JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (10 bodova)

(a) Definirajte uvjetovanost matrice $A \in \mathbb{M}_n$.

(b) Označimo s $M_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 5 \end{bmatrix}$. Je li M_ε loše uvjetovana matrica za neku vrijednost $\varepsilon \in \langle -10, 10 \rangle$?

(c) Iskažite i dokažite teorem o ocjeni $\|\Delta x\|/\|x\|$ pomoću uvjetovanosti proizvoljne regularne kvadratne matrice $A \in \mathbb{M}_n$, gdje je matrica ΔA reda n te vektori x, Δx, b i Δb duljine n takvi da je

$$Ax = b \quad \text{i} \quad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 2. (10 bodova)

(a) Neka su dani međusobno različiti čvorovi interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Navedite elemente baze vektorskog prostora polinoma kada interpolacijski polinom prikazujemo (i) u Lagrangeovom obliku; (ii) u Newtonovom obliku; (iii) u Newtonovom obliku kod Hermiteove interpolacije.

(b) Odredite koliko je čvorova potrebno u interpolaciji funkcije $f(x) = e^{2x}$ na intervalu $[-1, 1]$ da bi greška u svakoj točki bila $< 10^{-8}$, u slučaju da koristimo interpolaciju polinomima na Čebiševljevoj mreži.

(c) Neka je φ po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija funkcije $f \in C^4([a, b])$ na ekvidistantnoj mreži čvorova $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Koristeći se rezultatima o interpolaciji polinomima, izvedite ocjenu greške za $\|f - \varphi\|_\infty$, pri čemu je norma definirana za funkcije na segmentu $[a, b]$.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 3. (10 bodova)
Promotrimo funkciju

$$f(x) = 1 - \mathrm{ch}(x).$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za sve y postoje neki $|\alpha_y| < \varepsilon$ takvi da vrijedi $fl(\mathrm{ch}(y)) = \mathrm{ch}(y) \cdot (1 + \alpha_y)$, pri čemu je ε jedinična greška zaokruživanja.

(a) Detaljno objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po gornjoj formuli za vrlo male (po modulu) vrijednosti x. Izvedite izraz za relativnu grešku izračunate vrijednosti $fl(f(x))$ u odnosu na egzaktnu vrijednost $f(x)$, te odredite čemu ona teži kada $x \to 0$.

(b) Odredite relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kada $x \to 0$. Je li problem računanja vrijednost funkcije f u točki x stabilan u relativnom smislu za (po modulu) male vrijednosti od x?

(c) Predložite, ukoliko je to moguće, alternativni izraz za računanje $f(x)$ u aritmetici računala, tako da ono bude stabilno za male vrijednosti od x. Ovdje možete pretpostaviti da se $\mathrm{sh}(x)$ i e^x računaju sa malom relativnom greškom za sve vrijednosti x.

JMBAG　　　　IME I PREZIME　　　　BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 4. (10 bodova)
Za neki prirodan broj n neka je A_n matrica reda n dana s

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ -1 & 2-2^0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-2^{-1} & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 2-2^{-n+3} & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & -1 & 2-2^{-n+2} \end{bmatrix},$$

(u prvom retku se nalaze brojevi 2; neposredno ispod dijagonale se nalaze -1; na mjestu (k,k), $k \geq 2$ je broj $2-2^{-k+2}$; sve su ostalo nule).

(a) Za $n = 5$ odredite LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem. Razlikuje li se od LU faktorizacije bez parcijalnog pivotiranja?

(b) Za $n = 5$ odredite pivotni rast u slučaju parcijalnog pivotiranja. Zaključite kako bi se pivotni rast ponašao za velike n.

(c) Za proizvoljan n odredite $\|A_n\|_1$. Ako znamo da je $\|A_n^{-1}\|_1 \approx 2$, pronađite uvjetovanost matrice A_n za velike n u normi 1.

(d) Koliko je elemenata matrice A_n različito od nule, a koliko elemenata matrice U jednako nula?

(e) Zaključite zašto nije dobro rješavati sustav dan ovom matricom LU faktorizacijom (sa ili bez parcijalnog pivotiranja) u računalu za jako velike n.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 5. (10 bodova)
Funkciju $f(x) = x + \sin(2x)$ aproksimiramo na intervalu $[0, 2\pi]$.

1. Odredite najmanji broj podintervala n tako da ocjena uniformne pogreške na $[0, 2\pi]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-2}$ ako funkciju aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ na ekvidistantnoj mreži.

2. Za $n = 4$ podintervala, odredite aproksimaciju po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom u točki $x_0 = \frac{\pi}{4}$ i pravu pogrešku u toj točki.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$