

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (10 bodova)

- (a) Definirajte SVD matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, pri čemu je $n \geq m$.
- (b) U kojem su odnosu svojstvene i singularne vrijednosti matrica AA^T i A ? U kojoj su vezi njihovi svojstveni i singularni vektori? Dokažite tvrdnje.
- (c) Za dane prirodne brojeve $n \geq m$ veće od 2, dokažite ili opovrgnite tvrdnju: ako su $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrice kojima je zbroj rangova strogo manji od m , onda postoje singularne dekompozicije matrica A i B takve da se svaki lijevi singularni vektor od A podudara s nekim lijevim singularnim vektorom od B .

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Zadatak 2. (10 bodova)

- (a) Koja je razlika između Newton-Cotesovih integracijskih formula i Gauss-Legendreovih formula u njihovoj konstrukciji? Što znamo o polinomnom stupnju egzaktnosti tih formula s n čvorova?
- (b) Dokažite da je vodeći koeficijent n -tog Lagrangeovog polinoma P_n jednak $\frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}$.
- (c) Za svaki par nenegativnih cijelih brojeva (n, m) , pri čemu je $m \leq n + 1$, izračunajte $\int_{-1}^1 P_n(x)x^m dx$.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Zadatak 3. (10 bodova)

(a) Odredite potpunu QR faktorizaciju matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -7 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Za funkciju $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2 & x > 0, \end{cases}$$

izračunajte Fourierov red, te pomoću njega dokažite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Zadatak 4. (10 bodova)

- (a) Korištenjem Gauss-Legendreove formule sa dva čvora aproksimirajte $\int_1^3 \sqrt{x} dx$. Izračunajte pravu pogrešku i ocjenu pogreške.
- (b) Odredite realne parametre A, B, C takve da formula

$$f'(0) \approx \frac{Af(-h) + Bf(0) + Cf(2h)}{h}$$

ima što bolju ocjenu greške za dovoljno glatku funkciju f definiranu na okolini nule, te nađite tu ocjenu greške.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 20. 6. 2025.

Zadatak 5. (10 bodova)Newtonovom metodom odredite sva rješenja jednadžbe

$$2 \ln(x - 1) = \cos x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!