JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (20 bodova)

(a) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definirajte pojam LU faktorizacije s parcijalnim pivotiranjem za matricu A. Definirajte pojam dijagonalne dominantnosti matrice A po stupcima.

(b) Neka su $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, te $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takvi da je α po modulu najveći broj u prvom stupcu matrice
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & b^T \\ a & B \end{bmatrix}.$$
Koristeći faktore LU faktorizacije s parcijalnim pivotiranjem matrice $C := B - ab^T$ odredite faktore u LU faktorizaciji s parcijalnim pivotiranjem matrice A.

(c) Neka je A matrica koja je dijagonalno dominantna po recima. Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Ako se LU faktorizacija s parcijalnim pivotiranjem matrice A podudara s njenom LU faktorizacijom bez pivotiranja, onda je A dijagonalno dominantna i po stupcima.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. (c) Tvrdnja ne vrijedi. Na primjer, promotrimo matricu
$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

△

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Zadatak 2. (20 bodova)

(a) Definirajte SVD matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, pri čemu je $n \geq m$.

(b) U kojem su odnosu svojstvene i singularne vrijednosti matrica AA^T i A? U kojoj su vezi njihovi svojstveni i singularni vektori? Dokažite tvrdnje.

(c) Za dane prirodne brojeve $n \geq m$ veće od 2, dokažite ili opovrgnite tvrdnju: ako su $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrice kojima je zbroj rangova strogo manji od m, onda postoje singularne dekompozicije matrica A i B takve da se svaki lijevi singularni vektor od A podudara s nekim lijevim singularnim vektorom od B.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. (c) Tvrdnja ne vrijedi; dovoljno je pronaći kontraprimjer. Neka su A i B matrice ranga 1 takve da se njihove slike ne podudaraju ali da nisu ni ortogonalne. Neka su $U^A = [u_1^A, \ldots, u_n^A]$ i $U^B = [u_1^B, \ldots, u_n^B]$ matrice lijevih singularnih vektora od A i B redom. Promotrimo prvi lijevi singularni vektor u_1^A matrice A. On razapinje $\mathrm{Im}(A)$, a kako je $\mathrm{Im}(A) \neq \mathrm{Im}(B)$, vrijedi $u_1^A \neq u_1^B$. S druge strane, pretpostavimo da je $u_1^A = u_j^B$ za $j > 1$. Kako je matrica U^B ortogonalna, vrijedi $u_j^B \perp u_1^B$, što povlači $u_1^A \perp u_1^B$, pa je $\mathrm{Im}(A) \perp \mathrm{Im}(B)$, a to je kontradikcija s pretpostavkom.

△

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Zadatak 3. (20 bodova) Promotrimo funkciju

$$f(x) = \ln(x) - x + 1.$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za svaki y postoji neki $|\alpha_y| < \varepsilon$ takav da vrijedi $fl(\ln(y)) = \ln(y) \cdot (1 + \alpha_y)$, pri čemu je ε jedinična greška zaokruživanja.

(a) Detaljno objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po gornjoj formuli za vrijednosti x (vrlo) blizu 1, odnosno za male $|x-1|$.

(b) Odredite relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i ustanovite kako se ona ponaša kada $x \to 1$. Je li problem računanja vrijednosti funkcije f u točki x stabilan u relativnom smislu za (po modulu) male vrijednosti od $|x-1|$? Možete li predložiti formulu koja će biti stabilna?

(c) Funkciju f interpoliramo na segmentu $[1, 3]$ u Čebiševljevim čvorovima polinomom stupnja 2. Odredite pripadni interpolacijski polinom, ocjenu greške i stvarnu grešku u $x = 2$.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje.

a) Oduzimamo $\ln x$ i $x - 1$ - dva po modulu bliska broja od kojih jedan ima potencijalnu grešku - postoji opasnost od katastrofalnog kraćenja.

b) Imamo $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, pa je relativna uvjetovanost

$$\kappa_{rel}^f = \left|\frac{x(\frac{1}{x} - 1)}{\ln x - x + 1}\right| = \left|\frac{x-1}{x-1-\ln x}\right| = \left|1 + \frac{\ln x}{x-1-\ln x}\right| \to +\infty \text{ kad } x \to 1.$$

Dakle, imamo loše uvjetovan problem - odnosno potencijalna opasnost od katastrofalnog kraćenja nije posljedica formule koju koristimo, već samog problema. Stoga i nema alternativne formule koja će davati točniji rezultat.

x_i \ k	0	1	2
$2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.8131		
		-0.5845	
2	-0.3069		-0.1383
		-0.3449	
$2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$-8.246 \cdot 10^{-3}$		

c) Kako imamo $n = 2$ čvora, za ocjenu greške trebamo $M_3 f$:

$$f'(x) = x^{-1} + 1,\ f''(x) = -x^{-2},\ f'''(x) = 2x^{-3}.$$

Imamo $M_3 f = |f'''(1)| = 2$. Čebiševljeve čvorove za polinom stupnja 2 dobivamo kao nultočke polinoma $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ translatirane u $[1, 3]$ (tj. samo im dodamo 2), a to su $x_0 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1 = 2 + 0$, i $x_2 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ Interpolacijski polinom je $p_2(x) = -0.8131 - 0.5845(x - 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}) - 0.3782(x-2)(x - 2 - \frac{\sqrt{3}}{2})$. Kako je $x = 2$ čvor interpolacije, imamo da je prava greška 0, a ocjena greške je $|e(x)| \leq \frac{1}{12}$. △

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Zadatak 4. (20 bodova)

(a) Korištenjem Gauss-Legendreove formule sa dva čvora aproksimirajte $\int_1^3 \sqrt{x}dx$. Izračunajte pravu pogrešku i ocjenu pogreške.

