(x)*p_0(x));
```

Na isti način možemo izvesti i rekurzije za računanje viših derivacija $f_N^{(k)}(x)$, za $k \geq 2$.

- Međutim, u praksi to gotovo nikada nije potrebno.
- Sve "korisne" familije funkcija p_n, $n \in \mathbb{N}$, zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe drugog reda, s parametrom n.

Primjer: Klasični ortogonalni polinomi!

Parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma

Tvrdnja. Neparni Čebiševljevi polinomi su neparne, a parni su parne funkcije.

Dokaz se provodi indukcijom. Za nulti i prvi polinom, tvrdnja očito vrijedi, jer je $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

Pretpostavimo da su svi parni polinomi (do nekog stupnja n), parne, a svi neparni, neparne funkcije. Iz rekurzije

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

vidimo da je

- član $2xT_n(x)$ suprotne parnosti od $T_n(x)$, tj.
- $2xT_n(x)$ je iste parnosti kao T_{n-1},
- pa je T_{n+1} iste parnosti kao T_{n-1}.

∎

Rekurzija za parne/neparne Čebiševljeve pol.

Isti dokaz kao za parnost/neparnost Čebiševljevih polinoma vrijedi i za:

- Čebiševljeve polinome druge vrste,
- Legendreove polinome,
- Hermiteove polinome.

Sada je jasno da se parne funkcije razvijaju po parnim, a neparne po neparnim Čebiševljevim polinomima.

Zaključak. Za sve polinome koji su parne/neparne funkcije, korisno je imati rekurziju samo za parne/neparne polinome.

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Napišimo rekurziju za dva susjedna parna polinoma

$$T_{2n+2}(x) - 2xT_{2n+1}(x) + T_{2n}(x) = 0$$
$$T_{2n}(x) - 2xT_{2n-1}(x) + T_{2n-2}(x) = 0,$$

kao i rekurziju za srednji, neparni član

$$T_{2n+1}(x) - 2xT_{2n}(x) + T_{2n-1}(x) = 0.$$

Zbrojimo rekurzije za parne članove. Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2T_{2n}(x) - 2x\big(T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x)\big) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Iz rekurzije za neparni član iskoristimo da je

$$T_{2n+1}(x) + T_{2n-1}(x) = 2xT_{2n}(x).$$

Rekurzija za parne Čebiševljeve polinome

Tada dobivamo

$$T_{2n+2}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n}(x) + T_{2n-2}(x) = 0.$$

Početak te rekurzije su prva dva parna polinoma

$$T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Za neparne polinome, rekurzija se dobiva na sličan način. Pokažite da je rekurzija za neparne Čebiševljeve polinome istog oblika kao za parne

$$T_{2n+1}(x) + 2(1 - 2x^2)T_{2n-1}(x) + T_{2n-3}(x) = 0,$$

uz početak te rekurzije

$$T_1(x) = x, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Rekurzije za ostale ortogonalne polinome

Napomena. Za sve ostale klasične ortogonalne polinome (osim Laguerreovih), rekurzija za parne/neparne polinome izvodi se na isti način.

Napomena. Rekurziju za parne/neparne Čebiševljeve polinome mogli smo i lakše izvesti, korištenjem

- adicijske formule za trigonometrijske funkcije,
- i eksplicitne formule za $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

odnosno, $T_n(x) = \cos(n\varphi)$, uz $x = \cos\varphi$.

Razvoj cos x po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \cos x$$

ima razvoj po parnim normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k}\left(\frac{2x}{\pi}\right), \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.47200121576823476745	6	0.00000000021934576590
1	−0.49940325827040708740	7	−0.00000000000074816487
2	0.02799207961754761751	8	0.00000000000000193230
3	−0.00059669519654884650	9	−0.00000000000000000391
4	0.00000670439486991684	10	0.00000000000000000001
5	−0.00000004653229589732		

Razvoj cos x po Čebiševljevim polinomima

Supstitucijom

$$y = \frac{2x}{\pi}$$

prethodni se razvoj svodi na razvoj funkcije kosinus na intervalu $[-1, 1]$ po parnim Čebiševljevim polinomima.

U algoritmu za generaliziranu Hornerovu shemu treba uvrstiti da je za parne Čebiševljeve polinome

$$\alpha(x) = 2(1 - 2x^2), \qquad \beta(x) = 1,$$
$$p_0(x) = T_0(x), \qquad p_1(x) = T_2(x).$$

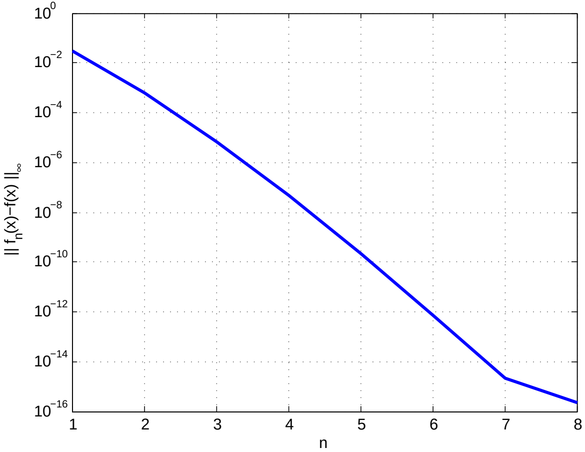
Koeficijenti a_k u razvoju brzo padaju, pa su greške u aproksimaciji vrlo male i približno jednake prvom odbačenom članu.

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x. Testirati za razne n i x.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x.

Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

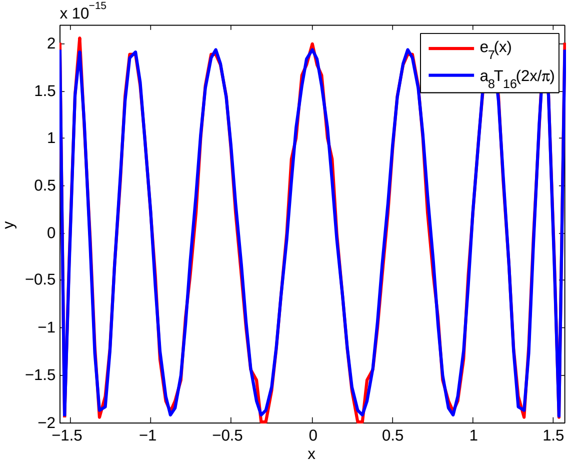
Na grafu je prikazana greška $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty$ na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$, za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.



