Numerička matematika — 1. kolokvij, 26. travnja 2022. — RJEŠENJA

Zadatak 1 (10 bodova.) "Teorijsko pitanje" — greške, linearni sustavi, interpolacija.

(A)
(a) Izvedite matricu brojeva uvjetovanosti $\Gamma(x_1, x_2)$ višedimenzionalnog problema računanja vrijednosti funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

(b) Navedite iskaz teorema o egzistenciji LU faktorizacije. Da li prema tom teoremu postoji LU faktorizacija simetrične pozitivno definitne matrice i zašto?

(c) Navedite iskaz teorema o ocjeni greške interpolacijskog polinoma stupnja n u odnosu na danu funkciju f, koji uključuje više derivacije funkcije f.

(d) Kod po dijelovima kubične interpolacije na $[a, b]$ sa čvorovima interpolacije $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ aproksimacijska funkcija φ je oblika

$$\varphi\Big|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad p_k \in \mathcal{P}_3.$$

Polinome p_k zapisujemo u obliku

$$p_k = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) + c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3, \quad x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Izvedite izraze za koeficijente $c_{i,k}$ $i = 0, 1, 2, 3$ iz interpolacijskih uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} & \qquad p_k(x_k) &= f_k & \\ p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1} & \qquad p_k'(x_k) &= s_k & \qquad k = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

gdje su $f_k = f(x_k)$, a s_k su neke aproksimacije derivacije funkcije f u čvorovima.

Rješenje.

(a) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2) &= \left[\ \left|\frac{x_1}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right| \quad \left|\frac{x_2}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|\ \right] \\ &= \left[\ \frac{|x_1|}{|x_1 + x_2|} \quad \frac{|x_2|}{|x_1 + x_2|}\ \right] \end{aligned}$$

(b) 3. predavanje str. 56 i 4. predavanje str. 16.

(c) 4. predavanje str. 85.

(d) 6. predavanje str. 9 – 14.

Zadatak 1 (10 bodova.) "Teorijsko pitanje" — greške, linearni sustavi, interpolacija.

(B) (a) Izvedite matricu brojeva uvjetovanosti $\Gamma(x_1, x_2)$ višedimenzionalnog problema računanja vrijednosti funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

(b) Ako definiramo funkciju problema $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sa $x = F_A(b) = A^{-1}b$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna matrica, izvedite kako glasi relativna uvjetovanost problema rješavanja linearnih sustava "po normi" $\kappa_{f_A}(b)$? Odredite maksimalnu moguću relativnu uvjetovanost ovog problema po svim vektorima b u bilo kojoj operatorskoj normi $\| \; \|$?

(c) Navedite iskaz teorema o ocjeni greške interpolacijskog polinoma stupnja n u odnosu na danu funkciju f, koji ne uključuje derivacije funkcije f.

(d) Kod po dijelovima kubične interpolacije na $[a, b]$ sa čvorovima interpolacije $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ aproksimacijska funkcija φ je oblika

$$\varphi\Big|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad p_k \in \mathcal{P}_3.$$

Koeficijente polinoma p_k dobivamo iz interpolacijskih uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} \qquad & p_k(x_k) &= f_k \\ p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1} \qquad & p_k'(x_k) &= s_k \qquad\qquad k = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

gdje su $f_k = f(x_k)$, a s_k su neke aproksimacije derivacije funkcije f u čvorovima. Izvedite jednadžbe za parametre $s_0, \ldots, s_n$ u unutarnjim čvorovima $x_1, \ldots, x_{n-1}$ kod kubične splajn interpolacije. Koji uvjet zahtijevamo da funkcija φ zadovoljava u tim unutarnjim čvorovima?

Rješenje.

(a) $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} \left| \dfrac{x_1}{f(x_1, x_2)} \cdot \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right| & \left| \dfrac{x_2}{f(x_1, x_2)} \cdot \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right| \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{|x_1| \cdot |x_2|}{|x_1 \cdot x_2|} & \dfrac{|x_2| \cdot |x_1|}{|x_1 \cdot x_2|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) 3. predavanje str. 89.

