JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 29. 04. 2026.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!

Zadatak 1. (10 bodova)

(a) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definirajte pojmove LU faktorizacije i LU faktorizacije s parcijalnim pivotiranjem matrice A. Precizno navedite dimenzije i svojstva svih matrica koje se pojavljuju u faktorizacijama. Koji su nužni i dovoljni uvjeti da bi postojala svaka od ovih faktorizacija?

(b) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna **simetrična** matrica. Dokažite da se A može zapisati u obliku $A = LDL^T$ gdje je L donje-trokutasta, a D dijagonalna matrica ako i samo ako su podmatrice $A(1:k, 1:k)$ regularne za sve $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Smijete koristiti rezultate iz (a) bez dokaza; sve ostale tvrdnje dokažite.

(c) Neka su $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1} > 0$, te neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridijagonalna simetrična matrica koja na dijagonali redom ima brojeve $2(h_1+h_2), 2(h_2+h_3), \ldots, 2(h_n+h_{n+1})$, a na prvoj pod-dijagonali i na prvoj nad-dijagonali redom brojeve $h_2, h_3, \ldots, h_n$. Dokažite da A ima faktorizaciju Choleskog.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 29. 04. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!

Zadatak 2. (10 bodova)

(a) Precizno iskažite i dokažite teorem o grešci interpolacijskog polinoma pomoću podijeljenih razlika.

(b) Neka su $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ „fiksni" čvorovi, a neka je $x \in [a, b]$ „varijabilni" čvor u podijeljenoj razlici po kojem ju deriviramo. Uz pretpostavku dovoljne glatkoće funkcije f, dokažite:

$$\frac{d}{dx} f[x_0, \ldots, x_n, x, x] = 2 \cdot f[x_0, \ldots, x_n, x, x, x].$$

(c) Dana je funkcija $\varphi : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definirana po dijelovima:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 2x + 1, & x \in [0, 1] \\ -x^3 + 6x^2 + bx + c, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

Odredite parametre $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako da funkcija φ bude *prirodni* kubični splajn na intervalu $[0, 2]$ ($\varphi''(x_0) = 0$ i $\varphi''(x_n) = 0$) za neku funkciju f.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 29. 04. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!

Zadatak 3. (10 bodova)
Promotrimo funkciju

$$f(x) = x - \mathrm{arctg}(x).$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za sve y postoje neki $|\alpha_y| < \varepsilon$ takvi da vrijedi $fl(\mathrm{arctg} y) = (1 + \alpha_y) \cdot \mathrm{arctg} y$, pri čemu je ε jedinična greška zaokruživanja.

(a) Detaljno objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po gornjoj formuli za vrlo male (po modulu) vrijednosti x. Izvedite izraz za relativnu grešku izračunate vrijednosti $fl(f(x))$ u odnosu na egzaktnu vrijednost $f(x)$, te odredite čemu ona teži kada $x \to 0$.

(b) Odredite relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kada $x \to 0$. Je li problem računanja vrijednost funkcije f u točki x stabilan u relativnom smislu za (po modulu) male vrijednosti od x?

(c) Predložite alternativni izraz za računanje $f(x)$ u aritmetici računala tako da ono bude stabilno za male vrijednosti od x ili dokažite da takav izraz ne postoji.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 29. 04. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!

Zadatak 4. (10 bodova)

Za neki prirodan broj n neka je A_n matrica reda n dana s

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2-\frac{1}{1!} & -1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3-\frac{1}{2!} & -1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & (n-1)-\frac{1}{(n-2)!} & -1 \\ 1 & & \dots & 0 & 0 & n-\frac{1}{(n-1)!} \end{bmatrix},$$

(u prvom stupcu se nalaze jedinice; neposredno iznad dijagonale se nalaze -1; na mjestu $(1,1)$ je 1, a na mjestu (k,k), za $k \geq 2$, je broj $k - \frac{1}{(k-1)!}$; sve su ostalo nule).

(a) Za $n = 5$ odredite LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem. Razlikuje li se od LU faktorizacije bez parcijalnog pivotiranja?

(b) Za $n = 5$ odredite pivotni rast u slučaju parcijalnog pivotiranja. Zaključite kako bi se pivotni rast ponašao za velike n. Je li rješavanje sustava LU faktorizacijom s parcijalnim pivotiranjem ovom matricom numerički stabilno pod pretpostavkom male uvjetovanosti matrice A_n za proizvoljan n?

(c) Koliko je elemenata matrice A_n različito od nule, a koliko matrica L (u ovisnosti o n)?

(d) Zaključite je li dobro provoditi LU faktorizaciju s ciljem rješavanja sustava na gore opisani način za velike n, uz obrazloženje.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 29. 04. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!

Zadatak 5. (10 bodova)
Funkciju $f(x) = \frac{x^2-x}{x-2}$ aproksimiramo na intervalu $[0,1]$:

- Interpolacijskim polinomom stupnja n_p na Čebiševljevoj mreži,
- Po dijelovima kubičnom Hermiteovom interpolacijom na ekvidistantnoj mreži s n_d podintervala.

a) Odredite minimalni stupanj n_p za interpolacijski polinom i broj podintervala n_d za po dijelovima kubičnu Hermiteovu interpolaciju tako da uniformna ocjena greške na $[0,1]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-2}$.

b) Za određene brojeve podintervala n_p i n_d nađite aproksimaciju funkcije u točki $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ jednom od navedenih metoda (sami birate kojom), stvarnu vrijednost funkcije i pravu pogrešku u toj točki.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!