Razvoj $\cos x$ po Čebiševljevim polinomima

Na grafu je

- greška $e_7(x) = f(x) - f_7(x)$ prikazana crvenom bojom,
- prvi odbačeni član $a_8 T_{16}(2x/\pi)$ plavom bojom.



Razvoj $\ln(x+1)$ po Čebiševljevim polinomima

Primjer. Funkcija

$$f(x) = \ln(1+x)$$

ima razvoj po normaliziranim Čebiševljevim polinomima na intervalu $[0,1]$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k^*(x), \quad x \in [0,1],$$

gdje je $T_k^*(x) = T_k(2x-1)$.

Sami izvedite rekurziju za $T_k^*(x)$ i pripadnu generaliziranu Hornerovu shemu.

Razvoj $\ln(x+1)$ po Čebiševljevim polinomima

Koeficijenti razvoja dani su tablicom:

k	a_k	k	a_k
0	0.37645281291919543163	13	0.00000000001717587317
1	0.34314575050761980479	14	−0.00000000000273642009
2	−0.02943725152285941438	15	0.00000000000043819577
3	0.00336708925556438925	16	−0.00000000000007048360
4	−0.00043327588861004446	17	0.00000000000001138172
5	0.00005947071198957983	18	−0.00000000000000184431
6	−0.00000850296754120286	19	0.00000000000000029978
7	0.00000125046736220057	20	−0.00000000000000004886
8	−0.00000018772799565082	21	0.00000000000000000798
9	0.00000002863025064840	22	−0.00000000000000000131
10	−0.00000000442095698068	23	0.00000000000000000021
11	0.00000000068956027323	24	−0.00000000000000000004
12	−0.00000000010845068551	25	0.00000000000000000001

Razvoj $\ln(x+1)$ po Čebiševljevim polinomima

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu prvih članova reda do uključivo $k = n$.
- Napišite algoritam za računanje vrijednosti $f_n(x)$, za zadane n i x. Testirati za razne n i x.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$, pogreške $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ i prvog odbačenog člana razvoja (jednako prvi član greške) u nizu točaka x.

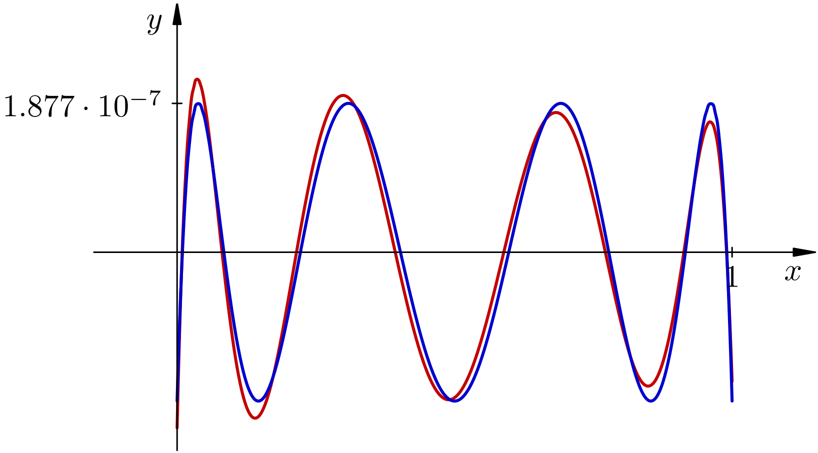
U prethodnom razvoju za $\ln(x+1)$ uzmemo samo članove do indeksa 7, tj. neka je prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$.

$$f_7(x) = \sum_{k=0}^{7} a_k T_k^*(x), \quad e_7(x) = a_8 T_8^*(x) + \sum_{k=9}^{\infty} a_k T_k^*(x).$$

Razvoj $\ln(x+1)$ po Čebiševljevim polinomima

Na sljedećem grafu je

- greška $e_7(x) = f(x) - f_7(x)$ prikazana crvenom bojom,
- prvi odbačeni član $a_8 T_8^*(x)$ plavom bojom.



Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Konačno, treba reći kako se dobivaju koeficijenti a_k u ovakvom razvoju.

Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da radimo na standardnom intervalu $[-1, 1]$.

Relacija ortogonalnosti za Čebiševljeve polinome prve vrste ima oblik

$$\langle T_k, T_\ell \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)\, T_\ell(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k \neq \ell, \\ \pi, & \text{za } k = \ell = 0, \\ \pi/2, & \text{za } k = \ell \neq 0. \end{cases}$$

Vidimo da je $\| T_0 \|^2 = 2 \, \| T_k \|^2$, za bilo koji $k \geq 1$.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Zato se razvoj zadane funkcije f po T_k obično piše u obliku

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x).$$

Pripadne formule za koeficijente u razvoju su onda

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad k \geq 0.$$

Ove integrale možemo izračunati analitički

- tek za poneke funkcije f.

Računanje koeficijenata a_k u razvoju

Aproksimacija f_n funkcije f po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata je

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k T_k(x).$$

Za numeričko računanje koeficijenata a_k, za $k \leq n$, postoje dva pristupa:

- Gauss–Čebiševljeva integracija reda većeg od n,
- diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma u nultočkama ili ektremima Čebiševljevog polinoma T_{N+1}, za $N \geq n$.

Ova dva pristupa su ekvivalentna, za razvoje po T_k i općenito.

Prednost razvoja po T_k = nultočke T_{N+1} se lako računaju!

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Budući da su Čebiševljevi polinomi T_k zapravo kosinusi, za njih vrijede

- vrlo slične relacije diskretne ortogonalnosti kao kod trigonometrijskih funkcija (v. malo kasnije).

