

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (10 bodova)

- (a) Izvedite matričnu formulaciju diskretnog problema najmanjih kvadrata za

$$\|f - \varphi\|_2 = \min_{\psi \in V} \|f - \psi\|_2,$$

gdje je $V = [\{\phi_1, \dots, \phi_m\}]$ m -dimenzionalni vektorski prostor funkcija promatran u točkama $\{t_1, \dots, t_n\}$, te f dana funkcija definirana u istim točkama. Koja je veza matrice A i vektora b s originalnim problemom najmanjih kvadrata?

- (b) Dokažite da ako za matricu $A \in \mathbb{M}_{n \times m}$ ($m < n$) te vektore $x \in \mathbb{R}^m$ i $b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da je $b - Ax \perp \mathcal{R}(A)$, da je tada x rješenje sustava normalnih jednadžbi.
- (c) Pretpostavimo da su stupci matrice A međusobno okomiti. Nađite formulu za rješenje diskretnog problema najmanjih kvadrata x . Što možemo tada reći o bazi $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$?

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Zadatak 2. (10 bodova)

- (a) Definirajte pojmove: red konvergencije niza iteracija $(x_n)_n$, lokalna konvergencija metode prema nultočki funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Iskažite i dokažite teorem o globalnoj konvergenciji Newtonove metode za rješavanje nelinearne jednadžbe $f(x) = 0$ s jednom nepoznanicom.
- (c) Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^4 takva da je $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) = 0$. Dokažite da ako Newtonova metoda za funkciju f generira niz iteracija koji konvergira prema nultočki α , onda je red konvergencije tog niza jednak barem 3. Ako se pritom pozivate na neki teorem, precizno ga iskažite.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Zadatak 3. (10 bodova)

Matrica A je zadana SVD faktORIZACIJOM

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/5 & 4/5 & -2/5 & 2/5 \\ -4/5 & 7/15 & 4/15 & -4/15 \\ 2/5 & 4/15 & 13/15 & 2/15 \\ -2/5 & -4/15 & 2/15 & 13/15 \end{bmatrix}}_U \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}}_{V^T}.$$

- (a) Odredite sliku i jezgru matrice A te njenu spektralnu normu.
- (b) Odredite netrivialne svojstvene vrijednosti matrica AA^T i $A^T A$.
- (c) Odredite matricu B ranga 1 takvu da je $\|A - B\|_2$ najmanje moguće; B možete prikazati u faktoriziranom obliku.
- (d) Neka je $b = e_1$ (prvi vektor kanonske baze). Odredite rješenje problema najmanjih kvadrata $\min_x \|Ax - b\|_2$.
- (e) Koristeći SVD dokažite da za svaku kvadratnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vrijedi da je $|\det(A)|$ jednako umnošku singularnih vrijednosti matrice A .

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Zadatak 4. (10 bodova)

Različitim metodama aproksimiramo $I = \int_0^1 (x+1)^2 \ln(x+1) dx$.

- (a) Koji je najmanji broj čvorova u kojima treba evaluirati funkciju u produljenoj Simpsonovoj formuli kako bi ocjena pogreške bila manja od 10^{-3} ?
- (b) Produljenom Simpsonovom formulom s čvorovima iz (a) zadatka odredite aproksimaciju integrala I i pravu pogrešku.
- (c) U integralnoj formuli $\int_0^h f(x)dx \approx I(f) := \frac{h}{2}f\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{h}{2}f\left(\frac{3h}{4}\right)$ odredite ocjenu pogreške. Može li ona biti bolja odabirom drugih težina (umjesto $\frac{h}{2}$ i $\frac{h}{2}$)?

NUMERIČKA MATEMATIKA

Drugi kolokvij – 21. 6. 2024.

Zadatak 5. (10 bodova)Newtonovom metodom odredite sva pozitivna rješenja jednadžbe

$$x^4 = 1 + \sin x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!