

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

06. rujna 2021.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: srijeda, 08. rujna 2021., kasno navečer na webu.

Uvid u kolokvije: vrijeme i linkovi na Zoom meeting-e bit će objavljeni na webu kao i informacija koji je nastavnik ispravljao koji zadatak.

ZADATAK 1

1

(20 bodova.)

- (a) Iskažite teorem o jedinstvenosti LU faktORIZACIJE matrice A , i dokažite ga.
- (b) Definirajte što je po dijelovima linearna interpolacija, kako se računaju njeni parametri, i izvedite njenu grešku za funkciju klase C^2 .
- (c) Kojeg je oblika tročlana rekurzija za ortogonalne polinome, pri čemu izraze za koeficijente ne trebate pisati. Napišite kako se ona koristi kod generalizirane Hornerove sheme (kako glasi sama shema).
- (d) Iskažite teorem o konvergenciji metode raspolavljanja i dokažite ga.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

06. rujna 2021.

(15 bodova.) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & x & 0 \\ 0 & x & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

06. rujna 2021.

(20 bodova.) Promatramo funkciju $f(x) = e^{-x^2}$ na intervalu $[0, 10]$.

- a) Nađite potreban broj čvorova da se u interpolaciji linearnim splajnom na ekvidistantnoj mreži s korakom h postigne točnost od $\varepsilon = 10^{-2}$.
- b) Podijelimo interval $[0, 10]$ na dva dijela: $[0, a]$ i $[a, 10]$ (za neki $a \in (0, 10)$). Napravimo ekvidistantnu mrežu na svakom od njih s koracima h_1 i h_2 , tj. brojem čvorova n_1 i n_2 , i zahtijevamo točnost $\varepsilon = 10^{-2}$. Odredite neki $a \in (0, 10)$ tako da zbroj čvorova $n_1 + n_2$ bude što manji, a da nije veći od 12.

(UPUTA/NAPOMENA: U određivanju broja a , najprije obratite pažnju na kojem dijelu intervala funkcija stagnira, a zatim koristite neku od metoda za rješavanje nelinearnih jednadžbi, npr. metodu raspolavljanja. Samo "pogađanje" nosi bitno manji broj bodova.)

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

06. rujna 2021.

(15 bodova.) Na intervalu $[-1, 1]$ zadana je težinska funkcija $w(x) = x^2$ te pripadni skalarni produkt i norma. Nađite najbolju aproksimaciju funkcije $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = x^5, x \in [-1, 1]$ oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - 2) + a_2(x^3 + 5x + 1)$$

u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

06. rujna 2021.

(15 bodova.)

- (a) Odredite težine w_0 , w_2 , te čvor x_1 u integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx \approx w_0 f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{27} f(x_1) + w_2 f'(x_1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

- (b) Definirajte problem interpolacije funkcije f polinomom (odnosno, zadajte čvorove interpolacije i njihove kratnosti) tako da je integracijska formula koju ste dobili u (a) interpolacijska, odnosno, jednaka integralu interpolacijskog polinoma za funkciju f . Dokažite da to zaista vrijedi!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

06. rujna 2021.

(15 bodova.) Provjerivši da su zadovoljene pretpostavke, Newtonovom metodom riješite jednadžbu

$$e^x - x^2 - 2 = 0$$

na segmentu $[1, 2]$ u točnosti $\varepsilon = 10^{-3}$.