JMBAG — IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

24. travnja 2023.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: četvrtak, 27. travnja 2023., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: petak, 28. travnja 2023., u 11 sati; osim za 3. zadatak čiji termin uvida će biti naknadno objavljen.

1

ZADATAK 1

(15 = 4 + 3 + 4 + 4 bodova.)

(a) Navedite tipove grešaka prema načinu na koje su nastale, i opišite po jedan primjer za svaki od njih.

(b) Pretpostavimo da rješavamo sustav $Ax = b$ u aritmetici konačne preciznosti i da dobijemo izračunatu aproksimaciju rješenja $x + \Delta x$, takvu da je $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ sa $\|\Delta A\| \leq \varepsilon \|A\|$. Izvedite tada gornju ogradu za $\|\Delta x\|/\|x\|$, i povežite je sa pojmom uvjetovanosti.

(c) Neka je $\{x_0, ..., x_n\}$ zadana mreža međusobno različitih čvorova. Zašto nam kod interpolacije polinomima u zadanim čvorovima odabir standardne baze potencija $\{1, x, x^2, \dots x^n\}$ nije dobar, a u čemu je Lagrangeova baza pogodnija? Napišite kako izgleda Lagrangeova baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n za problem interpolacije na zadanoj mreži čvorova, i navedite osnovna svojstva te baze. Opišite kako izgleda pripadna matrica linearnog sustava za problem interpolacije $p(x_i) = f_i$, za $i = 0, \dots, n$, gdje je p polinom. Što su prema tome koeficijenti interpolacijskog polinoma zapisanog u Lagrangeovoj bazi?

(d) Neka je $x_0 < x_1 < ... < x_n$ zadana mreža čvorova, i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$. Što je po dijelovima linearna interpolacija φ za funkciju f na zadanoj mreži, i koje uvjete interpolacije zadovoljava? Izvedite gornju ogradu za grešku $|f(x) - \varphi(x)|$ na cijelom intervalu $[x_0, x_n]$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

24. travnja 2023.

($12 = 2 + 3 + 3 + 4$ bodova.) Za brojeve $a, b, c \in \mathbb{R}$ promotrimo 2×2 matricu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

(a) Odredite nužne i dovoljne uvjete na brojeve a, b, c tako da matrica A ima faktorizaciju Choleskog.

(b) Uz pretpostavku da postoji faktorizacija Choleskog $A = R^T R$, promotrimo element R_{22} kao funkciju od a, uz fiksne vrijednosti od b i c. Odredite relativnu uvjetovanost te funkcije. Za koje vrijednosti od a mala relativna perturbacija od a može rezultirati velikom relativnom perturbacijom od R_{22}?

(c) Pretpostavimo da, uz uvjete iz (a), u aritmetici računala računamo faktorizaciju Choleskog, da postupak uspješno završi, te da dobijemo matricu $\hat{R} = \begin{bmatrix} \hat{R}_{11} & \hat{R}_{12} \\ 0 & \hat{R}_{22} \end{bmatrix}$. Izvedite izraze za $\hat{R}_{11}$, $\hat{R}_{12}$ i $\hat{R}_{22}$ koji uključuju odgovarajuće greške računanja u aritmetici računala. Pretpostavite da za sve y postoji $|\alpha| < u$ takav da vrijedi $fl(\sqrt{y}) = \sqrt{y} \cdot (1 + \alpha)$, gdje je u jedinična greška zaokruživanja.

(d) Promotrimo matricu $\hat{A} = \hat{R}^T \hat{R}$. Dokažite da je, uz pretpostavku (a), svaki njen element nastao malom relativnom perturbacijom pripadnog elementa matrice A. Što to znači za algoritam računanja faktorizacije Choleskog?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

24. travnja 2023.

($11 = 4 + 5 + 2$ bodova.) Za neki prirodan broj n dana je matrica

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 4 & 5 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & n-2 & n-1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & n-1 & n & 0 \\ 0 & & & & \dots & 0 & n & 0 \end{bmatrix}.$$

Na toj matrici provodimo

(i) LU faktorizaciju bez pivotiranja;

(ii) LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem.

Za $n = 5$ odredite faktore L i U, odnosno L, U i P za (i) i (ii), te zaključite kako bi ti faktori izgledali za proizvoljan n (slutnju nije potrebno dokazivati indukcijom). Koristeći pivotni rast (dovoljno je gledati samo konačne matrice L i U, a ne i sve međukorake) argumentirajte jesu li računi (i) i (ii) stabilni u aritmetici računala za velike n.

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

24. travnja 2023.

($12 = 6 + 2 + 4$ bodova.) Funkciju $f(x) = \cos(\pi x)$ aproksimiramo na intervalu $[-1, 1]$.

(a) Za $k \in \mathbb{N}$ označimo s p_k interpolacijski polinom za funkciju f na Čebiševljevoj mreži s $k+1$ čvorova pri čemu u svakom čvoru interpoliramo funkciju i njezinu prvu derivaciju. Nađite polinom p_1. Nađite uniformnu ocjenu pogreške interpolacije za p_k. Konvergira li niz $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uniformno prema f na $[-1, 1]$?

(b) Dokažite da je za svaki $k \in \mathbb{N}$ polinom p_k stupnja manjeg ili jednakog $2k$. (Uputa: pokažite da polinom $q_k(x) = p_k(-x)$ također zadovoljava uvjete interpolacije).

(c) Odredite dovoljan broj podsegmenata n da se postigne točnost $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu ako funkciju f aproksimiramo po dijelovima linearnom interpolacijom na ekvidistantnoj mreži. Za taj n odredite vrijednost aproksimacije u točki $x = 0.25$ i pravu grešku.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

24. travnja 2023.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: četvrtak, 27. travnja 2023., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: petak, 28. travnja 2023., u 11 sati; osim za 3. zadatak čiji termin uvida će biti naknadno objavljen.