Neka su x_j sve različite nultočke Čebiševljevog polinoma T_{N+1}, tj. neka je

$$T_{N+1}(x_j) = \cos(N+1)\vartheta_j = 0.$$

Nije teško izračunati da je tada

$$x_j = \cos\vartheta_j, \quad \vartheta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2(N+1)}, \quad j = 0, \ldots, N.$$

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za Čebiševljeve polinome, na skupu nultočaka $\{x_0, \ldots, x_N\}$ polinoma T_{N+1}, vrijede sljedeće relacije ortogonalnosti

$$\sum_{j=0}^{N} T_k(x_j)\, T_\ell(x_j) = \sum_{j=0}^{N} \cos(k\vartheta_j) \cdot \cos(\ell\vartheta_j)$$

$$= \begin{cases} 0 & k \neq \ell, \text{ uz } k, \ell \leq N, \\ (N+1)/2 & k = \ell, \text{ uz } 0 < k \leq N, \\ N+1 & k = \ell = 0. \end{cases}$$

Skica dokaza: Produkt kosinusa pretvorimo u zbroj kosinusa.

- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume ($N + 1$-i korijeni iz jedinice).

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Dakle, $\{T_0, T_1, \ldots, T_N\}$ je ortogonalna baza u prostoru polinoma $\mathcal{P}_N$ obzirom na diskretni skalarni produkt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, g(x_j).$$

Uočite da ovom sustavu funkcija ne možemo dodati sljedeći Čebiševljev polinom T_{N+1}, jer je

- njegov vektor vrijednosti u zadanim točkama nul-vektor.

Napomena: Unitarni prostor "događaja" je $\mathbb{R}^{N+1}$, s tim da

- svakoj funkciji f pridružujemo
- vektor njezinih vrijednosti u točkama $x_0, \ldots, x_N$.

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Neka je f_n aproksimacija za f po pripadnoj diskretnoj ortogonalnoj metodi najmanjih kvadrata, oblika

$$f_n(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} d_k T_k(x), \quad n \leq N.$$

Za koeficijente vrijedi standardna formula $\langle f, T_k \rangle / \| T_k \|^2$ u pripadnom skalarnom produktu, pa je

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \quad k = 0, \ldots, N.$$

Napomena: koeficijenti d_k ovise o N, samo to nije posebno označeno!

Diskretna ortogonalnost Čebiševljevih polinoma

Za zadane f i N, ovi koeficijenti

$$d_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_k(x_j), \quad k = 0, \ldots, N,$$

se jednostavno računaju!

Ako koeficijenti a_k relativno brzo padaju, onda za relativno male vrijednosti N (na pr. $N = 31$, ili $N = 63$) dobivamo

- da se a_k i d_k podudaraju na punu točnost računala (double, extended)!

Slične relacije diskretne ortogonalnosti vrijede i u ekstremima polinoma T_{N+1}.

Računanje koeficijenata iz diskretne ortog.

Standardno se koristi $N + 1 = 2^m$. Za fiksni N (odnosno, m):

- tablica vrijednosti $f(x_j)$ se pripremi jednom, za sve k,
- vrijednosti $T_k(x_j)$ mogu se računati direktno preko cos, ili iz pripremljene tablice svih potrebnih kosinusa.

Literatura:

- Luke Y. L., "Mathematical functions and their approximations", Academic Press, 1975.

Ilustracija brzine konvergencije koeficijenata $d_k^{(N+1)}$ prema pravim koeficijentima a_k, u ovisnosti o broju točaka $N + 1$.

Koeficijenti za $\cos x$ na $[-\pi/2, \pi/2]$

Koeficijent a_0 (uz T_0) i njegove aproksimacije:

$N+1$	$d_0^{(N+1)}$	greška
1	1.00000 00000 00000 000	$-5.2800E-01$
2	0.44401 58403 26213 234	$2.7985E-02$
4	0.47199 45113 73366 783	$6.7044E-06$
8	0.47200 12157 68232 835	$1.9320E-15$
16	0.47200 12157 68234 768	$-3.2526E-19$
32	0.47200 12157 68234 768	$-3.5237E-19$
$a_0 =$	0.47200 12157 68234 767	

Koeficijent a_8 (uz T_{16}) i njegove aproksimacije:

$N+1$	$d_8^{(N+1)}$	greška
32	0.00000 00000 00001 932	$9.5100E-20$
$a_8 =$	0.00000 00000 00001 932	

Koeficijenti za $\ln(x+1)$ na $[0,1]$

Koeficijent a_0 (uz T_0^*) i njegove aproksimacije:

$N+1$	$d_0^{(N+1)}$	greška
1	0.40546 51081 08164 382	$-2.9012\text{E}{-02}$
2	0.37688 59011 88190 076	$-4.3309\text{E}{-04}$
4	0.37645 30006 47120 599	$-1.8773\text{E}{-07}$
8	0.37645 28129 19265 915	$-7.0484\text{E}{-14}$
16	0.37645 28129 19195 432	$-1.0842\text{E}{-19}$
32	0.37645 28129 19195 432	$-1.0842\text{E}{-19}$

$a_0 =$ 0.37645 28129 19195 432

Koeficijent a_{16} (uz T_{16}^*) i njegove aproksimacije:

$N+1$	$d_{16}^{(N+1)}$	greška
32	0.00000 00000 00070 484	$2.5896\text{E}{-21}$

$a_{16} =$ 0.00000 00000 00070 484

Razvoj periodičkih funkcija

Za aproksimaciju periodičkih funkcija standardno koristimo Fourierove redove.

- Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je f periodička funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$.

Fourierov red za funkciju f je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

gdje su

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Napomena. Zbog periodičnosti, granice integracije mogu biti bilo koji c, $c + 2\pi$!

Konvergencija Fourierovog reda

Konvergencija Fourierovog reda riješena je Dirichletovim teoremom.

Teorem (Dirichlet). Pretpostavimo da je

(a) f funkcija, osim možda u konačno mnogo točaka na $\langle -\pi, \pi \rangle$ (u tim točkama može imati i više vrijednosti),

(b) f je periodična s periodom 2π,

(c) f i f' su po dijelovima neprekidne funkcije na $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Tada red Fourierov red konvergira prema

(1) $f(x)$, ako je x točka u kojoj je funkcija f neprekidna,

(2) $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, ako u točki x funkcija ima prekid (skok).

Razvoj periodičkih funkcija

Pretpostavimo da su koeficijenti a_n i b_n poznati i da želimo izračunati aproksimaciju trigonometrijskim polinomom

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx),$$

gdje je N unaprijed zadan (zanemarimo poseban "status" a_0).

