JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (10 bodova)

(a) Definirajte pojam operatorske norme matrice. Definirajte pojam strogo dijagonalno dominantne matrice po stupcima.

(b) Pretpostavimo da je matrica $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna i da ima LU faktorizaciju. Neka su $a, b \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Dokažite da tada matrica $A = \begin{bmatrix} A_1 & a \\ b^T & \alpha \end{bmatrix}$ također ima LU faktorizaciju te pokažite kako izračunati faktore od A korištenjem faktora od A_1.

(c) Definirajte Jacobijev iterativni algoritam za rješavanje linearnog sustava $Ax = b$. Konvergira li taj algoritam ako je A tridijagonalna matrica sa svim dijagonalnim elementima jednakim 3, a svim elementima na prvoj naddijagononali i prvoj poddijagonali jednakim 1?

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Zadatak 2. (12 bodova)

(a) Neka su dani različiti čvorovi $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Definirajte pojam Hermiteove interpolacije funkcije f u tim čvorovima, te po dijelovima kubične Hermiteove interpolacije funkcije f u tim čvorovima.

(b) Dokažite da postoji i da je jedinstven Hermiteov interpolacijski polinom stupnja najviše $2n+1$ kroz različite čvorove $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(c) Neka je p Hermiteov interpolacijski polinom u čvorovima x_0 i x_1 funkcije f. Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja vrijednosti $f'(x_1)$ pridružuje vrijednost $p\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$, uz fiksne vrijednosti $f(x_0)$, $f'(x_0)$ i $f(x_1)$. Odredite apsolutnu uvjetovanost funkcije φ.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Zadatak 3. (10 + 2* bodova)
Promotrimo funkciju

$$f(x) = e^x - 1.$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za sve y postoje neki $|\alpha_y| < \varepsilon$ takvi da vrijedi $fl(e^y) = e^y \cdot (1 + \alpha_y)$, pri čemu je ε jedinična greška zaokruživanja.

(a) Detaljno objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po gornjoj formuli za vrlo male (po modulu) vrijednosti x. Izvedite izraz za relativnu grešku izračunate vrijednosti $fl(f(x))$ u odnosu na egzaktnu vrijednost $f(x)$, te odredite čemu ona teži kada $x \to 0$.

(b) Odredite relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kada $x \to 0$. Je li problem računanja vrijednost funkcije f u točki x stabilan u relativnom smislu za (po modulu) male vrijednosti od x?

*(c) Predložite, ukoliko je to moguće, alternativni izraz za računanje $f(x)$ u aritmetici računala, tako da ono bude stabilno za male vrijednosti od x.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Zadatak 4. (10 bodova)
Za prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ dana je matrica A_n reda n kao:

$$A_n = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 17 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 26 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & & \dots & & n & (n+1)^2+1 \end{bmatrix}$$

(Na glavnoj dijagonali u k-tom retku piše $(k+1)^2+1$ za $k \geq 2$, a na prvoj nad- i pod-dijagonali su redom brojevi $2, 3, \dots, n$.)

a) Za $n = 5$ odredite LU faktorizaciju bez pivotiranja. Zaključite i kako bi izgledala LU faktorizacija za proizvoljan n (slutnju nije potrebno dokazivati).

b) Za $n = 5$ odredite LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem. Razlikuje li se od LU faktorizacije iz a) dijela zadatka? Koje svojstvo matrice A_5 je zaslužno za to?

c) Odredite pivotni rast matrice A_n za LU faktorizacije s i bez pivotiranja u ovisnosti o n.

d) Je li matrica A_n pozitivno definitna? Argumentirajte odgovor.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 25. 04. 2025.

Zadatak 5. (10 bodova)
Funkciju $f(x) = \mathrm{sh}(x) + x^2$ aproksimiramo na intervalu $[0, 1]$:

- Interpolacijskim polinomom stupnja n_p na ekvidistantnoj mreži,
- Po dijelovima kubičnom Hermiteovom interpolacijom na ekvidistantnoj mreži s n_d podintervala.

a) Odredite minimalni **neparan** stupanj n_p za interpolacijski polinom i **neparan** broj podintervala n_d za po dijelovima kubičnu Hermiteovu interpolaciju tako da uniformna ocjena greške na $[0, 1]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-2}$.

b) Za određene brojeve podintervala n_p i n_d nađite aproksimaciju funkcije u točki $x = 0.5$ jednom od navedenih metoda (sami birate kojom), stvarnu vrijednost funkcije i pravu pogrešku u toj točki.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!