

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 24. 6. 2026.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!

Zadatak 1. (10 bodova)

- (a) Definirajte pojam L^2 norme funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ te neprekidni problem najmanjih kvadrata. Precizno navedite što je zadano, a što je potrebno odrediti.
- (b) Kako glasi sustav normalnih jednadžbi za neprekidni problem najmanjih kvadrata? Pokažite kako se problem najmanjih kvadrata svodi na rješavanje tog sustava te da sustav ima jedinstveno rješenje.
- (c) Poznato je da za Čebiševljeve polinome $T_0, T_1, \dots$ vrijedi $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x) T_j(x) dx = 0$ za sve $i \neq j$. Koristeći tu činjenicu (a ne eksplicitnu formulu za nultočke) dokažite da T_n ima točno n različitih realnih nultočki unutar $[-1, 1]$.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 24. 6. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!

Zadatak 2. (10 bodova)

- (a) Definirajte metodu gradijentnog spusta.
- (b) Uz pretpostavku o dovoljnoj glatkoći funkcije f koju minimiziramo metodom gradijentnog spusta, dokažite da je za dovoljno mali korak η_k vrijednost funkcije f u $(k+1)$ -vom koraku manja ili jednaka nego u k -tom koraku.
- (c) Neka je dan prirodni broj n i regularna matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dokažite da postoji $\varepsilon > 0$ takav da ne postoji singularna matrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ za koju je $\|A - X\|_2 < \varepsilon$.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 24. 6. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!**Zadatak 3.** (10 bodova)

(a) Odredite potpunu QR faktORIZACIJU matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Neka su zadani podatci (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$. Riješite diskretni problem najmanjih kvadrata na skupu funkcija oblika

$$\varphi(x) = ax^3 + x^2 + bx$$

koje zadovoljavaju uvjet $\varphi(-1) = \varphi(1)$. Zatvorenom formulom odredite optimalne a i b , te precizno argumentirajte zašto se za te parametre ostvaruje globalni minimum.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 24. 6. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!**Zadatak 4.** (10 bodova)

- (a) Dana je funkcija $f(x) = \sin(x^2)$. Poznato je da suma njenih vrijednosti u ekvidistantnim točkama iznosi:

$$\sum_{i=1}^{99} f\left(\frac{i}{100}\right) = 30.606995204$$

Koristeći zadanu sumu i eventualno još nekoliko evaluacija funkcije f , što bolje aproksimirajte integral $I := \int_0^1 f(x) dx$. Zatim izračunajte analitičku ocjenu pogreške te pravu pogrešku, ako je poznato da egzaktna vrijednost integrala na 11 značajnih decimala iznosi: $I \approx 0.31026830172$.

- (b) Odredite realne parametre A, B, C takve da formula

$$f''(0) \approx \frac{Af(-2h) + Bf(0) + Cf(h)}{h^2}$$

ima što bolju ocjenu greške za dovoljno glatku funkciju f definiranu na okolini nule, te nađite tu analitičku ocjenu greške.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 24. 6. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!**Zadatak 5.** (10 bodova)Newtonovom metodom odredite najmanje rješenje jednadžbe

$$\frac{x^3}{3} - 3x^2 + x - 6 \ln x + 9 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju rješenja i ocjenu greške!