Trigonometrijski polinom sastoji se iz dva dijela: kosinusnog i sinusnog (to ćemo iskoristiti u algoritmu).

Nadalje, Fourierov red

- parne funkcije $f(x) = f(-x)$ ima samo kosinusni dio, a
- neparne funkcije $f(x) = -f(-x)$ ima samo sinusni dio razvoja.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f parna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx).$$

- U direktnoj sumaciji trebamo N računanja funkcije $\cos$, za $\cos(nx)$, uz $n \geq 1$.
- Možemo koristiti i generaliziranu Hornerovu shemu, samo treba naći tročlanu homogenu rekurziju za

$$p_n(x) = \cos(nx).$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu kosinusa pretvara u produkt

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Ako stavimo $a = (n+1)x$ i $b = (n-1)x$, dobivamo

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2\cos x\, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, u općoj tročlanoj rekurziji treba uzeti

$$\alpha_n(x) = -2\cos x, \quad \beta_n(x) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tročlana rekurzija za $\cos(nx)$

Rekurzija za B_n ima oblik

$$\begin{aligned} B_{N+2} &= B_{N+1} = 0, \\ B_n &= a_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = \cos x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot 1 + B_1 \big(\cos x - 2\cos x \cdot 1\big) \\ &= B_0 - B_1 \cos x. \end{aligned}$$

Sad imamo sve elemente za generaliziranu Hornerovu shemu.

Trigonometrijski polinom za parne funkcije

Fourierov “red” parne funkcije

```
B_1 = 0;
B_0 = a[N];
alpha = 2 * cos(x);
za k = N - 1 do 0 radi {
  B_2 = B_1;
  B_1 = B_0;
  B_0 = a[k] + alpha * B_1 - B_2;
};
f_N(x) = B_0 - 0.5 * alpha * B_1;
```

Algoritam funkciju cos računa samo jednom.

Razvoj parnih periodičkih funkcija

Neka je f neparna funkcija. Njezin trigonometrijski polinom je

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zbog sume koja ide od 1 treba biti oprezan. Zgodniji zapis je

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{n+1} \sin((n+1)x).$$

Sad očito treba definirati

$$p_n(x) = \sin((n+1)x).$$

Tročlana rekurzija za $\sin(nx)$

Tročlanu rekurziju dobivamo iz formule koja sumu sinusa pretvara u produkt

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

Ako stavimo $a = (n+2)x$ i $b = nx$, dobivamo

$$\sin((n+2)x) + \sin(nx) = 2 \sin((n+1)x) \cos x,$$

pa tražena rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2 \cos x \, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

što je potpuno isti oblik kao i za parne funkcije, odnosno za $p_n(x) = \cos(nx)$.

Rekurzija za B_n ima isti oblik kao prije, samo starta od $N-1$

$$\begin{aligned} B_{N+1} &= B_N = 0, \\ B_n &= b_{n+1} + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N-1, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Početne funkcije su $p_0(x) = \sin x$ i $p_1(x) = \sin(2x)$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot \sin x + B_1 \big(2\sin x \cos x - 2\cos x \cdot \sin x\big) \\ &= B_0 \sin x. \end{aligned}$$

jer je $p_1(x) = 2\sin x \cos x$.

Algoritam napišite sami.

Razvoj periodičkih funkcija

Za opći Fourierov red, koji ima i parni i neparni dio, treba spojiti prethodne algoritme.

Problem. Neparni je za 1 kraći, jer starta s $N-1$.

Rješenje. Umjetno definiramo $b_0 = 0$ i pišemo

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sin(nx).$$

Zatim uzmemo

$$p_n(x) = \sin(nx).$$

Razvoj periodičkih funkcija

Rekurzija za p_n je ista, a za B_n vrijedi “produljena” rekurzija

$$\begin{aligned} B_{N+1} &= B_N = 0, \\ B_n &= b_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \qquad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

Početne funkcije su $p_0(x) = 0$ i $p_1(x) = \sin x$, pa je

$$\begin{aligned} f_N(x) &= B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ &= B_0 \cdot 0 + B_1 \big(\sin x - 2\cos x \cdot 0\big) \\ &= B_1 \sin x. \end{aligned}$$

To pokazuje da B_0 uopće ne treba računati, ali baš to i očekujemo, kad smo rekurziju pomakli za jedan indeks naviše!

Fourierov red za $x + |x|$

Primjer. Funkcija

$$f(x) = x + |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

može se razviti u Fourierov red

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx).$$

- Za aproksimaciju f_n funkcije f uzimamo sumu svih članova do uključivo $\cos(nx)$, odnosno, $\sin(nx)$.
- Pogledajmo ponašanje aproksimacije $f_n(x)$ i pogrešku $e_n(x) = f(x) - f_n(x)$ za razne n.

Fourierov red za $x + |x|$

Napomena. Fourierov red konvergira prema prekidnoj funkciji

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0), \\ 2x, & x \in [0, \pi), \\ \pi, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Ova funkcija je "periodičko" proširenje od f, s tim da ima korektnu vrijednost u točki prekida.

Koeficijente u Fourierovom razvoju možemo računati direktno

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + |x|) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos(kx)\, dx.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Sad razlikujemo dva slučaja $k = 0$ i $k \neq 0$. Za $k = 0$ imamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2x \, dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^\pi = \pi.$$

Za $k \neq 0$ imamo

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 2x \cos(kx) \, dx = \left\{ \begin{matrix} u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = \cos(kx)\,dx & v = \sin(kx)/k \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2x}{k} \sin(kx) \Big|_0^\pi - \frac{2}{k} \int_0^\pi \sin(kx) \, dx \right) = \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{k^2\pi} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{k^2\pi} \big((-1)^k - 1 \big). \end{aligned}$$

Fourierov red za $x + |x|$

Odatle odmah slijedi da je

$$a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, \quad a_{2k} = 0.$$

Za b_k, budući da je $k \neq 0$, imamo

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2x\sin(kx)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = \sin(kx)\,dx & v = -\cos(kx)/k \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2x}{k}\cos(kx)\,\Big|_0^\pi + \frac{2}{k}\int_0^\pi \cos(kx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{2}{k^2}\sin(kx)\,\Big|_0^\pi\right) = -\frac{2}{k}(-1)^k.$$

Fourierov red za $x + |x|$

Posljednji rezultat možemo zapisati i kao

$$b_k = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k-1}.$$

Koeficijente u Fourierovom redu mogli smo računati zbrajanjem Fourierovih razvoja funkcija

- x na $[-\pi, \pi]$, (neparna funkcija), pa razvoj ima samo b_n,
- $|x|$ na $[-\pi, \pi]$, (parna funkcija), pa razvoj ima samo a_n.

