JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (10 bodova)

(a) Definirajte SVD matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, pri čemu je $n \geq m$.

(b) U kojem su odnosu svojstvene i singularne vrijednosti matrica AA^T i A? U kojoj su vezi njihovi svojstveni i singularni vektori? Dokažite tvrdnje.

(c) Za dane prirodne brojeve $n \geq m$ veće od 2, dokažite ili opovrgnite tvrdnju: ako su $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrice kojima je zbroj rangova strogo manji od m, onda postoje singularne dekompozicije matrica A i B takve da se svaki lijevi singularni vektor od A podudara s nekim lijevim singularnim vektorom od B.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. (c) Tvrdnja ne vrijedi; dovoljno je pronaći kontraprimjer. Neka su A i B matrice ranga 1 takve da se njihove slike ne podudaraju ali da nisu ni ortogonalne. Neka su $U^A = [u_1^A, \ldots, u_n^A]$ i $U^B = [u_1^B, \ldots, u_n^B]$ matrice lijevih singularnih vektora od A i B redom. Promotrimo prvi lijevi singularni vektor u_1^A matrice A. On razapinje $\mathrm{Im}(A)$, a kako je $\mathrm{Im}(A) \neq \mathrm{Im}(B)$, vrijedi $u_1^A \neq u_1^B$. S druge strane, pretpostavimo da je $u_1^A = u_j^B$ za $j > 1$. Kako je matrica U^B ortogonalna, vrijedi $u_j^B \perp u_1^B$, što povlači $u_1^A \perp u_1^B$, pa je $\mathrm{Im}(A) \perp \mathrm{Im}(B)$, a to je kontradikcija s pretpostavkom.

△

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Zadatak 2. (10 bodova)

(a) Koja je razlika između Newton-Cotesovih integracijskih formula i Gauss-Legendreovih formula u njihovoj konstrukciji? Što znamo o polinomnom stupnju egzaktnosti tih formula s n čvorova?

(b) Dokažite da je vodeći koeficijent n-tog Lagrangeovog polinoma P_n jednak $\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}$.

(c) Za svaki par nenegativnih cijelih brojeva (n, m), pri čemu je $m \leq n+1$, izračunajte $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x) x^m dx$.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje.

a) Vidjeti skriptu.

b) Vidjeti skriptu, dio dokaza Teorema 5.23.

c) Zbog ortogonalnosti, jedini netrivijalni slučajevi su $n = m$ i $n = m+1$. Drugo također može postati trivijalno ako se primijeti da je to u stvari integral neparne funkcije na simetričnoj domeni. Odgovor je dakle da je taj umnožak jednak nula za sve parove kada je $n \neq m$, a inače

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) x^n dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Prvi način. P_n je okomit na sve polinome stupnja manjeg od n, pa tako i na $P_n - A_n x^n$, gdje je A_n vodeći koeficijent n-tog Lagrangeovog polinoma. Dobivamo

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) x^n dx = \frac{1}{A_n} \int_{-1}^{1} P_n(x) A_n x^n dx = \frac{1}{A_n} \int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x) dx = \frac{1}{A_n} \frac{2}{2n+1} = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Drugi način. Množenje rekurzije s x^{n-1}, pa indukcijom (lijeva strana propada, a na desnoj strani se dobiva jednostavna rekurzija). Ovako se može riješiti i slučaj $n = m+1$ (množi se s x^n, a indukcija ispadne trivijalna jer su rezultati uvijek nula). △

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Zadatak 3. (10 bodova)

(a) Odredite potpunu QR faktorizaciju matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -7 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Za funkciju $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2 & x > 0, \end{cases}$$

izračunajte Fourierov red, te pomoću njega dokažite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. (a) Primijetimo da je matrica iz zadatka (nazovimo ju A) zapravo permutirana gornjetrokutasta matrica. Ako definiramo $P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tada imamo

$$A = PP^T A = P \begin{bmatrix} -7 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} =: PB.$$

Matrica B je gornjetrokutasta, no nema pozitivne vrijednosti na dijagonali. Zato ćemo definirati $J = \operatorname{diag}(-1, 1, 1, -1)$ i pisati

$$A = PB = PJ^2B = (PJ)(JB) =: QR,$$

gdje je

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 7 & -6 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matrice Q i R definiraju jednu QR faktorizaciju matrice A. Kako je matrica A kvadratna, njezina skraćena i potpuna QR faktorizacija se poklapaju, pa je ona i jedinstvena.

