

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

09. srpnja 2021.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: srijeda, 14. srpnja 2021., u 10.00 na webu.

Uvid u kolokvije: vrijeme i linkovi na Zoom meeting-e bit će objavljeni na webu kao i informacija koji je nastavnik ispravljao koji zadatak.

ZADATAK 1

1

(15 bodova.)

- (a) Pretpostavimo da skup podataka (t_k, y_k) za $k = 1, \dots, n$ želimo aproksimirati linearnom funkcijom $\varphi(t) = x_1\varphi_1(t) + \dots + x_m\varphi_m(t)$. Želimo pronaći parametre x_j pomoću metode najmanjih kvadrata. Napišite kako izgleda matična formulacija problema najmanjih kvadrata, koje su dimenzije matrica A i vektor b , i kako izgledaju njihovi elementi. Napišite iskaz teorema o karakterizaciji rješenja problema najmanjih kvadrata preko sustava normalnih jednadžbi, i njegovu geometrijsku interpretaciju.
- (b) Izvedite sustav normalnih jednadžbi za linearnu neprekidnu metodu najmanjih kvadrata. Kako izgleda matična formulacija tog problema, i koje svojstvo ima matrica sustava? Dokažite to svojstvo.
- (c) Neka su $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ međusobno različite točke, i pretpostavimo da smo funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ aproksimirali Hermiteovim interpolacijskim polinomom $h_{2n-1} \in \mathcal{P}$ na mreži čvorova x_1, \dots, x_n . Promatramo integracijsku formulu oblika

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = I'_n(f) + E'_n(f),$$

pri čemu je za $f_k = f(x_k)$ i $f'_k = f'(x_k)$

$$I'_n(f) = \int_a^b w(x)h_{2n-1}(x)dx = \sum_{k=1}^n (w_k f_k + w'_k f'_k).$$

Kog oblika su težinski koeficijenti w_k i w'_k , i koji stupanj egzaktnosti postiže ta formula? U kom slučaju su $w'_k = 0$, $k = 1, \dots, n$? Što tad mora vrijediti za čvorove formule? Koju poznatu integracijsku formulu smo time dobili? Što tada vrijedi za koeficijente w_k , $k = 1, \dots, n$, i zašto?

- (d) Promatramo Newtonovu metodu za nalaženje nultočaka zadane funkcije f na intervalu $[a, b]$. Kako se računaju iteracije, kada su one dobro definirane, i kako ih možemo izvesti geometrijski? Iskažite teorem o lokalnoj konvergenciji Newtonove metode.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

09. srpnja 2021.

(10 bodova.) Na intervalu $[0, +\infty)$ zadana je težinska funkcija $w(x) = e^{-x}$ te pripadni skalarni produkt i norma. Nađite najbolju aproksimaciju funkcije $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zadane s

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{za } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{za } x \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

oblika $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ u smislu neprekidne metode najmanjih kvadrata.

Izračunajte pripadnu pogrešku $\|f - \varphi\|_2$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

09. srpnja 2021.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 x e^x dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-3}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala u točnosti ε .

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

09. srpnja 2021.

(15 bodova.)

- (a) Odredite težine w_0 , w_2 , te čvor x_1 u integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx w_0 f(0) + \frac{49}{45} f(x_1) + w_2 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

- (b) Je li formula dobivena u (a) dijelu zadatka interpolacijska? Je li formula dobivena u (a) dijelu zadatka Gaussova, Gauss–Radau, Gauss–Lobatto? obrazložite. Napišite polinom čvorova $\omega_n(x)$ za formulu dobivenu u (a). Odredite najveći k takav da za sve polinome p stupnja manjeg ili jednakog k vrijedi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \omega_n(x) p(x) dx = 0.$$

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 5
09. srpnja 2021.

(10 bodova.) Metodom jednostavne iteracije riješite jednadžbu

$$\sqrt{1+x^2} - \operatorname{arctg}(x) - x = 0$$

u točnosti $\varepsilon = 10^{-2}$.