Fourierov red za $x + |x|$

Za vježbu pokažite da je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

$$x = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx), \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle.$$

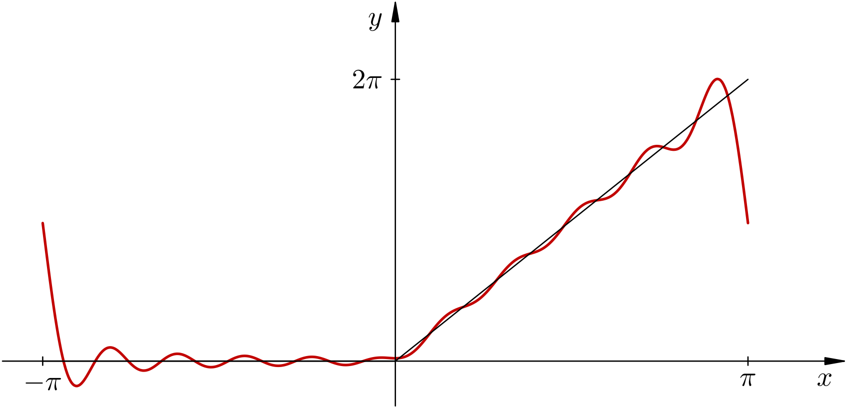
Zbog neprekidnosti periodičkog proširenja za $|x|$,

- koeficijenti a_k u razvoju trnu kao k^{-2}, tj. $a_k = O(k^{-2})$.

Periodičko proširenje za x ima prekid, pa

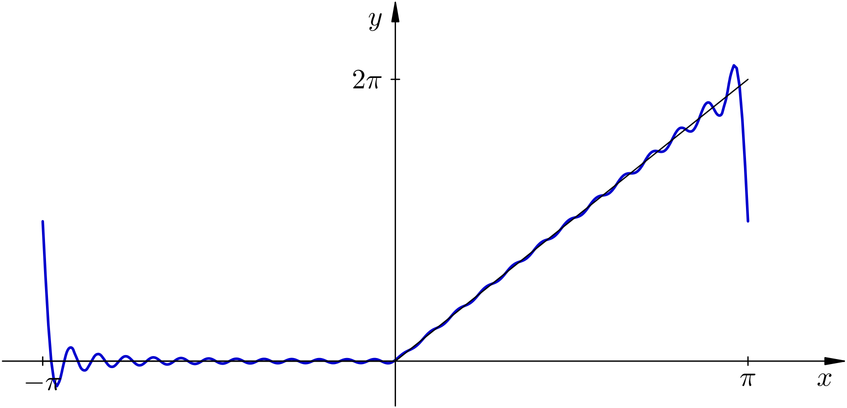
- koeficijenti b_k u razvoju trnu kao k^{-1}, tj. $b_k = O(k^{-1})$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



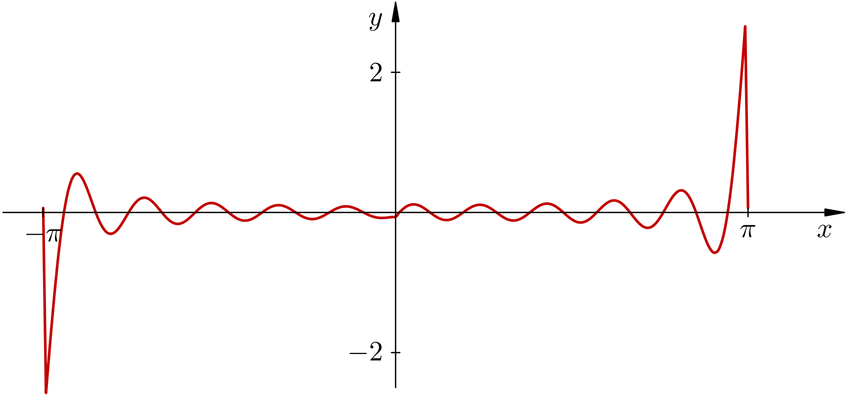
Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



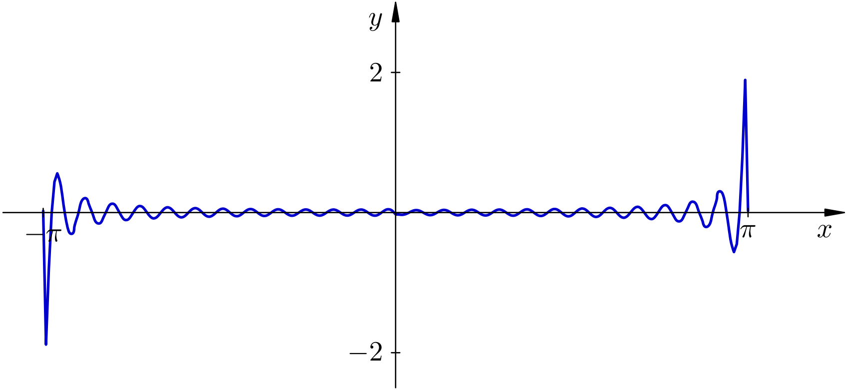
Trigonometrijski polinom za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$
do uključivo članova $\cos(10x)$, $\sin(10x)$.

Trigonometrijska aproksimacija za $x + |x|$



Greška trigonometrijskog polinoma za $x + |x|$

do uključivo članova $\cos(25x)$, $\sin(25x)$.

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

Za trigonometrijske funkcije, također, vrijede relacije diskretne ortogonalnosti, slično kao i za Čebiševljeve polinome T_n.

