JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Na ispitu nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (20 bodova)

(a) Definirajte sljedeće pojmove: podijeljena razlika reda k za funkciju f, Čebiševljev polinom.

(b) Neka su dani međusobno različiti čvorovi interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, te neka je dana funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Izvedite rekurzivnu relaciju za $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Dokažite i sve pomoćne tvrdnje koje su potrebne.

(c) Koje svojstvo optimalnosti zadovoljavaju Čebiševljevi polinomi na segmentu $[-1, 1]$? Precizno iskažite i dokažite odgovarajući teorem.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Zadatak 2. (20 bodova)

(a) Izvedite matričnu formulaciju diskretnog problema najmanjih kvadrata za

$$\|f - \varphi\|_2 = \min_{\psi \in V} \|f - \psi\|_2,$$

gdje je $V = [\{\phi_1, \dots, \phi_m\}]$ m-dimenzionalni vektorski prostor funkcija promatran u točkama $\{t_1, \dots, t_n\}$, te f dana funkcija definirana u istim točkama. Koja je veza matrice A i vektora b s originalnim problemom najmanjih kvadrata?

(b) Dokažite da ako za matricu $A \in \mathbb{M}_{n \times m}$ $(m < n)$ te vektore $x \in \mathbb{R}^m$ i $b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da je $b - Ax \perp \mathcal{R}(A)$, da je tada x rješenje sustava normalnih jednadžbi.

(c) Pretpostavimo da su stupci matrice A međusobno okomiti. Nađite formulu za rješenje diskretnog problema najmanjih kvadrata x. Što možemo tada reći o bazi $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$?

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Zadatak 3. (20 bodova)
Za realan broj t dana je matrica

$$A_t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -t & 0 \\ -2 & -t & 14 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 29 \end{bmatrix}.$$

(a) Neka je f preslikavanje koje realnom broju t pridružuje vrijednost $r_{2,3}$ iz matrice R faktorizacije Choleskog. Odredite apsolutnu uvjetovanost funkcije f u t (na prirodnoj domeni funkcije). Za koje vrijednosti t je problem računanja vrijednosti funkcije f stabilan u apsolutnom smislu? Što se događa s matricom A_t kada se t nalazi izvan prirodne domene funkcije f?

(b) Odredite faktorizaciju Choleskog matrice A_8.

(c) Odredite LU faktorizaciju matrice A_8.

(d) Odredite LU faktorizaciju s pivotiranjem matrice A_8.

Rješenje. (a) To preslikavanje dano je formulom $f(t) = -\dfrac{t}{2}$ (detalji u rješenju (b) podzadatka). Prirodna domena funkcije je $\mathbb{R}$. Za uvjetovanost vrijedi $\kappa_f^{\text{abs}}(t) = |f'(t)| = \frac{1}{2}$.. Funkcija nikada nije loše uvjetovana, t nikada nije izvan prirodne domene funkcije f.

(b) Računamo faktorizaciju Choleskog:

$$\begin{aligned}
r_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{4} = 2; \\
r_{1,2} &= \frac{a_{2,1}}{r_{1,1}} = 0, \ r_{1,3} = \frac{a_{3,1}}{r_{1,1}} = -1, \ r_{1,4} = \frac{a_{4,1}}{r_{1,1}} = 0; \\
r_{2,2} &= \sqrt{a_{2,2} - r_{1,2}^2} = \sqrt{16-0} = 4; \\
r_{2,3} &= \frac{a_{2,3} - r_{1,2}r_{1,3}}{r_{2,2}} = \frac{-t-0}{4} = \frac{-t}{2} = -2, \ r_{2,4} = \frac{a_{2,4} - r_{1,2}r_{1,4}}{r_{2,2}} = \frac{0-0}{4} = 0; \\
r_{3,3} &= \sqrt{a_{3,3} - r_{1,3}^2 - r_{2,3}^2} = \sqrt{14-1-4} = 3; \\
r_{3,4} &= \frac{a_{3,4} - r_{1,3}r_{1,4} - r_{2,3}r_{2,4}}{r_{3,3}} = \frac{-2-0-0}{3} = \frac{-2}{3}; \\
r_{4,4} &= \sqrt{a_{4,4} - r_{1,4}^2 - r_{2,4}^2 - r_{3,4}^2} = \sqrt{29 - \frac{4}{9} - 0 - 0} = \frac{\sqrt{257}}{3},
\end{aligned}$$