(c) 4. predavanje str. 109 (i eventualno str. 111).

(d) 6. predavanje str. 38 – 43.

Zadatak 2 (10 bodova.) Nešto sa greškama.

(A) Promotrimo 2×2 sustav $Ax = b$ za

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Pretpostavimo da sustav rješavamo supstitucijom unatrag u aritmetici računala, te da tako dobijemo rješenje $\hat{x}$. Izvedite izraze za $\hat{x}_1$ i $\hat{x}_2$ koji uključuju odgovarajuće greške računanja u aritmetici računala.

(b) Dokažite da je postupak rješavanja sustava kao u (a) stabilan unatrag, odnosno, da postoji gornje trokutasta matrica $\hat{A}$ čiji je svaki element nastao malom relativnom perturbacijom pripadnog elementa matrice A takva da u egzaktnoj aritmetici vrijedi $\hat{A}\hat{x} = b$.

(c) Dokažite da algoritam rješavanja sustava supstitucijom unatrag u aritmetici računala nije nužno stabilan unaprijed: za $a_{11} = a_{22} = 1$ odredite relativnu grešku unaprijed prilikom računanja x_1, te pokažite da je moguće odabrati a_{12}, b_1 i b_2 takve da ta greška bude po volji velika.

Rješenje.

(a) Računanje supstitucijom unatrag daje, za neke $|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_4| \leq u$ (gdje je u strojna točnost):

$$\hat{x}_2 = fl\left(\frac{b_2}{a_{22}}\right) = \frac{b_2}{a_{22}} \cdot (1 + \varepsilon_1);$$
$$\hat{x}_1 = fl\left(\frac{b_1 - a_{12}\hat{x}_2}{a_{11}}\right) = \frac{(b_1 - a_{12}\hat{x}_2(1 + \varepsilon_2))(1 + \varepsilon_3)}{a_{11}}(1 + \varepsilon_4).$$

(b) Koristeći izraz iz (a) dobivamo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)} & a_{12} \cdot (1 + \varepsilon_2) \\ 0 & a_{22} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon_1} \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

(c) Uvrstimo $a_{11} = a_{22} = 1$ i izraz za $\hat{x}_2$ u izraz za $\hat{x}_1$, te uočimo $x_1 = b_1 - a_{12}b_2$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= (b_1 - a_{12}b_2(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2))(1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_4) \\ &= (b_1 - a_{12}b_2)(1 - 1 + \frac{b_1 - a_{12}b_2(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}{b_1 - a_{12}b_2})(1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_4) \\ &= x_1 \left(1 - \underbrace{\frac{a_{12}b_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2)}{b_1 - a_{12}b_2}}_{\mu}\right)(1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_4). \end{aligned}$$

Uočimo da izraz za μ možemo načiniti po volji velikim. Na primjer, za neki $\alpha \in \mathbb{R}$ uzmimo $b_1 = 1 + \alpha$, $b_2 = 1$, $a_{12} = \alpha$. Tada je $x_1 = 1$, a $\mu = \alpha(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2)$, što je po volji veliko kada $\alpha \to \infty$.

Zadatak 2 (10 bodova.) Nešto sa greškama.

(B) Promotrimo 2×2 sustav $Ax = b$ za

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Pretpostavimo da sustav rješavamo supstitucijom unaprijed u aritmetici računala, te da tako dobijemo rješenje $\hat{x}$. Izvedite izraze za $\hat{x}_1$ i $\hat{x}_2$ koji uključuju odgovarajuće greške računanja u aritmetici računala.

(b) Dokažite da je postupak rješavanja sustava kao u (a) stabilan unatrag, odnosno, da postoji donje trokutasta matrica $\hat{A}$ čiji je svaki element nastao malom relativnom perturbacijom pripadnog elementa matrice A takva da u egzaktnoj aritmetici vrijedi $\hat{A}\hat{x} = b$.

(c) Dokažite da algoritam rješavanja sustava supstitucijom unaprijed u aritmetici računala nije nužno stabilan unaprijed: za $a_{11} = a_{22} = 1$ odredite relativnu grešku unaprijed prilikom računanja x_2, te pokažite da je moguće odabrati a_{21}, b_1 i b_2 takve da ta greška bude po volji velika.

