

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 24. 6. 2026.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!

Zadatak 1. (20 bodova)

- (a) Definirajte polinome $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$ Lagrangeove baze kod interpolacije polinomom stupnja n u čvorovima $x_0, x_1, \dots, x_n$ te navedite eksplicitnu formulu za ℓ_k . Koji je prikaz interpolacijskog polinoma u toj bazi?
- (b) Neka je φ po dijelovima linearna interpolacija funkcije $f \in C^2([a, b])$ na ekvidistantnoj mreži čvorova $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Koristeći se rezultatima o interpolaciji polinomima, izvedite ocjenu maksimalne apsolutne greške interpolacije na $[a, b]$.
- (c) Neka je ω polinom čvorova kod interpolacije funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ polinomom u međusobno različitim čvorovima $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Dokažite da vrijedi:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Uputa: Usporedite vodeći koeficijent interpolacijskog polinoma u Newtonovoj i u Lagrangeovoj bazi.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 24. 6. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!

Zadatak 2. (20 bodova)

- (a) Definirajte pojam L^2 norme funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ te neprekidni problem najmanjih kvadrata. Precizno navedite što je zadano, a što je potrebno odrediti.
- (b) Kako glasi sustav normalnih jednadžbi za neprekidni problem najmanjih kvadrata? Pokažite kako se problem najmanjih kvadrata svodi na rješavanje tog sustava te da sustav ima jedinstveno rješenje.
- (c) Poznato je da za Čebiševljeve polinome $T_0, T_1, \dots$ vrijedi $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x) T_j(x) dx = 0$ za sve $i \neq j$. Koristeći tu činjenicu (a ne eksplicitnu formulu za nultočke) dokažite da T_n ima točno n različitih realnih nultočki unutar $[-1, 1]$.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 24. 6. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!**Zadatak 3.** (20 bodova)

Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je $\delta > 0$ mali realni parametar. Na toj matrici provodimo LU faktORIZACIJU bez pivotiranja. Promatramo preslikavanje f koje parametru δ pridružuje element u_{22} matrice U .

- (a) Odredite preslikavanje f na gore navedeni način, bez pojednostavljivanja ili sređivanja formule za vrijednost u_{22} . Pojavljuje li se opasnost katastrofalnog kraćenja?
- (b) Neka se vrijednost funkcije $f(\delta)$ računa u standardnoj aritmetici računala, uz pretpostavku da svaka osnovna operacija unosi relativnu grešku ograničenu jediničnom greškom zaokruživanja ε . Izvedite izraz za relativnu grešku izračunate vrijednosti $f\ell(f(\delta))$ i zaključite je li izračun samog tog elementa numerički stabilan kada $\delta \rightarrow 0$.
- (c) Koristeći gornji zaključak, ali i ostale mjere stabilnosti LU faktORIZACIJE, je li rješavanje sustava s matricom A za male δ koristeći LU faktORIZACIJU bez pivotiranja numerički stabilno? Obrazložite!

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 24. 6. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!**Zadatak 4.** (20 bodova)

- (a) Dana je funkcija $f(x) = \sin(x^2)$. Poznato je da suma njenih vrijednosti u ekvidistantnim točkama iznosi:

$$\sum_{i=1}^{99} f\left(\frac{i}{100}\right) = 30.606995204$$

Koristeći zadanu sumu i eventualno još nekoliko evaluacija funkcije f , što bolje aproksimirajte integral $I := \int_0^1 f(x) dx$. Zatim izračunajte analitičku ocjenu pogreške te pravu pogrešku, ako je poznato da egzaktna vrijednost integrala na 11 značajnih decimala iznosi: $I \approx 0.31026830172$.

- (b) Odredite realne parametre A, B, C takve da formula

$$f''(0) \approx \frac{Af(-2h) + Bf(0) + Cf(h)}{h^2}$$

ima što bolju ocjenu greške za dovoljno glatku funkciju f definiranu na okolini nule, te nađite tu analitičku ocjenu greške.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 24. 6. 2026.

OBAVEZNO SE POTPIŠITE NA SVE PAPIRE SA ZADACIMA I PREDAJTE IH!**Zadatak 5.** (20 bodova)Newtonovom metodom odredite najmanje rješenje jednačbe

$$\frac{x^3}{3} - 3x^2 + x - 6 \ln x + 9 = 0$$

s tačnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju rješenja i ocjenu greške!