Pa je $A = R^T R$ gdje je

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{257}/3 \end{bmatrix}.$$

(c) Definiramo $D = \operatorname{diag}(2, 4, 3, \sqrt{257}/3)$. Sada je $L = R^T D^{-1}$ i $U = DR$, tj.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/9 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 257/9 \end{bmatrix}.$$

(d) Kako je matrica A strogo dijagonalno dominantna slijedi da je LU faktorizacija s pivotiranjem jednaka LU faktorizaciji, tj. matrica permutacije je identiteta.

$\triangle$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Zadatak 4. (20 bodova)

Različitim metodama aproksimiramo $I = \displaystyle\int_0^1 (x+1)^2 \ln(x+1)\,dx$.

(a) Koji je najmanji broj čvorova u kojima treba evaluirati funkciju u produljenoj Simpsonovoj formuli kako bi ocjena pogreške bila manja od 10^{-3}?

(b) Produljenom Simpsonovom formulom s čvorovima iz (a) zadatka odredite aproksimaciju integrala I i pravu pogrešku.

(c) U integralnoj formuli $\displaystyle\int_0^h f(x)dx \approx I(f) := \frac{h}{2} f\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{h}{2} f\left(\frac{3h}{4}\right)$ odredite ocjenu pogreške. Može li ona biti bolja odabirom drugih težina (umjesto $\frac{h}{2}$ i $\frac{h}{2}$)?

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
f(x) &:= (x+1)^2 \ln(x+1), \\
f'(x) &= 2(x+1)\ln(x+1) + x + 1, \\
f''(x) &= 2\ln(x+1) + 2 + 1, \\
f'''(x) &= \frac{2}{x+1}, \\
f^{(4)}(x) &= \frac{-2}{(x+1)^2}.
\end{aligned}
$$

(a) Za produljenu Simpsonovu formulu koristimo ocjenu

$$R_{PS} \le \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 \le \frac{1}{180(2n)^4} M_4.$$

Kako je $f^{(4)}(x)$ negativna i rastuća, vrijedi $M_4 = f^{(4)}(0) = 2$. Da bi ocjena pogreške bila manja od 10^{-4}, treba biti

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{180(2n)^4} \cdot 2 &< 10^{-3} \\
n^4 &> \frac{2 \cdot 10^3}{180 \cdot 2^4} \\
n &> \sqrt[4]{\frac{25}{36}} = 0.912870929175,
\end{aligned}
$$

odakle je $n \ge 1$. Dakle, potrebno je najmanje $2n+1 = 3$ čvora za evaluaciju Simpsonove formule.

(b) Produljena Simpsonova formula iz (a) zadatka zapravo je obična Simpsonova formula. Slijedi

$$I_{PS} = \frac{1}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = 0.636514168295.$$

Za točnu vrijednost integrala koristimo parcijalnu integraciju:

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{bmatrix} u = \ln(x+1) & du = \frac{dx}{x+1} \\ dv = (x+1)^2 dx & v = \frac{(x+1)^3}{3} \end{bmatrix} = \left(\ln(x+1)\frac{(x+1)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{3} dx \\
&= \frac{8}{3}\ln 2 - \left(\frac{(x+1)^3}{9}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} = 0.63629436112.
\end{aligned}
$$

Prava pogreška je zato $2.19807174922 \cdot 10^{-4}$.