Na mreži od $N + 1$ točaka

$$x_j = \frac{2\pi}{N+1} \cdot j, \quad j = 0, \ldots, N,$$

uz uvjet $0 \leq k + \ell \leq N$, vrijede sljedeće relacije diskretne ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija

$$\sum_{j=0}^{N} \sin(kx_j) \cdot \sin(\ell x_j) = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \text{ i } k = \ell = 0, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \cos(kx_j) \cdot \sin(\ell x_j) = 0,$$

Diskretna ortogonalnost trigonometrijskih f-a

$$\sum_{j=0}^{N} \cos(kx_j) \cdot \cos(\ell x_j) = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ (N+1)/2, & k = \ell \neq 0, \\ N+1, & k = \ell = 0. \end{cases}$$

Dokaz ovih relacija ide slično kao i za Čebiševljeve polinome.

- Produkt trigonometrijskih funkcija treba pretvoriti u zbroj ili razliku kosinusa ili sinusa.
- Pripadne sume računaju se prijelazom na kompleksne brojeve u eksponencijalnom (trigonometrijskom) zapisu, kao geometrijske sume ($N+1$-i korijeni iz jedinice).

Ako želimo prvih $N+1$ kosinusa i prvih N sinusa u bazi prostora (dimenzije $2N+1$), onda u definiciji točaka x_j treba uzeti $2N$, umjesto N.

Općenito o integracijskim formulama

Zadana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je $I = [a, b]$ interval, $b > a$, koji može biti i beskonačan. Želimo izračunati integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Za relativno mali skup funkcija f

- ovaj se integral može egzaktno izračunati.

U suprotnom, preostaje približno, numeričko računanje $I(f)$.

Osnovna ideja numeričke integracije je približno računanje integrala $I(f)$, korištenjem:

- vrijednosti funkcije f (eventualno i vrijednosti derivacija) na nekom konačnom skupu točaka ($\approx$ Darboux).

Općenito o integracijskim formulama

Opća integracijska formula ima oblik

$$I(f) = I_m(f) + E_m(f),$$

pri čemu je

- $m + 1$ = broj korištenih točaka (tzv. čvorova integracije),
- $I_m(f)$ = pripadna aproksimacija integrala,
- $E_m(f)$ = pritom napravljena greška.

Ako koristimo samo funkcijske vrijednosti, aproksimacija $I_m(f)$ ima oblik

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f\big(x_k^{(m)}\big),$$

gdje je m neki zadani broj, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — tzv. red formule.

Općenito o integracijskim formulama

Točke $x_k^{(m)}$ zovu se čvorovi integracije, a brojevi $w_k^{(m)}$ težinski koeficijenti, ili samo težine.

U općem slučaju, za fiksni m, moramo odrediti $2m+2$ nepoznata parametra formule — čvorove i težine.

- Najčešće se zahtijeva da su integracijske formule egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja n.

Zbog linearnosti integrala kao funkcionala

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx,$$

dovoljno je zahtijevati egzaktnost tih formula na nekoj bazi vektorskog prostora — recimo, na $\{\,1, x, x^2, \ldots, x^m, \ldots\,\}$.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Ako su svi čvorovi fiksirani (zadani), recimo ekvidistantni, onda dobivamo tzv. Newton–Cotesove formule.

- Za njih moramo odrediti $m + 1$ nepoznati težinski koeficijent.
- Uvjeti egzaktnosti na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_m$, baš za $n = m$, vode na sustav linearnih jednadžbi koji je regularan $\Rightarrow$ težine postoje i jedinstvene su.
- Pokazat ćemo da se te formule mogu dobiti i kao integral interpolacijskog polinoma stupnja m, za funkciju f, na zadanoj (na primjer, ekvidistantnoj) mreži čvorova.
- Newton–Cotesove formule se obično koriste kao produljene formule — zbroj “po komadima” domene (integral splajna).

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Možemo i fiksirati samo neke čvorove, ili dozvoliti da su svi čvorovi “slobodni” (tako da dobijemo što veći stupanj n).

Ako su svi čvorovi slobodni, integracijske formule se zovu formule Gaussovog tipa.

Kod Gaussovih, ali i tzv. težinskih Newton–Cotesovih formula, integral, odnosno, podintegralna funkcija se zapisuje kao

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x)\, dx,$$

pri čemu je funkcija $w \geq 0$ unaprijed zadana tzv. težinska funkcija.

Newton–Cotesove vs. Gaussove formule

Gaussove integracijske formule su egzaktne na vektorskom prostoru polinoma $\mathcal{P}_{2m+1}$, tj. za $n = 2m + 1$,

- što je prostor dvostruko veće dimenzije nego kod Newton–Cotesovih formula.
- Gaussove formule se nikad ne računaju "direktno" iz uvjeta egzaktnosti, jer to vodi na nelinearni sustav jednadžbi.
- Pokazat ćemo vezu Gaussovih formula, funkcije w i ortogonalnih polinoma s težinom w na intervalu $[a, b]$.
  - To omogućava efikasno računanje svih parametara formule — i čvorova i težina!
- Za Gaussove formule nema puno smisla tražiti produljene formule (jer w nije ista na raznim komadima domene).

Tipovi Newton–Cotesovih formula

U praksi se koriste dva tipa Newton–Cotesovih formula:

- zatvorene formule — rubovi intervala a i b su čvorovi,
- otvorene formule — rubovi intervala a i b nisu čvorovi.

Katkad se koriste i

- poluotvorene formule — jedan od rubova, a ili b, je čvor, a drugi nije.

Primjena je u integraciji diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetom.

Za početak, uzimamo standardnu težinsku funkciju $w(x) = 1$ (najčešći slučaj u praksi za Newton–Cotesove formule) i ekvidistantnu mrežu čvorova integracije na intervalu $[a, b]$.

Zatvorene Newton–Cotesove formule

Za zatvorenu (često se ispušta) Newton–Cotesovu formulu s $m + 1$ točaka, interval $[a, b]$ podijelimo na m podintervala jednake duljine h_m. Čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + kh_m, \quad k = 0, \ldots, m, \quad h_m = \frac{b - a}{m},$$

pa je osnovni oblik zatvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a + kh_m).$$

Ova suma ide po svim točkama, uključivo i rubove intervala.

