JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (20 bodova)

(a) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definirajte pojam LU faktorizacije s parcijalnim pivotiranjem za matricu A. Definirajte pojam dijagonalne dominantnosti matrice A po stupcima.

(b) Neka su $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, te $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takvi da je α po modulu najveći broj u prvom stupcu matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & b^T \\ a & B \end{bmatrix}.$$

Koristeći faktore LU faktorizacije s parcijalnim pivotiranjem matrice $C := B - ab^T$ odredite faktore u LU faktorizaciji s parcijalnim pivotiranjem matrice A.

(c) Neka je A matrica koja je dijagonalno dominantna po recima. Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Ako se LU faktorizacija s parcijalnim pivotiranjem matrice A podudara s njenom LU faktorizacijom bez pivotiranja, onda je A dijagonalno dominantna i po stupcima.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Zadatak 2. (20 bodova)

(a) Definirajte SVD matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, pri čemu je $n \geq m$.

(b) U kojem su odnosu svojstvene i singularne vrijednosti matrica AA^T i A? U kojoj su vezi njihovi svojstveni i singularni vektori? Dokažite tvrdnje.

(c) Za dane prirodne brojeve $n \geq m$ veće od 2, dokažite ili opovrgnite tvrdnju: ako su $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrice kojima je zbroj rangova strogo manji od m, onda postoje singularne dekompozicije matrica A i B takve da se svaki lijevi singularni vektor od A podudara s nekim lijevim singularnim vektorom od B.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Zadatak 3. (20 bodova) Promotrimo funkciju

$$f(x) = \ln(x) - x + 1.$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za svaki y postoji neki $|\alpha_y| < \varepsilon$ takav da vrijedi $fl(\ln(y)) = \ln(y) \cdot (1 + \alpha_y)$, pri čemu je ε jedinična greška zaokruživanja.

(a) Detaljno objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po gornjoj formuli za vrijednosti x (vrlo) blizu 1, odnosno za male $|x - 1|$.

(b) Odredite relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i ustanovite kako se ona ponaša kada $x \to 1$. Je li problem računanja vrijednosti funkcije f u točki x stabilan u relativnom smislu za (po modulu) male vrijednosti od $|x - 1|$? Možete li predložiti formulu koja će biti stabilna?

(c) Funkciju f interpoliramo na segmentu $[1, 3]$ u Čebiševljevim čvorovima polinomom stupnja 2. Odredite pripadni interpolacijski polinom, ocjenu greške i stvarnu grešku u $x = 2$.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Zadatak 4. (20 bodova)

(a) Korištenjem Gauss-Legendreove formule sa dva čvora aproksimirajte $\int_1^3 \sqrt{x}dx$. Izračunajte pravu pogrešku i ocjenu pogreške.

(b) Odredite realne parametre A, B, C takve da formula

$$f'(0) \approx \frac{Af(-h) + Bf(0) + Cf(2h)}{h}$$

ima što bolju ocjenu greške za dovoljno glatku funkciju f definiranu na okolini nule, te nađite tu ocjenu greške.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 20. 6. 2025.

Zadatak 5. (20 bodova)

Newtonovom metodom odredite sva rješenja jednadžbe

$$2\ln(x-1) = \cos x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!