Rješenje. **Rješenje**.

(a) Računanje supstitucijom unaprijed daje, za neke $|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_4| \le u$ (gdje je u strojna točnost):

$$\hat{x}_1 = fl\left(\frac{b_1}{a_{11}}\right) = \frac{b_1}{a_{11}} \cdot (1 + \varepsilon_1);$$
$$\hat{x}_2 = fl\left(\frac{b_2 - a_{21}\hat{x}_1}{a_{22}}\right) = \frac{(b_2 - a_{21}\hat{x}_1(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3)}{a_{22}}(1+\varepsilon_4).$$

(b) Koristeći izraz iz (a) dobivamo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon_1} & 0 \\ a_{21} \cdot (1+\varepsilon_2) & a_{22} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)} \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

(c) Uvrstimo $a_{11} = a_{22} = 1$ i izraz za $\hat{x}_1$ u izraz za $\hat{x}_2$, te uočimo $x_2 = b_2 - a_{21}b_1$:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_2 &= (b_2 - a_{21}b_1(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4) \\
&= (b_2 - a_{21}b_1)(1 - 1 + \frac{b_2 - a_{21}b_1(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{b_2 - a_{21}b_1})(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4) \\
&= x_2\left(1 - \underbrace{\frac{a_{21}b_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2)}{b_2 - a_{21}b_1}}_{\mu}\right)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4).
\end{aligned}$$

Uočimo da izraz za μ možemo načiniti po volji velikim. Na primjer, za neki $\alpha \in \mathbb{R}$ uzmimo $b_2 = 1 + \alpha$, $b_1 = 1$, $a_{21} = \alpha$. Tada je $x_2 = 1$, a $\mu = \alpha(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2)$, što je po volji veliko kada $\alpha \to \infty$.

Zadatak 3 (10 bodova.) Linearni sustav sa LU faktorizacijom.

(A) Pomoću LU faktorizacije, odnosno Gaussovih eliminacija, izračunajte inverz A^{-1} matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \\ -1 & 8 & 1.00001 \end{bmatrix}$$

(a) Izračunajte uvjetovanost $\kappa_\infty(A)$ matrice A u ∞-normi $\| \ \|_\infty$.

(b) Ako sustav $Ax = b$ za proizvoljni vektor b rješavamo na računalu u jednostrukoj preciznosti za koju je jedinična greška zaokruživanja jednaka $u = 5.96 \cdot 10^{-8}$, kakvu točnost rješenja možemo očekivati?

Rješenje. Uvjetovanost matrice u ∞-normi je $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Kada imamo izračunatu LU faktorizaciju $A = LU$, tada je $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$. Traženje inverza je zapravo ekvivalentno postupku Gaussovih eliminicija na sustav kod kojeg je matrica identitete I desna strana. Zato eliminacije vršimo na sljedećoj proširenoj matrici

$$X^{(0)} = \left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right].$$

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{(1)} = L^{(1)}X^{(0)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -1.99999 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{(2)} = L^{(2)}X^{(2)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00001 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Povratnim supstitucijama dalje dobivamo

$$X^{(3)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 900001 & -600000 & 300000 \\ 0 & 5 & 0 & 299999 & -199999 & 100000 \\ 0 & 0 & 1 & 300000 & -200000 & 100000 \end{array}\right]$$

$$X^{(4)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 780001.4 & -520000.4 & 260000 \\ 0 & 1 & 0 & 59999.8 & -39999.8 & 20000 \\ 0 & 0 & 1 & 300000 & -200000 & 100000 \end{array}\right]$$

Odavde slijedi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 780001.4 & -520000.4 & 260000 \\ 59999.8 & -39999.8 & 20000 \\ 300000 & -200000 & 100000 \end{bmatrix}$$

Na kraju imamo da je

(a)

$$\|A\|_\infty = 12, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 1560001.8 = 1.5600018 \cdot 10^6 \quad \Longrightarrow \kappa_\infty(A) = 1.87200216 \cdot 10^7.$$

(b) Odavde možemo zaključiti da će rješenje imati jedva jednu točnu znamenku.

