JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (10 bodova)

(a) Izvedite matričnu formulaciju diskretnog problema najmanjih kvadrata za

$$\|f-\varphi\|_2 = \min_{\psi \in V} \|f-\psi\|_2,$$

gdje je $V = [\{\phi_1, \dots, \phi_m\}]$ m-dimenzionalni vektorski prostor funkcija promatran u točkama $\{t_1, \dots, t_n\}$, te f dana funkcija definirana u istim točkama. Koja je veza matrice A i vektora b s originalnim problemom najmanjih kvadrata?

(b) Dokažite da ako za matricu $A \in \mathbb{M}_{n\times m}$ $(m < n)$ te vektore $x \in \mathbb{R}^m$ i $b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da je $b - Ax \perp \mathcal{R}(A)$, da je tada x rješenje sustava normalnih jednadžbi.

(c) Pretpostavimo da su stupci matrice A međusobno okomiti. Nađite formulu za rješenje diskretnog problema najmanjih kvadrata x. Što možemo tada reći o bazi $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$?

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Zadatak 2. (10 bodova)

(a) Definirajte pojmove: red konvergencije niza iteracija $(x_n)_n$, lokalna konvergencija metode prema nultočki funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Iskažite i dokažite teorem o globalnoj konvergenciji Newtonove metode za rješavanje nelinearne jednadžbe $f(x) = 0$ s jednom nepoznanicom.

(c) Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^4 takva da je $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) = 0$. Dokažite da ako Newtonova metoda za funkciju f generira niz iteracija koji konvergira prema nultočki α, onda je red konvergencije tog niza jednak barem 3. Ako se pritom pozivate na neki teorem, precizno ga iskažite.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Zadatak 3. (10 bodova)
Matrica A je zadana SVD faktorizacijom

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 & -2/5 & 2/5 \\ -4/5 & 7/15 & 4/15 & -4/15 \\ 2/5 & 4/15 & 13/15 & 2/15 \\ -2/5 & -4/15 & 2/15 & 13/15 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}}_{V^T}.$$

(a) Odredite sliku i jezgru matrice A te njenu spektralnu normu.

(b) Odredite netrivijalne svojstvene vrijednosti matrica AA^T i A^TA.

(c) Odredite matricu B ranga 1 takvu da je $\|A - B\|_2$ najmanje moguće; B možete prikazati u faktoriziranom obliku.

(d) Neka je $b = e_1$ (prvi vektor kanonske baze). Odredite rješenje problema najmanjih kvadrata $\min_x \|Ax - b\|_2$.

(e) Koristeći SVD dokažite da za svaku kvadratnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vrijedi da je $|\det(A)|$ jednako umnošku singularnih vrijednosti matrice A.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

Rješenje. (a) Matrica A je ranga 3 pa je $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ i

$$\mathrm{Im}(A) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1/5 \\ -4/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/5 \\ 7/15 \\ 4/15 \\ -4/15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/5 \\ 4/15 \\ 13/15 \\ 2/15 \end{bmatrix} \right\}\right].$$

(b) Prema Propoziciji 4.9 s predavanja znamo da su netrivijalne singularne vrijednosti matrice A drugi korijeni netrivijalnih svojstvenih vrijednosti matrica AA^T i A^TA. Dakle, netrivijalne svojstvene vrijednosti matrica AA^T i A^TA su $1^2 = 1, 2^2 = 4$ i $3^2 = 9$.

(c) Označimo stupce matrice U sa u_1, u_2, u_3, u_4 i stupce matrice V s v_1, v_2, v_3. Tada je tražena matrica $B = 3 \cdot u_1 v_1^T$.