(c) (*1.način*)

Uvjerimo se da formula ima polinomijalni stupanj egzaktnosti 1:

$$\begin{aligned}
h &= \int_0^h 1dx = I(1) = \frac{h}{2}\cdot 1 + \frac{h}{2}\cdot 1,\\
\frac{h^2}{2} &= \int_0^h xdx = I(x) = \frac{h}{2}\cdot 0 + \frac{h}{2}\cdot h,\\
\frac{h^3}{3} &= \int_0^h x^2dx \neq I(x^2) = \frac{h}{2}\cdot 0 + \frac{h}{2}\cdot h^2.
\end{aligned}$$

Po Teoremu 5.12 s predavanja, budući da $I(f)$ ima polinomijalni stupanj egzaktnosti barem 1 ova formula izvedena je kao integral interpolacijskog polinoma stupnja 1 u čvorovima $\frac{h}{4}$ i $\frac{3h}{4}$. Zato za ocjenu greške za dvaput diferencijabilnu funkciju f imamo

$$|f(x) - p_1(x)| = \left|\frac{\omega(x)}{2!}f''(\xi_x)\right| \leq \frac{1}{2}M_2|\omega(x)|\ dx,$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^h f(x)dx - I(f)\right| &= \left|\int_0^h f(x)dx - \int_0^h p_1(x)dx\right|\\
&\leq \int_0^h |f(x) - p_1(x)|\,dx\\
&\leq \frac{1}{2}M_2\int_0^h |\omega(x)|.
\end{aligned}$$

Za dovršetak, trebamo odrediti

$$\begin{aligned}
\int_0^h |\omega(x)| &= \int_0^h \left|\left(x-\frac{h}{4}\right)\left(x-\frac{3h}{4}\right)\right| dx = \text{(simetrija)}\\
&= 2\int_0^{h/2} \left|\left(x-\frac{h}{4}\right)\left(x-\frac{3h}{4}\right)\right| dx\\
&= 2\left[\int_0^{h/4}\left(x-\frac{h}{4}\right)\left(x-\frac{3h}{4}\right)dx - \int_{h/4}^{h/2}\left(x-\frac{h}{4}\right)\left(x-\frac{3h}{4}\right)dx\right]\\
&= 2\left[\int_0^{h/4}\left(x^2 - hx + \frac{3h^2}{16}\right)dx - \int_{h/4}^{h/2}\left(x^2 - hx^2 + \frac{3h^2}{16}\right)dx\right]\\
&= 2h^3\left[\frac{1}{192} - \frac{1}{32} + \frac{3}{64} + \frac{1}{192} - \frac{1}{32} + \frac{3}{64} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{3}{32}\right]\\
&= \frac{h^3}{96}\left[1 - 6 + 9 - 4 + 12 - 9\right] = \frac{h^3}{32}.
\end{aligned}$$

Zato je

$$\left|\int_0^h f(x)dx - I(f)\right| \leq \frac{h^3}{64}M_2.$$

(c) (*2.način*)

Za neku dvaput diferencijabilnu funkciju f definirajmo

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

Trivijalno vidimo: $F(0) = 0$, $F(h) = \int_0^h f(x)dx$, $F'(x) = f(x)$. Iz zadnjeg svojstva F je triput diferencijabilna, pa ima Taylorov polinom stupnja 2 (s ostatkom stupnja 3). Razvijmo $F(h)$, $f\left(\frac{h}{4}\right)$ i $f\left(\frac{3h}{4}\right)$ u