Zadatak 3 (10 bodova.) Linearni sustav sa LU faktorizacijom.

(B) Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-7} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

izračunajte sve matrice $A^{(k)}$ u svim koracima Gaussovih eliminacija i Gaussovih eliminacija sa parcijalnim pivotiranjem.

(a) Izračunajte pivotni rast $\rho(A)$ za obje metode.

(b) Ako sustav $Ax = b$ za proizvoljni vektor b rješavamo na računalu u jednostrukoj preciznosti za koju je jedinična greška zaokruživanja jednaka $u = 5.96 \cdot 10^{-8}$, kakvu točnost rješenja možemo očekivati za metodu bez pivotiranja, a koju za metodu sa pivotiranjem?

Rješenje. Najprije trebamo provesti LU faktorizaciju. Uzimamo $A^{(0)} = A$,

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10^7 & 1 & 0 \\ 10^7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(1)} = L^{(1)}A^{(0)} = \begin{bmatrix} 10^{-7} & 1 & 1 \\ 0 & -9999999 & -9999999 \\ 0 & 10^7 & 10000002 \end{bmatrix}$$

$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{10000000}{9999999} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(2)} = L^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 10^{-7} & 1 & 1 \\ 0 & -9999999 & -9999999 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Prema tome je

(a) $$\rho(A) = \frac{\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{ij} |a_{ij}|} = \frac{10000002}{2} = 5000001 = 5.000001 \cdot 10^6$$

(b) Odavde možemo zaključiti da će rješenje imati jedva jednu točnu znamenku.

Kod LU faktorizacije sa parcijalnim pivotiranjem imamo sljedeću situaciju. Kao najveći element u prvom stupcu matrice možemo uzeti onog na poziciji $(2, 1)$, pa zato moramo zamijeniti 1. i 2. redak.

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{(1)}A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10^{-7} & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10^{-7} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(1)} = L^{(1)}P^{(1)}A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.9999999 & 0.9999999 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Najveći element u drugom stupcu je na poziciji $(3, 2)$, pa zato moramo zamijeniti 2. i 3. redak.

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{(2)}A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0.9999999 & 0.9999999 \end{bmatrix}$$

$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.9999999 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(2)} = L^{(2)}P^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1.9999998 \end{bmatrix}$$

Prema tome je

(a) $$\rho(A) = \frac{\max_{i,j,k} |a_{ij}^{(k)}|}{\max_{ij} |a_{ij}|} = \frac{3}{2} = 1.5$$

(b) U ovom slučaju pivotni rast neće utjecati na točnost rješenja.

Zadatak 4 (10 bodova.) LDL^T faktorizacija i faktorizacija Choleskog.

(A) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & x & 0 \\ 0 & x & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je matrica $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

Rješenje. Matrica A je pozitivno definitna ako i samo ako postoji faktorizacija Choleskog. Algoritam za računanje fakrotizacije Choleksog se ne može izvesti do kraja ako u nekom koraku pri računanju dijagonalnog elementa $r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}$ dobijemo negativan broj ili 0.

Elemente gornje trokutaste matrice R računamo redak po redak.

- **Prvi redak**:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2, \\ r_{12} &= \frac{1}{r_{11}} a_{12} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1, \\ r_{13} &= \frac{1}{r_{11}} a_{13} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0, \\ r_{14} &= \frac{1}{r_{11}} a_{14} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

- **Drugi redak**:

$$\begin{aligned} r_{22} &= \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{5 - 1^2} = 2, \\ r_{23} = \frac{1}{r_{22}} (a_{23} - r_{12} r_{13}) &= \frac{1}{2}(x - 1 \cdot 0) = \frac{x}{2}, \\ r_{24} = \frac{1}{r_{22}} (a_{24} - r_{12} r_{14}) &= \frac{1}{2}(0 - 1 \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

- **Treći redak**:

$$r_{33} = \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{16 - 0^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}.$$