(d) $\min_x \|Ax - b\|_2$ se postiže za x koji je rješenje sustava $\Sigma_r V_r^T x = U_r^T b$, gdje su $U_r = [u_1, \ldots, u_r]$, $V_r = [v_1, \ldots, v_r$ i $\Sigma_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. U našem slučaju, $r = 3$ pa imamo $\Sigma_3 V_3^T x = U_3^T b$. Kako je Σ_3 dijagonalna $\Sigma_3^{-1} = \mathrm{diag}(1, 2/3, 1/3)$. Kako je V_3^T ortogonalna $(V_3^T)^{-1} = V_3$. Ukupno imamo $x = V_3(\Sigma_3)^{-1} U_3^T b = \begin{bmatrix} 1/5 & -4/5 & 8/15 \end{bmatrix}^T$.

(e) Neka je $A = U\Sigma V^T$ SVD dekompozicija kvadratne matrice A. Tada je

$$\det(A) = \det(U\Sigma V^T) = \det(U)\det(\Sigma)\det(V^T) = \det(U)\det(\Sigma)\det(V).$$

S obzirom da su matrice U i V ortogonalne vrijedi $\det(U) = \pm 1$ i $\det(V) = \pm 1$. Ovo se vidi iz $I = U^TU$ pa je $1 = \det(I) = \det(U^TU) = \det(U^T)\det(U) = (\det(U))^2$.

S druge strane $\det(\Sigma) = \prod_{i=1}^n \sigma_i$ jer je Σ dijagonalna matrica pa je njena determinanta jednaka produktu dijagonalnih elemenata. Kako je $\sigma_i \geq 0$ za sve $i = 1, \ldots, n$ imamo

$$|\det(A)| = |\det(U)\det(\Sigma)\det(V)| = \prod_{i=1}^n \sigma_i.$$

$\triangle$

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Zadatak 4. (10 bodova)

Različitim metodama aproksimiramo $I = \displaystyle\int_0^1 (x+1)^2 \ln(x+1)\,dx$.

(a) Koji je najmanji broj čvorova u kojima treba evaluirati funkciju u produljenoj Simpsonovoj formuli kako bi ocjena pogreške bila manja od 10^{-3}?

(b) Produljenom Simpsonovom formulom s čvorovima iz (a) zadatka odredite aproksimaciju integrala I i pravu pogrešku.

(c) U integralnoj formuli $\displaystyle\int_0^h f(x)dx \approx I(f) := \frac{h}{2} f\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{h}{2} f\left(\frac{3h}{4}\right)$ odredite ocjenu pogreške. Može li ona biti bolja odabirom drugih težina (umjesto $\frac{h}{2}$ i $\frac{h}{2}$)?

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
f(x) &:= (x+1)^2 \ln(x+1),\\
f'(x) &= 2(x+1)\ln(x+1) + x + 1,\\
f''(x) &= 2\ln(x+1) + 2 + 1,\\
f'''(x) &= \frac{2}{x+1},\\
f^{(4)}(x) &= \frac{-2}{(x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

(a) Za produljenu Simpsonovu formulu koristimo ocjenu

$$R_{PS} \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 \leq \frac{1}{180(2n)^4} M_4.$$

Kako je $f^{(4)}(x)$ negativna i rastuća, vrijedi $M_4 = f^{(4)}(0) = 2$. Da bi ocjena pogreške bila manja od 10^{-4}, treba biti

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{180(2n)^4} \cdot 2 &< 10^{-3}\\
n^4 &> \frac{2 \cdot 10^3}{180 \cdot 2^4}\\
n &> \sqrt[4]{\frac{25}{36}} = 0.912870929175,
\end{aligned}
$$

odakle je $n \geq 1$. Dakle, potrebno je najmanje $2n+1 = 3$ čvora za evaluaciju Simpsonove formule.

(b) Produljena Simpsonova formula iz (a) zadatka zapravo je obična Simpsonova formula. Slijedi

$$I_{PS} = \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = 0.636514168295.$$

Za točnu vrijednost integrala koristimo parcijalnu integraciju:

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{bmatrix} u = \ln(x+1) & du = \frac{dx}{x+1} \\ dv = (x+1)^2 dx & v = \frac{(x+1)^3}{3} \end{bmatrix} = \left(\ln(x+1)\frac{(x+1)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{3} dx\\
&= \frac{8}{3}\ln 2 - \left(\frac{(x+1)^3}{9}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} = 0.63629436112.
\end{aligned}
$$

Prava pogreška je zato $2.19807174922 \cdot 10^{-4}$.