Taylorove polinome oko 0:

$$\begin{aligned}
F(h) &= F(0) + hF'(0) + \frac{h^2}{2}F''(0) + \frac{h^3}{6}F'''(\xi_1) \\
&= hf(0) + \frac{h^2}{2}f'(0) + \frac{h^3}{6}f''(\xi_1), \\
f\left(\frac{h}{4}\right) &= f(0) + \frac{h}{4}f'(0) + \frac{h^2}{32}f''(\xi_2), \\
f\left(\frac{3h}{4}\right) &= f(0) + \frac{3h}{4}f'(0) + \frac{9h^2}{32}f''(\xi_3),
\end{aligned}$$

za neke $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \langle 0, h\rangle$. Greška koju činimo računajući integral integracijskom formulom apsolutna je vrijednost izraza

$$\begin{aligned}
&\int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}f\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{h}{2}f\left(\frac{3h}{4}\right) = F(h) - \frac{h}{2}f\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{h}{2}f\left(\frac{3h}{4}\right) \\
&\quad = f(0)\left(h - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) + f'(0)\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h}{2}\frac{h}{4} - \frac{h}{2}\frac{3h}{4}\right) + \frac{h^3}{6}f''(\xi_1) - \frac{h}{2}\frac{h^2}{32}f''(\xi_2) - \frac{h}{2}\frac{9h^2}{32}f''(\xi_3).
\end{aligned}$$

Izrazi uz $f(0)$ i $f'(0)$ jednaki su nula, pa je formula polinomijalne egzaktnosti barem 1. Kako imamo dva čvora na raspolaganju, po Teoremu 5.12. s predavanja ne možemo dobiti bolju ocjenu pogreške drugim odabirom čvorova. Uvrštavajući u gornju jednakost $f(x) = x^2$ s desne strane ne dobivamo nulu (koristimo $f''(x) \equiv 1$), pa je polinomijalni stupanj egzaktnosti točno jednak 1. Za ocjenu pogreške koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$\left|\int_0^h f(x)dx - \frac{h}{2}f\left(\frac{h}{4}\right) - \frac{h}{2}f\left(\frac{3h}{4}\right)\right| \leq M_2\left(\frac{h^3}{6} + \frac{h^3}{64} + \frac{9h^3}{64}\right) = \frac{31}{96}h^3M_2.$$

Ocjene pogrešaka se razlikuju, ali obje su točne. △

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Zadatak 5. (20 bodova)
Newtonovom metodom odredite sva pozitivna rješenja jednadžbe

$$x^4 = 1 + \sin x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!

Rješenje. Definirajmo funkciju $f(x) = x^4 - 1 - \sin x$. Za $x \in \langle 0, 1]$ vrijedi $\sin x \in \langle 0, 1]$ i $x^4 \in \langle 0, 1]$, pa je $f(x) < 1 - 1 - 0 = 0$. Direktno vidimo da $f(0) \neq 0$, pa f nema nultočku na $[0, 1]$.

Pogledajmo derivacije funkcije f na $[1, +\infty\rangle$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 1 - \sin x, \\ f'(x) &= 4x^3 - \cos x, \\ f''(x) &= 12x^2 + \sin x, \\ f'''(x) &= 24x + \cos x. \end{aligned}$$

Za prve tri derivacije funkcije f vrijedi $f^{(k)} \geq 4 \cdot 1 - 1 > 0$, pa su sve te derivacije pozitivne. Posebno, f, f' i f'' su rastuće.

Kako f nema nultočku na $[0, 1]$, a na $[1, +\infty\rangle$ je rastuća, f ima najviše jednu pozitivnu nultočku. S druge strane, kako je $f(1) = -0.841470984808$, $f(1.5) = 3.0650050134$, funkcija f ima točno jednu nultočku i ona se nalazi u $[1, 1.5]$.

Kako su f' i f'' pozitivne i rastuće, vrijedi

$$M_2 = f''(1.5) = 27.9974949866, \quad m_1 = 3.45969769413.$$

Uvjet zaustavljanja je zato $|x_n - x_{n-1}| < 0.000497135167223$.

Iteracije su prikazane u tablici.

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1.500000000000000	-
1	1.271766696398512	0.228233303601488
2	1.188530305300275	0.083236391098237
3	1.177867736968655	0.010662568331620
4	1.177703523866335	0.000164213102320

Uvjet zaustavljanja zadovoljen jer je 0.000164213102320 manje od 0.000497135167223.

Rješenje: $x = 1.177703523866335$.

△