Odavde slijedi da mora biti $16 - \frac{x^2}{4} > 0$, tj. $x^2 < 64$. Ako to vrijedi, zadnji element u trećem retku je

$$r_{34} = \frac{1}{r_{33}} (a_{34} - r_{13} r_{14} - r_{23} r_{24}) = \frac{1}{\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}} \left(1 - 0 \cdot 0 - \frac{x}{2} \cdot 0\right) = \frac{1}{\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}}.$$

Četvrti redak:

$$r_{44} = \sqrt{a_{44} - r_{14}^2 - r^{24} - r^{34}} = \sqrt{4 - 0 - 0 - \frac{1}{16 - \frac{x^2}{4}}} = \sqrt{\frac{63 - x^2}{16 - \frac{x^2}{4}}}.$$

Odavde vidimo da mora vrijediti i $63 - x^2 > 0$, odnosno $x^2 < 63$.

Dakle, matrica $A(x)$ je pozitivno definitna ako i samo ako vrijedi $x^2 < 64$ i $x^2 < 63$, odnosno $|x| < \sqrt{63}$.

Matrica R je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{16 - \frac{x^2}{4}} & \frac{1}{\sqrt{16-\frac{x^2}{4}}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{63-x^2}{16-\frac{x^2}{4}}}. \end{bmatrix}$$

Zadatak 4 (10 bodova.) LDL^T faktorizacija i faktorizacija Choleskog.

(B) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & x & 0 \\ 0 & x & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je matrica $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

Rješenje. Matrica A je pozitivno definitna ako i samo ako postoji faktorizacija Choleskog. Algoritam za računanje fakrotizacije Choleksog se ne može izvesti do kraja ako u nekom koraku pri računanju dijagonalnog elementa $r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}$ dobijemo negativan broj ili 0.

Elemente gornje trokutaste matrice R računamo redak po redak.

- **Prvi redak**:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3, \\ r_{12} &= \frac{1}{r_{11}} a_{12} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1, \\ r_{13} &= \frac{1}{r_{11}} a_{13} = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0, \\ r_{14} &= \frac{1}{r_{11}} a_{14} = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

- **Drugi redak**:

$$\begin{aligned} r_{22} &= \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{5 - 1^2} = 2, \\ r_{23} &= \frac{1}{r_{22}} (a_{23} - r_{12} r_{13}) = \frac{1}{2}(x - 1 \cdot 0) = \frac{x}{2}, \\ r_{24} &= \frac{1}{r_{22}} (a_{24} - r_{12} r_{14}) = \frac{1}{2}(0 - 1 \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

- **Treći redak**:

$$r_{33} = \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \sqrt{4 - 0^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}.$$

Odavde slijedi da mora biti $4 - \frac{x^2}{4} > 0$, tj. $x^2 < 16$. Ako to vrijedi, zadnji element u trećem retku je

$$r_{34} = \frac{1}{r_{33}} (a_{34} - r_{13} r_{14} - r_{23} r_{24}) = \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}} \left(1 - 0 \cdot 0 - \frac{x}{2} \cdot 0\right) = \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}}.$$

Četvrti redak:

$$r_{44} = \sqrt{a_{44} - r_{14}^2 - r^{24} - r^{34}} = \sqrt{4 - 0 - 0 - \frac{1}{4 - \frac{x^2}{4}}} = \sqrt{\frac{15 - x^2}{4 - \frac{x^2}{4}}}.$$

Odavde vidimo da mora vrijediti i $15 - x^2 > 0$, odnosno $x^2 < 15$.

Dakle, matrica $A(x)$ je pozitivno definitna ako i samo ako vrijedi $x^2 < 16$ i $x^2 < 15$, odnosno $|x| < \sqrt{15}$.

Matrica R je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} & \frac{1}{\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{15-x^2}{4-\frac{x^2}{4}}}. \end{bmatrix}$$

Zadatak 5 (10 bodova.) Interpolacija.

(A) Funkciju $f(x) = \ln(1 + x)$ aproksimiramo na intervalu $[0, 2]$.

(a) Odredi najmanji broj podintervala n tako da ocjena uniformne pogreške na $[0, 2]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-3}$ ako funkciju aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom φ.