(b) Koristeći dvije parcijalne integracije, imamo

$$\int_0^\pi x^2\cos(mx)dx = \left(-\frac{2}{m^3}\sin(mx) + \frac{2}{m^2}x\cos(mx) + \frac{1}{m}x^2\sin(mx)\right)\Big|_0^\pi = (-1)^m\frac{2\pi}{m^2},$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2\sin(mx)dx &= \left(\frac{2}{m^3}\cos(mx) + \frac{2}{m^2}x\sin(mx) + \frac{-1}{m}x^2\cos(mx)\right)\Big|_0^\pi \\ &= ((-1)^m+1)\frac{2}{m^3} - (-1)^m\frac{\pi^2}{m}\end{aligned}$$

Dodatno

$$\int_0^\pi x^2dx = \frac{\pi^3}{3}.$$

Zato je red tražene funkcije

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{3} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\left(((-1)^n-1)\frac{2}{n^3} - (-1)^n\frac{\pi^2}{n}\right)\sin(nx) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{2\pi}{n^2}\cos(nx).$$

Za računanje vrijednosti traženog reda, uvrstit ćemo vrijednost $x=0$. U toj točki red ima vrijednost $\dfrac{f(0^-)+f(-0^+)}{2} = 0$. Suma za sinuse nestaje, pa ostaje

$$0 = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{3} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{2\pi}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{n^2},$$

odakle direktno dobivamo tvrdnju zadatka.

$\triangle$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Zadatak 4. (10 bodova)

(a) Korištenjem Gauss-Legendreove formule sa dva čvora aproksimirajte $\int_1^3 \sqrt{x}dx$. Izračunajte pravu pogrešku i ocjenu pogreške.

(b) Odredite realne parametre A, B, C takve da formula

$$f'(0) \approx \frac{Af(-h) + Bf(0) + Cf(2h)}{h}$$

ima što bolju ocjenu greške za dovoljno glatku funkciju f definiranu na okolini nule, te nađite tu ocjenu greške.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. (a) Neka je $g(x) = \sqrt{x}$. Prava vrijednost integrala je $\int_1^3 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 1^{3/2}\right) =$ 2.79743494847. Vrijednost aproksimacije dobivamo tako da GL formulu pomaknemo za 2 (držeći težine iste jer je duljina intervala opet jednaka 2), pa je

$$I_2^{GL}(g) = g\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2.79816161632.$$

Prava greška iznosi $7.26667845123 \cdot 10^{-4}$.

Za ocjenu greške koristimo formulu za produljene Gauss-Legendrove formule s $m = 1$ i $n = 2$. Potreban nam je maksimum apsolutne vrijednosti 4. derivacije funkcije g:

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2},\ g''(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2},\ g'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2},\ g^{(4)}(x) = \frac{-15}{16}x^{-7/2}.$$

Funkcija $g^{(4)}(x)$ je negativna i rastuća pa je $M_4 g = -g^{(4)}(1) = \frac{15}{16}$.