(c) (*1.način*)
Uvjerimo se da formula ima polinomijalni stupanj egzaktnosti 1:

$$
\begin{aligned}
h &= \int_0^h 1dx = I(1) = \frac{h}{2}\cdot 1 + \frac{h}{2}\cdot 1,\\
\frac{h^2}{2} &= \int_0^h xdx = I(x) = \frac{h}{2}\cdot 0 + \frac{h}{2}\cdot h,\\
\frac{h^3}{3} &= \int_0^h x^2dx \neq I(x^2) = \frac{h}{2}\cdot 0 + \frac{h}{2}\cdot h^2.
\end{aligned}
$$

Po Teoremu 5.12 s predavanja, budući da $I(f)$ ima polinomijalni stupanj egzaktnosti barem 1 ova formula izvedena je kao integral interpolacijskog polinoma stupnja 1 u čvorovima $\frac{h}{4}$ i $\frac{3h}{4}$. Zato za ocjenu greške za dvaput diferencijabilnu funkciju f imamo

$$
|f(x) - p_1(x)| = \left|\frac{\omega(x)}{2!}f''(\xi_x)\right| \leq \frac{1}{2}M_2|\omega(x)|\ dx,
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^h f(x)dx - I(f)\right| &= \left|\int_0^h f(x)dx - \int_0^h p_1(x)dx\right|\\
&\leq \int_0^h |f(x) - p_1(x)|\, dx\\
&\leq \frac{1}{2}M_2\int_0^h |\omega(x)|.
\end{aligned}
$$

Za dovršetak, trebamo odrediti

$$
\begin{aligned}
\int_0^h |\omega(x)| &= \int_0^h \left|\left(x-\frac{h}{4}\right)\left(x-\frac{3h}{4}\right)\right| dx = (\text{simetrija})\\
&= 2\int_0^{h/2} \left|\left(x-\frac{h}{4}\right)\left(x-\frac{3h}{4}\right)\right| dx\\
&= 2\left[\int_0^{h/4}\left(x-\frac{h}{4}\right)\left(x-\frac{3h}{4}\right)dx - \int_{h/4}^{h/2}\left(x-\frac{h}{4}\right)\left(x-\frac{3h}{4}\right)dx\right]\\
&= 2\left[\int_0^{h/4}\left(x^2-hx+\frac{3h^2}{16}\right)dx - \int_{h/4}^{h/2}\left(x^2-hx^2+\frac{3h^2}{16}\right)dx\right]\\
&= 2h^3\left[\frac{1}{192}-\frac{1}{32}+\frac{3}{64}+\frac{1}{192}-\frac{1}{32}+\frac{3}{64}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}-\frac{3}{32}\right]\\
&= \frac{h^3}{96}\left[1-6+9-4+12-9\right] = \frac{h^3}{32}.
\end{aligned}
$$

Zato je

$$
\left|\int_0^h f(x)dx - I(f)\right| \leq \frac{h^3}{64}M_2.
$$

(c) (*2.način*)
Za neku dvaput diferencijabilnu funkciju f definirajmo

$$
F(x) := \int_0^x f(t)dt.
$$

Trivijalno vidimo: $F(0) = 0$, $F(h) = \int_0^h f(x)dx$, $F'(x) = f(x)$. Iz zadnjeg svojstva F je triput diferencijabilna, pa ima Taylorov polinom stupnja 2 (s ostatkom stupnja 3). Razvijmo $F(h)$, $f\left(\frac{h}{4}\right)$ i $f\left(\frac{3h}{4}\right)$ u