(b) Nađite interpolacijski polinom za funkciju f na Čebiševljevoj mreži sa 4 čvora na intervalu $[0, 2]$. Ocijenite grešku interpolacije u točki $x = 0.1$ i nađite pravu grešku u toj točki.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a, b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

Rješenje.

a) Ekvidistantna mreža sa n podintervala u intervalu $[a, b]$ ima korak $h = (b - a)/n$. Iz zahtjeva da je ocjena manja ili jednaka ε dobivamo ocjenu za broj podintervala n

$$n \geq (b - a)\sqrt[4]{\frac{M_4}{384\varepsilon}}.$$

Funkcija f i njene derivacije su redom

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1 + x),\\
f'(x) &= \frac{1}{1 + x},\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1 + x)^2},\\
f'''(x) &= \frac{2}{(1 + x)^3},\\
f^{(4)} &= -\frac{6}{(x + 1)^4}.
\end{aligned}$$

Na intervalu [0,2] $|f^{(4)}(x)| = \frac{6}{(x+1)^4}$ je padajuća funkcija pa se maksimum postiže u lijevom rubu, tj. $M_4 = |f^{(4)}(0)| = 6$.

Uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-3}$, za broj podintervala n mora vrijediti

$$n \geq 2\sqrt[4]{\frac{6}{384 \cdot 10^{-3}}} = 3.976,$$

tj. potrebno nam je $n = 4$ podintervala, odnosno 5 čvorova.

b) Čvorovi interpolacije su nultočke Čebiševljevog polinoma $\widetilde{T}_4$:

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2}\left(a + b - (a - b)\cos\frac{(2k + 1)\pi}{2 \cdot 4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

tj. u našem slučaju:

$$\tilde{x}_0 = 1 + \cos\frac{\pi}{8}, \quad \tilde{x}_1 = 1 + \cos\frac{3\pi}{8}, \quad \tilde{x}_2 = 1 + \cos\frac{5\pi}{8}, \quad \tilde{x}_3 = 1 + \cos\frac{7\pi}{8}.$$

Računamo tablicu podijeljenih razlika za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma:

$\tilde{x}_j$	$f[\tilde{x}_j]$	$f[\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}]$	$f[\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}, \tilde{x}_{j+2}]$	$f[\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}, \tilde{x}_{j+2}, \tilde{x}_{j+3}]$
$1 + \cos\frac{\pi}{8}$	1.07291134			
		0.37820671		
$1 + \cos\frac{3\pi}{8}$	0.86822735		-0.09799213	
		0.50623959		0.04909073
$1 + \cos\frac{5\pi}{8}$	0.48076834		-0.18869997	
		0.75278799		
$1 + \cos\frac{7\pi}{8}$	0.07336241			

pa je interpolacijski polinom dan s

$$\begin{aligned} p(x) = {} & 1.07291134 + 0.37820671(x - 1 - \cos\frac{\pi}{8}) - 0.09799213(x - 1 - \cos\frac{\pi}{8})(x - 1 - \cos\frac{3\pi}{8}) \\ & + 0.04909073(x - 1 - \cos\frac{\pi}{8})(x - 1 - \cos\frac{3\pi}{8})(x - 1 - \cos\frac{5\pi}{8}). \end{aligned}$$

Ocjena greške u točki 0.1 je

$$|f(0.1) - p(0.1)| \leq \frac{|\prod_{i=0}^{3}(0.1 - \tilde{x}_i)|}{4!} \cdot M_4 = \frac{2.8899 \cdot 10^{-2}}{4!} \cdot 6 = 7.22 \cdot 10^{-3}.$$

Prava greška u točki 0.1 je

$$|f(0.1) - p(0.1)| = |0.0953102 - 0.094447555| = 8.62 \cdot 10^{-4}.$$

Zadatak 5 (10 bodova.) Interpolacija.

(B) Funkciju $f(x) = \sqrt{1+x}$ aproksimiramo na intervalu $[0,4]$.

(a) Odredi najmanji broj podintervala n tako da ocjena uniformne pogreške na $[0,4]$ ne prelazi $\varepsilon = 10^{-2}$ ako funkciju aproksimiramo po dijelovima kubnom Hermiteovom interpolacijom.