Konačno, imamo

$$\left|\int_1^3 g(x)dx - I_{m,n}^{PGL}(g)\right| \leq \frac{(2!)^4 2 \cdot 2^{2\cdot 2}}{(2\cdot 2+1)[(2\cdot 2)!]^3} M_4 g = \frac{1}{144} = 6.9444444 \cdot 10^{-3}.$$

(b) Koristeći Taylorove razvoje, imamo:

$$\begin{aligned}
f(-h) &= f(0) - hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1) \\
f(0) &= f(0) \\
f(2h) &= f(0) + 2hf'(0) + 2h^2 f''(0) + \frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2),
\end{aligned}$$

za neke $\xi_1 \in \langle -h, 0\rangle$, $\xi_2 \in \langle 0, 2h\rangle$. Množeći prvu jednakost s A/h, drugu s B/h i treću s C/h, jednakost koju želimo imati je

$$f'(0) = (A+B+C)\frac{f(0)}{h} + (-A+2C)f'(0) + (A+4C)\frac{h}{2}f''(0) - A\frac{h^2}{6}f'''(\xi_1) + C\frac{4h^2}{3}f'''(\xi_2).$$

Uspoređujući članove uz $f(0)$, $f'(0)$ i $f''(0)$ dobivamo sustav

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -A + 2C &= 1 \\ A + 4C &= 0. \end{aligned}$$

Iz zadnjih dviju jednakosti dobivamo $4C + 2C = 1$, odnosno $C = 1/6$, a onda i $A = -2/3$. U prvoj jednakosti onda imamo $B = 1/2$.

Time smo dobili formulu, a onda i ocjenu:

$$\left| f'(0) - \frac{-4f(-h) + 3f(0) + f(2h)}{6h} \right| = \left| \frac{2}{3}\frac{h^2}{6} f'''(\xi_1) + \frac{1}{6}\frac{4h^2}{3} f'''(\xi_2) \right| \leq \frac{h^2}{3} M_3 f.$$

$\triangle$

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Zadatak 5. (10 bodova)

Newtonovom metodom odredite sva rješenja jednadžbe

$$2\ln(x-1) = \cos x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!

Uputa za rješenje. Neka je $f(x) = 2\ln(x-1) - \cos x$. Kako je ln rastuća funkcija, a cos ograničena između -1 i 1, za $x > \pi$ imamo $f(x) > 2\ln(\pi - 1) - 1 > 0$. Kako je domena funkcije $x > 1$, sve eventualne nultočke nalaze se u $\langle 1, \pi]$.

Za derivacije funkcije f imamo

$$f'(x) = \frac{2}{x-1} + \sin x, \quad f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} + \cos x, \quad f'''(x) = \frac{4}{(x-1)^2} - \sin x.$$

Na $\langle 1, \pi]$ $f'(x)$ je pozitivna kao zbroj dviju takvih, pa je f rastuća. Dakle, f ima najviše jednu nultočku na tom intervalu. Kako je $f(1.5) < 0$ i $f(2) > 0$ zaključujemo da f ima točno jednu nultočku, te se ona nalazi u $[1.5, 2]$.

Na intervalu $[1.5, 2]$ za f''' imamo $f'''(x) \geq 4/2^2 - \sin x \geq 0$ (primijetimo da se jednakost ne može postići), pa je f'' rastuća. Njezin maksimum je u $f''(2) < 0$, dakle cijela druga derivacija je negativna, pa je prva derivacija padajuća, ali i pozitivna jer je $f'(2) > 0$.

Iz toga zaključujemo da su zadovoljeni uvjeti globalne konvergencije Newtonove metode ako za x_0 uzmemo lijevi rub intervala 1.5. Nadalje, $M_2 = -f''(1.5) = 7.92926279833$, $m_1 = 2.90929742683$. Sada možemo izračunati uvjet zaustavljanja: $|x_n - x_{n-1}| < 0.002708898004841$.

Iteracije su prikazane u tablici.

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1.500000000000000	-
1	1.791552381081565	0.291552381081565
2	1.862518047457909	0.070965666376345
3	1.865019703840100	0.002501656382190

Uvjet zaustavljanja zadovoljen jer je 0.002501656382190 manje od 0.002708898004841.

Rješenje: $x = 1.865019703840100$.

△