JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (10 bodova)

(a) Definirajte pojam operatorske norme matrice. Definirajte pojam strogo dijagonalno dominantne matrice po stupcima.

(b) Pretpostavimo da je matrica $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna i da ima LU faktorizaciju. Neka su $a, b \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Dokažite da tada matrica $A = \begin{bmatrix} A_1 & a \\ b^T & \alpha \end{bmatrix}$ također ima LU faktorizaciju te pokažite kako izračunati faktore od A korištenjem faktora od A_1.

(c) Definirajte Jacobijev iterativni algoritam za rješavanje linearnog sustava $Ax = b$. Konvergira li taj algoritam ako je A tridijagonalna matrica sa svim dijagonalnim elementima jednakim 3, a svim elementima na prvoj naddijagononali i prvoj poddijagonali jednakim 1?

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. (b) Pogledajte dokaz Teorema 2.5 o egzistenciji LU faktorizacije.

(c) Matrica A je strogo dijagonalno dominantna po stupcima, pa Jacobijev algoritam konvergira prema Teoremu 2.31 iz skripte.

$\triangle$

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Zadatak 2. (12 bodova)

(a) Neka su dani različiti čvorovi $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Definirajte pojam Hermiteove interpolacije funkcije f u tim čvorovima, te po dijelovima kubične Hermiteove interpolacije funkcije f u tim čvorovima.

(b) Dokažite da postoji i da je jedinstven Hermiteov interpolacijski polinom stupnja najviše $2n+1$ kroz različite čvorove $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(c) Neka je p Hermiteov interpolacijski polinom u čvorovima x_0 i x_1 funkcije f. Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja vrijednosti $f'(x_1)$ pridružuje vrijednost $p\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$, uz fiksne vrijednosti $f(x_0)$, $f'(x_0)$ i $f(x_1)$. Odredite apsolutnu uvjetovanost funkcije φ.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. (c) Vrijedi

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1).$$

Stoga je

$$p\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = f[x_0] + f[x_0, x_0]\frac{h}{2} + f[x_0, x_0, x_1]\frac{h^2}{4} - f[x_0, x_0, x_1, x_1]\frac{h^3}{8},$$

gdje je $h = x_1 - x_0$. Uočimo da se promjenom $f'(x_1) = f[x_1, x_1]$ u $\tilde{f}'(x_1) = \tilde{f}[x_1, x_1] = f[x_1, x_1] + \varepsilon$ promijeni samo zadnja podijeljena razlika:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}[x_0, x_0, x_1, x_1] &= \frac{\tilde{f}[x_0, x_1, x_1] - f[x_0, x_0, x_1]}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{\frac{\tilde{f}[x_1, x_1] - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0} - f[x_0, x_0, x_1]}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{\frac{f[x_1, x_1] + \varepsilon - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0} - f[x_0, x_0, x_1]}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{\varepsilon}{h^2} + f[x_0, x_0, x_1, x_1].
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\tilde{p}\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) - p\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = -\frac{\varepsilon}{h^2} \cdot \frac{h^3}{8},$$

pa je apsolutna uvjetovanost funkcije φ dana sa

$$\frac{\left|\tilde{p}\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) - p\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\right|}{|\tilde{f}'(x_1) - f'(x_1)|} = \frac{h}{8}.$$

(Izraz ne ovisi o ε, inače bismo sada još gledali $\varepsilon \to 0$.)

△

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Zadatak 3. (10 + 2* bodova)
Promotrimo funkciju

$$f(x) = e^x - 1.$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za sve y postoje neki $|\alpha_y| < \varepsilon$ takvi da vrijedi $fl(e^y) = e^y \cdot (1 + \alpha_y)$, pri čemu je ε jedinična greška zaokruživanja.

(a) Detaljno objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po gornjoj formuli za vrlo male (po modulu) vrijednosti x. Izvedite izraz za relativnu grešku izračunate vrijednosti $fl(f(x))$ u odnosu na egzaktnu vrijednost $f(x)$, te odredite čemu ona teži kada $x \to 0$.

(b) Odredite relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kada $x \to 0$. Je li problem računanja vrijednost funkcije f u točki x stabilan u relativnom smislu za (po modulu) male vrijednosti od x?

*(c) Predložite, ukoliko je to moguće, alternativni izraz za računanje $f(x)$ u aritmetici računala, tako da ono bude stabilno za male vrijednosti od x.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. (a) Kako je za male x vrijednost e^x blizu 1 doći će do katastrofalnog kraćenja. To vidimo i iz oblika relativne greške. Neka su $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ po apsolutnoj vrijednosti manji od ε:

$$\begin{aligned} fl(f(x)) &= (e^x(1+\varepsilon_1) - 1)(1+\varepsilon_2) \\ &= f(x)\left(1 + \frac{e^x}{e^x - 1}\varepsilon_1\right)(1+\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = \infty$, zaključujemo da za male x relativna greška se ne može ograničiti.