(b) Nađite interpolacijski polinom za funkciju f na Čebiševljevoj mreži sa 4 čvora na intervalu $[0,4]$. Ocijenite grešku interpolacije u točki $x = 0.1$ i nađite pravu grešku u toj točki.

Ocjena uniformne greške za ekvidistantnu mrežu s korakom h na $[a,b]$ ima oblik

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \le \frac{h^4}{384} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Detaljno obrazložite tvrdnje vezane uz ocjenu greške.

Rješenje.

a) Ekvidistantna mreža sa n podintervala u intervalu $[a,b]$ ima korak $h = (b-a)/n$. Iz zahtjeva da je ocjena manja ili jednaka ε dobivamo ocjenu za broj podintervala n

$$n \ge (b-a)\sqrt[4]{\frac{M_4}{384\varepsilon}}.$$

Funkcija f i njene derivacije su redom

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}, \\ f^{(4)} &= -\frac{15}{16(x+1)^{7/2}}. \end{aligned}$$

Na intervalu [0,4] $|f^{(4)}(x)| = \frac{15}{16(x+1)^{7/2}}$ je padajuća funkcija pa se maksimum postiže u lijevom rubu, tj. $M_4 = |f^{(4)}(0)| = 15/16$.

Uz traženu točnost $\varepsilon = 10^{-2}$, za broj podintervala n mora vrijediti

$$n \ge 4\sqrt[4]{\frac{15/16}{384 \cdot 10^{-2}}} = 2.81,$$

tj. potrebno nam je $n = 3$ podintervala, odnosno 4 čvora.

b) Čvorovi interpolacije su nultočke Čebiševljevog polinoma $\widetilde{T}_4$:

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{2}\left(a + b - (a-b)\cos\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 4}\right), \quad k = 0,1,2,3,$$

tj. u našem slučaju:

$$\tilde{x}_0 = 2 + 2\cos\frac{\pi}{8}, \quad \tilde{x}_1 = 2 + 2\cos\frac{3\pi}{8}, \quad \tilde{x}_2 = 2 + 2\cos\frac{5\pi}{8}, \quad \tilde{x}_3 = 2 + 2\cos\frac{7\pi}{8}.$$

Računamo tablicu podijeljenih razlika za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma:

$\tilde{x}_j$	$f[\tilde{x}_j]$	$f[\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}]$	$f[\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}, \tilde{x}_{j+2}]$	$f[\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}, \tilde{x}_{j+2}, \tilde{x}_{j+3}]$
$2 + 2\cos\frac{\pi}{8}$	2.20176272			
		0.24141655		
$2 + 2\cos\frac{3\pi}{8}$	1.94045532		-0.01901048	
		0.29109334		0.00503201
$2 + 2\cos\frac{5\pi}{8}$	1.49486894		-0.03760638	
		0.38936355		
$2 + 2\cos\frac{7\pi}{8}$	1.07342486			

pa je interpolacijski polinom dan s

$$\begin{aligned} p(x) &= 2.20176272 + 0.24141655(x - 2 - 2\cos\frac{\pi}{8}) - 0.01901048(x - 2 - 2\cos\frac{\pi}{8})(x - 2 - 2\cos\frac{3\pi}{8}) \\ &\quad + 0.00503201(x - 2 - 2\cos\frac{\pi}{8})(x - 2 - 2\cos\frac{3\pi}{8})(x - 2 - 2\cos\frac{5\pi}{8}). \end{aligned}$$

Ocjena greške u točki 0.1 je

$$|f(0.1) - p(0.1)| \leq \frac{|\prod_{i=0}^{3}(0.1 - \tilde{x}_i)|}{4!} \cdot M_4 = \frac{5.92 \cdot 10^{-1}}{4!} \cdot \frac{15}{16} = 2.31 \cdot 10^{-2}.$$

Prava greška u točki 0.1 je

$$|f(0.1) - p(0.1)| = |1.048808848 - 1.050060145| = 1.25 \cdot 10^{-3}.$$