(b) Odredite realne parametre A, B, C takve da formula

$$f'(0) \approx \frac{Af(-h) + Bf(0) + Cf(2h)}{h}$$

ima što bolju ocjenu greške za dovoljno glatku funkciju f definiranu na okolini nule, te nađite tu ocjenu greške.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Uputa za rješenje. (a) Neka je $g(x) = \sqrt{x}$. Prava vrijednost integrala je $\int_1^3 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 1^{3/2}\right) =$ 2.79743494847. Vrijednost aproksimacije dobivamo tako da GL formulu pomaknemo za 2 (držeći težine iste jer je duljina intervala opet jednaka 2), pa je

$$I_2^{GL}(g) = g\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2.79816161632.$$

Prava greška iznosi $7.26667845123 \cdot 10^{-4}$.

Za ocjenu greške koristimo formulu za produljene Gauss-Legendrove formule s $m = 1$ i $n = 2$. Potreban nam je maksimum apsolutne vrijednosti 4. derivacije funkcije g:

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2},\ g''(x) = \frac{-1}{4}x^{-3/2},\ g'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2},\ g^{(4)}(x) = \frac{-15}{16}x^{-7/2}.$$

Funkcija $g^{(4)}(x)$ je negativna i rastuća pa je $M_4 g = -g^{(4)}(1) = \frac{15}{16}$.

Konačno, imamo

$$\left|\int_1^3 g(x)dx - I_{m,n}^{PGL}(g)\right| \le \frac{(2!)^4 2 \cdot 2^{2\cdot 2}}{(2\cdot 2+1)[(2\cdot 2)!]^3} M_4 g = \frac{1}{144} = 6.9444444 \cdot 10^{-3}.$$

(b) Koristeći Taylorove razvoje, imamo:

$$\begin{aligned} f(-h) &= f(0) - hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1) \\ f(0) &= f(0) \\ f(2h) &= f(0) + 2hf'(0) + 2h^2 f''(0) + \frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2), \end{aligned}$$

za neke $\xi_1 \in \langle -h, 0\rangle$, $\xi_2 \in \langle 0, 2h\rangle$. Množeći prvu jednakost s A/h, drugu s B/h i treću s C/h, jednakost koju želimo imati je

$$f'(0) = (A+B+C)\frac{f(0)}{h} + (-A+2C)f'(0) + (A+4C)\frac{h}{2}f''(0) - A\frac{h^2}{6}f'''(\xi_1) + C\frac{4h^2}{3}f'''(\xi_2).$$

Uspoređujući članove uz $f(0)$, $f'(0)$ i $f''(0)$ dobivamo sustav

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -A + 2C &= 1 \\ A + 4C &= 0. \end{aligned}$$

Iz zadnjih dviju jednakosti dobivamo $4C + 2C = 1$, odnosno $C = 1/6$, a onda i $A = -2/3$. U prvoj jednakosti onda imamo $B = 1/2$.

Time smo dobili formulu, a onda i ocjenu:

$$\left| f'(0) - \frac{-4f(-h) + 3f(0) + f(2h)}{6h} \right| = \left| \frac{2}{3}\frac{h^2}{6} f'''(\xi_1) + \frac{1}{6}\frac{4h^2}{3} f'''(\xi_2) \right| \leq \frac{h^2}{3} M_3 f.$$

△

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Zadatak 5. (20 bodova)

Newtonovom metodom odredite sva rješenja jednadžbe

$$2\ln(x-1) = \cos x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!

Uputa za rješenje. Neka je $f(x) = 2\ln(x-1) - \cos x$. Kako je ln rastuća funkcija, a cos ograničena između -1 i 1, za $x > \pi$ imamo $f(x) > 2\ln(\pi - 1) - 1 > 0$. Kako je domena funkcije $x > 1$, sve eventualne nultočke nalaze se u $\langle 1, \pi]$.

Za derivacije funkcije f imamo

$$f'(x) = \frac{2}{x-1} + \sin x, \quad f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} + \cos x, \quad f'''(x) = \frac{4}{(x-1)^2} - \sin x.$$

Na $\langle 1, \pi]$ $f'(x)$ je pozitivna kao zbroj dviju takvih, pa je f rastuća. Dakle, f ima najviše jednu nultočku na tom intervalu. Kako je $f(1.5) < 0$ i $f(2) > 0$ zaključujemo da f ima točno jednu nultočku, te se ona nalazi u $[1.5, 2]$.

Na intervalu $[1.5, 2]$ za f''' imamo $f'''(x) \geq 4/2^2 - \sin x \geq 0$ (primijetimo da se jednakost ne može postići), pa je f'' rastuća. Njezin maksimum je u $f''(2) < 0$, dakle cijela druga derivacija je negativna, pa je prva derivacija padajuća, ali i pozitivna jer je $f'(2) > 0$.

Iz toga zaključujemo da su zadovoljeni uvjeti globalne konvergencije Newtonove metode ako za x_0 uzmemo lijevi rub intervala 1.5. Nadalje, $M_2 = -f''(1.5) = 7.92926279833$, $m_1 = 2.90929742683$. Sada možemo izračunati uvjet zaustavljanja: $|x_n - x_{n-1}| < 0.002708898004841$.

Iteracije su prikazane u tablici.

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1.500000000000000	-
1	1.791552381081565	0.291552381081565
2	1.862518047457909	0.070965666376345
3	1.865019703840100	0.002501656382190

Uvjet zaustavljanja zadovoljen jer je 0.002501656382190 manje od 0.002708898004841.

Rješenje: $x = 1.865019703840100$.

△