(b) Kako je $f'(x) = e^x$, relativna uvjetovanost je

$$\kappa_f^{\text{rel}}(x) = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x e^x}{e^x - 1}\right|,$$

pa je $\lim\limits_{x\to 0} \kappa_f^{\text{rel}} = 1$ (koristimo $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$). Dakle, krivac velike relativne greške je način izračuna funkcije.

(c) U računalu e^x računa se kao početni komad Taylorovog reda $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$, pa se prilikom evaluacije funkcije f na gornji način na kraju oduzme 1. Kako bismo račun učinili stabilnim, umjesto da broj 1 oduzmemo na kraju, nećemo ga niti pridodati u sumi (preskočit ćemo taj pribrojnik). Dakle, funkciju ćemo izračunati kao

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k!}.$$

Za male x (čak i da je riječ o negativnoj vrijednosti) nema opasnog kraćenja jer su ili svi pribrojnici istog predznaka, ili su brzo opadaju po apsolutnoj vrijednosti.

U računalu se zaista vrijednost $e^x - 1$ računa na gore opisani način. U mnogim programskim jezicima i paketima (C/C++, Matlab) zato postoji posebna funkcija `expm1`.

△

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Zadatak 4. (10 bodova)
Za prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ dana je matrica A_n reda n kao:

$$A_n = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 17 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 26 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & & \dots & & n & (n+1)^2+1 \end{bmatrix}$$

(Na glavnoj dijagonali u k-tom retku piše $(k+1)^2+1$ za $k \geq 2$, a na prvoj nad- i pod-dijagonali su redom brojevi $2, 3, \dots, n$.)

a) Za $n = 5$ odredite LU faktorizaciju bez pivotiranja. Zaključite i kako bi izgledala LU faktorizacija za proizvoljan n (slutnju nije potrebno dokazivati).

b) Za $n = 5$ odredite LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem. Razlikuje li se od LU faktorizacije iz a) dijela zadatka? Koje svojstvo matrice A_5 je zaslužno za to?

c) Odredite pivotni rast matrice A_n za LU faktorizacije s i bez pivotiranja u ovisnosti o n.

d) Je li matrica A_n pozitivno definitna? Argumentirajte odgovor.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. a) Račun, dobije se

$$A_5 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 17 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 26 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

b) Matrica je dijagonalno dominantna (i po stupcima i po recima) pa ne treba pivotirati.

c) 1.

d) Je, npr. iz LU se lako odredi Cholesky ili Prop 2.13.

△

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Zadatak 5. (10 bodova)
Funkciju $f(x) = \mathrm{sh}(x) + x^2$ aproksimiramo na intervalu $[0, 1]$:

- Interpolacijskim polinomom stupnja n_p na ekvidistantnoj mreži,
- Po dijelovima kubičnom Hermiteovom interpolacijom na ekvidistantnoj mreži s n_d podintervala.

a) Odredite minimalni **neparan** stupanj n_p za interpolacijski polinom i **neparan** broj podintervala n_d za po dijelovima kubičnu Hermiteovu interpolaciju tako da uniformna ocjena greške na $[0, 1]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-2}$.

b) Za određene brojeve podintervala n_p i n_d nađite aproksimaciju funkcije u točki $x = 0.5$ jednom od navedenih metoda (sami birate kojom), stvarnu vrijednost funkcije i pravu pogrešku u toj točki.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. a) Kako je za $n \geq 3$

$$f^{(n)} = \begin{cases} \mathrm{sh}(x), & n \text{ paran}, \\ \mathrm{ch}(x), & n \text{ neparan}, \end{cases}$$

imamo

$$M_{n+1}f = \begin{cases} \mathrm{sh}(1), & n+1 \text{ paran}, \\ \mathrm{ch}(1), & n+1 \text{ neparan}, \end{cases} \approx \begin{cases} 1.1752, & n+1 \text{ neparan}, \\ 1.5431, & n+1 \text{ paran}, \end{cases}$$

odnosno nejednakost za n se dobije:

$$(n+1)n^{n+1} \geq 100 M_{n+1}f$$

Najmanji n koji to zadovoljava je $n_p = 3$.

Za po dijelovima kubičnu Hermiteovu interpolaciju imamo $M_4 f = \mathrm{sh}(1)$, pa je traženi $n_d = 1$ - obična Hermiteova interpolacija.

b) Jedna opcija je Hermiteov interpolacijski polinom s čvorovima 0 i 1. Za njega se dobije: $p(x) = x + \mathrm{sh}(1)x^2 + (1 + \mathrm{ch}(1) - 2\mathrm{sh}(1))x^2(x-1)$, pa je

$$f(0.5) \approx 0.771095, \; p(0.5) \approx 0.769716, \; e(0.5) = |f(0.5) - p(0.5)| \approx 0.0014.$$

△