JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Na ispitu nije dozvoljeno koristiti ništa osim kalkulatora i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (20 bodova)

(a) Definirajte sljedeće pojmove: podijeljena razlika reda k za funkciju f, Čebiševljev polinom.

(b) Neka su dani međusobno različiti čvorovi interpolacije $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, te neka je dana funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Izvedite rekurzivnu relaciju za $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Dokažite i sve pomoćne tvrdnje koje su potrebne.

(c) Koje svojstvo optimalnosti zadovoljavaju Čebiševljevi polinomi na segmentu $[-1, 1]$? Precizno iskažite i dokažite odgovarajući teorem.

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Zadatak 2. (20 bodova)

(a) Izvedite matričnu formulaciju diskretnog problema najmanjih kvadrata za

$$\|f-\varphi\|_2 = \min_{\psi \in V} \|f-\psi\|_2,$$

gdje je $V = [\{\phi_1, \dots, \phi_m\}]$ m-dimenzionalni vektorski prostor funkcija promatran u točkama $\{t_1, \dots, t_n\}$, te f dana funkcija definirana u istim točkama. Koja je veza matrice A i vektora b s originalnim problemom najmanjih kvadrata?

(b) Dokažite da ako za matricu $A \in \mathbb{M}_{n\times m}$ $(m < n)$ te vektore $x \in \mathbb{R}^m$ i $b \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da je $b - Ax \perp \mathcal{R}(A)$, da je tada x rješenje sustava normalnih jednadžbi.

(c) Pretpostavimo da su stupci matrice A međusobno okomiti. Nađite formulu za rješenje diskretnog problema najmanjih kvadrata x. Što možemo tada reći o bazi $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$?

Sve svoje tvrdnje precizno navedite i obrazložite!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Zadatak 3. (20 bodova)
Za realan broj t dana je matrica

$$A_t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -t & 0 \\ -2 & -t & 14 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 29 \end{bmatrix}.$$

(a) Neka je f preslikavanje koje realnom broju t pridružuje vrijednost $r_{2,3}$ iz matrice R faktorizacije Choleskog. Odredite apsolutnu uvjetovanost funkcije f u t (na prirodnoj domeni funkcije). Za koje vrijednosti t je problem računanja vrijednosti funkcije f stabilan u apsolutnom smislu? Što se događa s matricom A_t kada se t nalazi izvan prirodne domene funkcije f?

(b) Odredite faktorizaciju Choleskog matrice A_8.

(c) Odredite LU faktorizaciju matrice A_8.

(d) Odredite LU faktorizaciju s pivotiranjem matrice A_8.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Zadatak 4. (20 bodova)

Različitim metodama aproksimiramo $I = \displaystyle\int_0^1 (x+1)^2 \ln(x+1)\, dx$.

(a) Koji je najmanji broj čvorova u kojima treba evaluirati funkciju u produljenoj Simpsonovoj formuli kako bi ocjena pogreške bila manja od 10^{-3}?

(b) Produljenom Simpsonovom formulom s čvorovima iz (a) zadatka odredite aproksimaciju integrala I i pravu pogrešku.

(c) U integralnoj formuli $\displaystyle\int_0^h f(x)dx \approx I(f) := \frac{h}{2} f\left(\frac{h}{4}\right) + \frac{h}{2} f\left(\frac{3h}{4}\right)$ odredite ocjenu pogreške. Može li ona biti bolja odabirom drugih težina (umjesto $\frac{h}{2}$ i $\frac{h}{2}$)?

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi ispit – 21. 6. 2024.

Zadatak 5. (20 bodova)
Newtonovom metodom odredite sva pozitivna rješenja jednadžbe

$$x^4 = 1 + \sin x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!