Taylorove polinome oko 0:

$$\begin{aligned} F(h) &= F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{2}F''(0) + \frac{h^3}{6}F'''(\xi_1) \\ &= hf(0) + \frac{h^2}{2}f'(0) + \frac{h^3}{6}f''(\xi_1), \\ f\left(\frac{h}{4}\right) &= f(0) + \frac{h}{4}f'(0) + \frac{h^2}{32}f''(\xi_2), \\ f\left(\frac{3h}{4}\right) &= f(0) + \frac{3h}{4}f'(0) + \frac{9h^2}{32}f''(\xi_3), \end{aligned}$$

za neke $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \langle 0, h\rangle$. Greška koju činimo računajući integral integracijskom formulom apsolutna je vrijednost izraza

$$\begin{aligned} &\int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}f\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{h}{2}f\left(\frac{3h}{4}\right) = F(h) - \frac{h}{2}f\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{h}{2}f\left(\frac{3h}{4}\right) \\ &\quad = f(0)\left(h - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) + f'(0)\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h}{2}\frac{h}{4} - \frac{h}{2}\frac{3h}{4}\right) + \frac{h^3}{6}f''(\xi_1) - \frac{h}{2}\frac{h^2}{32}f''(\xi_2) - \frac{h}{2}\frac{9h^2}{32}f''(\xi_3). \end{aligned}$$

Izrazi uz $f(0)$ i $f'(0)$ jednaki su nula, pa je formula polinomijalne egzaktnosti barem 1. Kako imamo dva čvora na raspolaganju, po Teoremu 5.12. s predavanja ne možemo dobiti bolju ocjenu pogreške drugim odabirom čvorova. Uvrštavajući u gornju jednakost $f(x) = x^2$ s desne strane ne dobivamo nulu (koristimo $f''(x) \equiv 1$), pa je polinomijalni stupanj egzaktnosti točno jednak 1. Za ocjenu pogreške koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$\left|\int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}f\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{h}{2}f\left(\frac{3h}{4}\right)\right| \leq M_2\left(\frac{h^3}{6} + \frac{h^3}{64} + \frac{9h^3}{64}\right) = \frac{31}{96}h^3M_2.$$

Ocjene pogrešaka se razlikuju, ali obje su točne. △

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Zadatak 5. (10 bodova)
Newtonovom metodom odredite sva pozitivna rješenja jednadžbe

$$x^4 = 1 + \sin x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!

Rješenje. Definirajmo funkciju $f(x) = x^4 - 1 - \sin x$. Za $x \in \langle 0, 1]$ vrijedi $\sin x \in \langle 0, 1]$ i $x^4 \in \langle 0, 1]$, pa je $f(x) < 1 - 1 - 0 = 0$. Direktno vidimo da $f(0) \neq 0$, pa f nema nultočku na $[0, 1]$.

Pogledajmo derivacije funkcije f na $[1, +\infty\rangle$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 1 - \sin x,\\
f'(x) &= 4x^3 - \cos x,\\
f''(x) &= 12x^2 + \sin x,\\
f'''(x) &= 24x + \cos x.
\end{aligned}$$

Za prve tri derivacije funkcije f vrijedi $f^{(k)} \geq 4 \cdot 1 - 1 > 0$, pa su sve te derivacije pozitivne. Posebno, f, f' i f'' su rastuće.

Kako f nema nultočku na $[0, 1]$, a na $[1, +\infty\rangle$ je rastuća, f ima najviše jednu pozitivnu nultočku. S druge strane, kako je $f(1) = -0.841470984808$, $f(1.5) = 3.0650050134$, funkcija f ima točno jednu nultočku i ona se nalazi u $[1, 1.5]$.

Kako su f' i f'' pozitivne i rastuće, vrijedi

$$M_2 = f''(1.5) = 27.9974949866, \quad m_1 = 3.45969769413.$$

Uvjet zaustavljanja je zato $|x_n - x_{n-1}| < 0.000497135167223$.

Iteracije su prikazane u tablici.

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1.500000000000000	-
1	1.271766696398512	0.228233303601488
2	1.188530305300275	0.083236391098237
3	1.177867736968655	0.010662568331620
4	1.177703523866335	0.000164213102320

Uvjet zaustavljanja zadovoljen jer je 0.000164213102320 manje od 0.000497135167223.

Rješenje: $x = 1.177703523866335$.

△