1

ZADATAK 1

(15 = 4 + 3 + 4 + 4 bodova.)

(a) Na koji način mjerimo greške, tj. koje su mjere za grešku? Navedite vektorske i matrične norme koje se najčešće koriste.

(b) Pretpostavimo da rješavamo sustav $Ax = b$ u aritmetici konačne preciznosti i da dobijemo izračunatu aproksimaciju rješenja $x + \Delta x$, takvu da je $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ sa $\|\Delta b\| \leq \varepsilon \|b\|$. Izvedite tada gornju ogradu za $\|\Delta x\|/\|x\|$, i povežite je sa pojmom uvjetovanosti.

(c) Neka je $\{x_0, ..., x_n\}$ zadana mreža međusobno različitih čvorova. Zašto nam kod interpolacije polinomima u zadanim čvorovima odabir Lagrangeove baze nije dobar, a u čemu je Newtonova baza pogodnija? Napišite kako izgleda Newtonova baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, za problem interpolacije na zadanoj mreži čvorova. Opišite kako izgleda pripadna matrica linearnog sustava za problem interpolacije $p(x_i) = f_i$, za $i = 0, \ldots, n$, gdje je p polinom. Što predstavljaju podijeljene razlike $f[x_0, ..., x_k]$, $k = 0, 1, \ldots, n$ za interpolacijski polinom u Newtonovom obliku?

(d) Neka je $x_0 < x_1 < ... < x_n$ zadana mreža čvorova, i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$. Što je po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija φ za funkciju f na zadanoj mreži, i koje uvjete interpolacije zadovoljava? Izvedite gornju ogradu za grešku $|f(x) - \varphi(x)|$ na cijelom intervalu $[x_0, x_n]$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

24. travnja 2023.

(12 = 2 + 3 + 3 + 4 bodova.) Za brojeve $x, y, z \in \mathbb{R}$ promotrimo 2×2 matricu $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$.

(a) Odredite nužne i dovoljne uvjete na brojeve x, y, z tako da se matrica A može faktorizirati u obliku $A = LDL^T$, pri čemu je L donje trokutasta matrica s jedinicama na dijagonali, a da je D dijagonalna matrica s pozitivnim elementima na dijagonali? Uputa: jednostavno pronađite formule za nepoznate elemente od L i D.

(b) Uz pretpostavku da postoji faktorizacija $A = LDL^T$, promotrimo element D_{22} kao funkciju od x, uz fiksne vrijednosti od y i z. Odredite relativnu uvjetovanost te funkcije. Za koje vrijednosti od x mala relativna perturbacija od x može rezultirati velikom relativnom perturbacijom od D_{22}?

(c) Pretpostavimo da u aritmetici računala izračunamo elemente od L i D, da postupak uspješno završi, te da dobijemo matrice $\hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{\ell} & 1 \end{bmatrix}$ i $\hat{D} = \begin{bmatrix} \hat{d}_1 & 0 \\ 0 & \hat{d}_2 \end{bmatrix}$. Izvedite izraze za $\hat{\ell}$, $\hat{d}_1$ i $\hat{d}_2$ koji uključuju odgovarajuće greške računanja u aritmetici računala; sa u označite jediničnu grešku zaokruživanja.

(d) Promotrimo matricu $\hat{A} = \hat{L}\hat{D}\hat{L}^T$. Dokažite da je, uz pretpostavku iz (a), svaki njen element nastao malom relativnom perturbacijom pripadnog elementa matrice A. Što to znači za algoritam računanja faktorizacije LDL^T?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

24. travnja 2023.

($11 = 4 + 5 + 2$ bodova.) Za neki prirodan broj n dana je matrica

$$A_n = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & & & \\ & 0 & 4 & 3 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & n-2 & n-3 & -1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & n-1 & n-2 & 0 \\ 0 & & & & \dots & 0 & n & 0 \end{bmatrix}.$$

Na toj matrici provodimo

(i) LU faktorizaciju bez pivotiranja;

(ii) LU faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem.

Za $n = 5$ odredite faktore L i U, odnosno L, U i P za (i) i (ii), te zaključite kako bi ti faktori izgledali za proizvoljan n (slutnju nije potrebno dokazivati indukcijom). Koristeći pivotni rast (dovoljno je gledati samo konačne matrice L i U, a ne i sve međukorake) argumentirajte jesu li računi (i) i (ii) stabilni u aritmetici računala za velike n.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

24. travnja 2023.

($12 = 6 + 2 + 4$ bodova.) Funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$ aproksimiramo na intervalu $[-1, 1]$.

(a) Za $m \in \mathbb{N}$ označimo s p_m interpolacijski polinom za funkciju f na Čebiševljevoj mreži s m čvorova pri čemu u svakom čvoru interpoliramo funkciju i njezinu prvu derivaciju. Nađite polinom p_2. Nađite uniformnu ocjenu pogreške interpolacije za p_m. Konvergira li niz $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uniformno prema f na $[-1, 1]$?

(b) Dokažite da je za svaki $m \in \mathbb{N}$ polinom p_m stupnja manjeg ili jednakog $2m - 2$. (Uputa: pokažite da polinom $q_m(x) = p_m(-x)$ također zadovoljava uvjete interpolacije).

(c) Odredite dovoljan broj podsegmenata n da se postigne točnost $\varepsilon = 10^{-3}$ na cijelom intervalu ako funkciju f aproksimiramo po dijelovima linearnom interpolacijom na ekvidistantnoj mreži. Za taj n odredite vrijednost aproksimacije u točki $x = -0.25$ i pravu grešku.