

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

29. kolovoza 2022.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: srijeda, 31. kolovoza 2022., kasno navečer na webu.

Uvid u kolokvije: četvrtak, 01. rujna 2022., u 12.00 sati.

ZADATAK 1

1

(20 bodova.)

- Iskažite Wilkinsonov teorem o grešci unatrag kod rješavanju sustava linearnih jednadžbi Gausovim eliminacijama s parcijalnim pivotiranjem. Definirajte sve veličine koje se u njemu spominju. Zatim iskoristite teoriju perturbacija za linearne sustave i izvedite grešku unaprijed u tom slučaju.
- Iskažite i dokažite rekurziju za podijeljene razlike.
- Ako je x rješenje diskretnog linearnog problema najmanjih kvadrata, tada on zadovoljava koju relaciju ortogonalnosti? Kako tu relaciju nazivamo?
- Ako integracijsku formulu

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = I'_n(f) + E'_n(f), \quad I'_n(f) = \sum_{k=1}^n (w_k f_k + w'_k f'_k)$$

dobijemo integriranjem Hermiteovog interpolacijskog polinoma podintegralne funkcije f , u kom slučaju je ona Gaussova integracijska formula? Iskažite teorem koji govori o tome.

- Neka je α rješenje jednadžbe $x = \varphi(x)$. Iskažite teorem koji govori o konvergenciji niza iteracija $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$ i o tome kada taj niz konvergira prema α s redom konvergencije $p \geq 2$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

29. kolovoza 2022.

(15 bodova.) Pomoću LU faktorizacije, odnosno Gaussovih eliminacija, izračunajte inverz A^{-1} matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-7} & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.0000001 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- (a) Izračunajte uvjetovanost $\kappa_{\infty}(A)$ matrice A u ∞ -normi $\|\cdot\|_{\infty}$, i pivotni rast $\rho(A)$.
- (b) Ako sustav $Ax = b$ za proizvoljni vektor b rješavamo na računalu u dvostrukoj preciznosti za koju je jedinična greška zaokruživanja jednaka $u = 1.11 \cdot 10^{-16}$, kakvu točnost rješenja možemo očekivati?

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3
29. kolovoza 2022.

(20 bodova.) Kubični spline s interpolira funkciju

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

na intervalu $[-1, 1]$ na ekvidistantnoj mreži s 5 čvorova, uz uvjete

$$s'(-1) = f'(-1), \quad s'(1) = f'(1).$$

Izračunajte vrijednost, prvu i drugu derivaciju splinea u točki $x = 1/3$, te nađite pripadne prave pogreške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

29. kolovoza 2022.

(15 bodova.) Nađite najbolju aproksimaciju funkcije $f(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = \sin \pi x$ oblika

$$\varphi(x) = a_1 x(1-x) + a_2 (x(1-x))^2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata.

Uputa: $\int_0^1 x \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi}$, $\int_0^1 x^2 \sin \pi x dx = \frac{\pi^2-4}{\pi^3}$, $\int_0^1 x^3 \sin \pi x dx = \frac{\pi^2-6}{\pi^3}$ i $\int_0^1 x^4 \sin \pi x dx = \frac{48-12\pi^2+\pi^4}{\pi^5}$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5
29. kolovoza 2022.

(15 bodova.) Aproximirajte vrijednost integrala

$$I = \int_{-1}^1 e^{-x^2} \cos x dx$$

Gauss–Lobotovom integracijskom formulom maksimalnog stupnja egzaktnosti $d = 3$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6
29. kolovoza 2022.

(15 bodova.) Odredite sva rješenja jednadžbe

$$e^x + \sin x = 3$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za broj i lokaciju rješenja i ocjenu greške!