Otvorene Newton–Cotesove formule

Da bismo dobili otvorene Newton–Cotesove formule s $m+1$ točaka, definiramo

$$x_{-1}^{(m)} := a, \quad x_{m+1}^{(m)} := b.$$

Interval $[a, b]$ podijelimo na $m+2$ podintervala, a čvorovi su

$$x_k^{(m)} = a + (k+1)h_m, \quad k = 0, \ldots, m, \quad h_m = \frac{b-a}{m+2},$$

pa je osnovni oblik otvorenih Newton–Cotesovih formula

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(a + (k+1)h_m).$$

Ova suma ide samo po “unutarnjim” točkama.

Osnovna trapezna formula

Najjednostavnija (zatvorena) Newton–Cotesova formula — za $m = 1$ (s 2 čvora), zove se trapezna formula. Ona ima oblik

$$I_1(f) = w_0^{(1)} f(x_0) + w_1^{(1)} f(x_0 + h_1),$$

pri čemu je

$$h := h_1 = \frac{b-a}{1} = b - a,$$

pa je $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Napomena. Promjenom reda m, promijenit će se i težine $w_k^{(m)}$,

- tj. $w_k^{(m)}$ vrijede za točno određenu formulu (fiksni m).

Dogovor: Ako znamo za koji red formule m računamo težine, zapis skraćujemo na $w_k := w_k^{(m)}$.

Osnovna trapezna formula

Dakle, osnovna trapezna formula ima oblik

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_1(f) = w_0 f(a) + w_1 f(b).$$

Moramo pronaći težinske koeficijente w_0 i w_1, tako da

- integracijska formula egzaktno integrira bazu $\{1, x, \ldots\}$ vektorskog prostora polinoma $\mathcal{P}_n$ što višeg stupnja n.

Zato trebamo izračunati integrale oblika

$$\int_a^b x^k\,dx, \quad k \geq 0,$$

a zatim rezultat koristiti za razne k — redom, $k = 0, 1, \ldots$.

Osnovna trapezna formula

Vrijedi

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\,\Big|_a^b = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}, \quad k \geq 0.$$

- Za $k = 0$, tj. za $f(x) = x^0 = 1$, iz egzaktnosti dobivamo

$$b - a = \int_a^b x^0\,dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1.$$

Jedna jednadžba nije dovoljna za određivanje dva nepoznata parametra, pa zahtijevamo egzaktnost integracijske formule i na polinomima stupnja 1.

Osnovna trapezna formula

- Za $k = 1$, tj. $f(x) = x$, izlazi
$$\frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x\, dx = w_0 \cdot a + w_1 \cdot b.$$

Sada imamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} w_0 + w_1 &= b - a \\ aw_0 + bw_1 &= \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

Množenjem prve jednadžbe s $-a$ i dodavanjem drugoj, izlazi

$$(b - a)w_1 = \frac{b^2 - a^2}{2} - a(b - a) = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} = \frac{(b - a)^2}{2}.$$

Osnovna trapezna formula

Budući da je $b > a$ (granice!), dijeljenjem s $b - a$, dobivamo

$$w_1 = \frac{1}{2}(b - a) = \frac{h}{2}.$$

Drugu težinu w_0 lako izračunamo iz prve jednadžbe linearnog sustava

$$w_0 = b - a - w_1 = \frac{1}{2}(b - a) = \frac{h}{2},$$

pa je $w_0 = w_1 = h/2$. Dakle, integracijska formula $I_1(f)$ glasi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big).$$

Zadatak. Ponovite izvod na “simetričnoj” bazi $1, x - (a + b)/2$.

Zašto baš trapezna formula?

Odakle ime trapeznoj formuli? Napišemo li je na malo drugačiji način, kao

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a),$$

vidimo da je

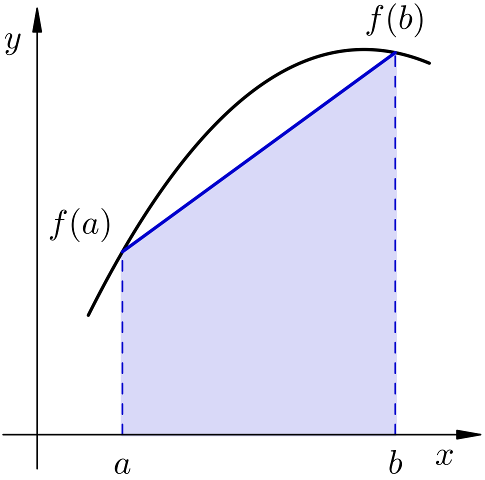
- $(f(a)+f(b))/2$ = srednjica trapeza (stoji okomito), a
- $b-a$ = visina trapeza (leži vodoravno, kao “širina”),

za trapez na slici — v. sljedeća stranica.

Drugim riječima, površinu ispod krivulje aproksimirali smo površinom trapeza.

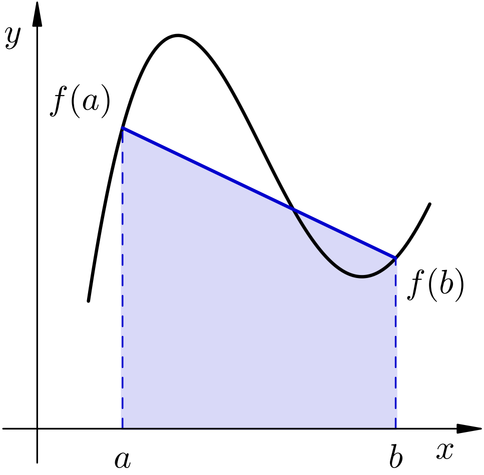
Zašto baš trapezna formula?

Slika aproksimacije integrala funkcije f površinom trapeza.



Zašto baš trapezna formula?

Ovisno o “obliku” funkcije f, slika može izgledati i ovako:



Koje polinome egzaktno integrira trapezna f.?

Trapeznu formulu smo izveli iz uvjeta egzaktnosti prostoru polinoma $\mathcal{P}_1$ stupnja 1.

- Zato formula egzaktno integrira sve polinome stupnja 1.
- Međutim, ona neće egzaktno integrirati sve polinome stupnja 2, jer ne integrira egzaktno

$$f(x) = x^2.$$

Naime, vrijedi

$$\frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2\,dx \neq I_1(x^2) = \frac{a^2 + b^2}{2}\,(b - a).$$

Dakle, tzv. polinomi stupanj egzaktnosti trapezne formule je 1.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Do trapezne formule možemo doći i na drugačiji način — iz interpolacije.

- Kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ povučemo interpolacijski polinom stupnja 1 za funkciju f,
- a zatim ga egzaktno integriramo.

Dobivamo opet trapeznu formulu (dokaz na sljedećoj stranici).

Dakle, vidimo da vrijedi

aproksimacija integrala = integral aproksimacije
aproksimacija integrala = integral (interpolacije).

Ovaj zaključak nam omogućava nalaženje greške trapezne formule! Slično vrijedi i za ostale integracijske formule.

Integral linearnog interpolacijskog polinoma

Interpolacijski pravac za funkciju f, koji prolazi zadanim točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, je

$$p_1(x) = f(a) + f[a, b]\,(x - a).$$

Njegov integral na $[a, b]$ je

$$\begin{aligned} \int_a^b p_1(x)\,dx &= \left(f(a)x + f[a, b]\,\frac{(x-a)^2}{2} \right) \Big|_a^b \\ &= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}\,f[a, b] \\ &= (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Greška trapezne formule

Neka je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ (inače nema smisla).

Grešku integracijske formule dobit ćemo kao integral greške interpolacijskog polinoma — zapis je u Newtonovom obliku.

- Greška interpolacijskog polinoma stupnja 1, koji funkciju f interpolira u točkama $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, na intervalu $[a, b]$ jednaka je

$$e_1(x) = f(x) - p_1(x) = (x - a)\,(x - b)\,f[a, b, x].$$

- Greška trapezne formule je

$$E_1(f) = \int_a^b e_1(x)\,dx = \int_a^b (x - a)\,(x - b)\,f[a, b, x]\,dx.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ostaje samo izračunati $E_1(f)$. Iskoristit ćemo generalizaciju teorema srednje vrijednosti za integrale.

Teorem (Ocjena za integrale s težinama). Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je g ograničena, uz

$$m = \inf_{x \in [a,b]} g(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} g(x).$$

Dodatno, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$. Onda vrijedi

$$m \int_a^b w(x)\, dx \leq \int_a^b w(x) g(x)\, dx \leq M \int_a^b w(x)\, dx.$$

Napomena. Za $w(x) = 1$, ovo ste sigurno već vidjeli!

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Dokaz. Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, za svaki $x \in [a, b]$, vrijedi

$$m \leq g(x) \leq M \implies mw(x) \leq g(x)w(x) \leq Mw(x).$$

Tvrdnja izlazi integriranjem, koristeći monotonost integrala.

■

Teorem (Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama).
Neka su funkcije g i w integrabilne na $[a, b]$ i neka je g ograničena, uz

$$m = \inf_{x \in [a,b]} g(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} g(x).$$

Nadalje, neka je $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Tada postoji broj μ, takav da je $m \leq \mu \leq M$, za kojeg vrijedi

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b w(x)\,dx.$$

Posebno, ako je g neprekidna na $[a, b]$, onda postoji broj $\zeta \in [a, b]$, takav da je

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = g(\zeta) \int_a^b w(x)\,dx.$$

Napomena. I ovo znate za $w(x) = 1$, tj. za $\int_a^b w(x)\,dx = b - a$.

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Dokaz. Ako je

$$\int_a^b w(x)\,dx = 0,$$

onda, po teoremu o ocjeni integrala s težinama, mora vrijediti

$$\int_a^b w(x)g(x)\,dx = 0,$$

pa za μ možemo uzeti proizvoljan realan broj između m i M.
Zbog $w(x) \geq 0$ na $[a, b]$, ostaje pogledati slučaj kad je

$$\int_a^b w(x)\,dx > 0.$$

Integralni teorem srednje vrijednosti s težinama

Onda, iz teorema o ocjeni integrala s težinama, dijeljenjem dobivamo da za

$$\mu := \frac{\int_a^b w(x)g(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$$

vrijedi tvrdnja i

$$m \le \mu \le M.$$

Zaključak o neprekidnom g slijedi iz činjenice da

- neprekidna funkcija na segmentu postiže sve vrijednosti između minimuma i maksimuma, pa mora postići i μ (neprekidna slika segmenta je segment).
- Prema tome, postoji $\zeta \in [a, b]$, takav da je $\mu = g(\zeta)$.

Greška trapezne formule

Vratimo se na grešku trapezne formule. Već smo pokazali da je

$$E_1(f) = \int_a^b (x-a)\,(x-b)\,f[a,b,x]\,dx,$$

gdje je $(x-a)\,(x-b)$ polinom čvorova pripadne interpolacije.

Očito je

$$(x-a)\,(x-b) \leq 0 \quad \text{na} \quad [a,b],$$

pa možemo uzeti

$$w(x) = -(x-a)\,(x-b), \quad g(x) = -f[a,b,x].$$

Uočiti: funkcija $g(x) = -f[a,b,x]$ je neprekidna, čim je f neprekidna na $[a,b]$ i postoje derivacije f' u rubovima a i b.

Greška trapezne formule

Po teoremu srednje vrijednosti za integrale s težinama, postoji $\eta \in [a, b]$, takav da vrijedi

$$E_1(f) = -f[a, b, \eta] \int_a^b -(x - a)(x - b)\, dx.$$

Ovaj se integral jednostavno računa. Integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b (b - x)(x - a)\, dx &= \left((b - a) \frac{(x - a)^2}{2} - \frac{(x - a)^3}{3} \right) \Big|_a^b \\ &= (b - a)^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{(b - a)^3}{6}. \end{aligned}$$

Na početku smo iskoristili rastav $b - x = (b - a) - (x - a)$.

Greška trapezne formule

Dakle, za grešku vrijedi

$$E_1(f) = -f[a, b, \eta] \, \frac{(b-a)^3}{6}, \quad \eta \in [a, b].$$

Standardni izraz za grešku trapezne formule dobivamo uz jače pretpostavke na f.

Ako f'' postoji na cijelom $[a, b]$, onda podijeljenu razliku možemo napisati preko f'', tj. postoji $\zeta \in [a, b]$ za kojeg je

$$f[a, b, \eta] = \frac{f''(\zeta)}{2},$$

pa je

$$E_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\zeta).$$