JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

20. travnja 2021.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 26. travnja 2021., u 10.00 sati na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 26. travnja 2021., u 16.00 sati online; linkovi na Zoom meeting-e bit će objavljeni na webu kao i informacija koji je nastavnik ispravljao koji zadatak, zato molimo da se svaki student zainteresiran za uvide najavi mailom odgovarajućem nastavniku sa naznakom zadatka.

ZADATAK 1

1

(10 bodova.)

(a) Promatramo što se događa s greškama u rezultatu kada osnovne aritmetičke operacije ($+$, $-$, $*$, $/$) primijenimo u egzaktnoj aritmetici na perturbirane operande sa pripadnim relativnim greškama. Koja operacija je potencijalno opasna i u kojoj situaciji možemo dobiti velike greške? Napišite analizu koja to potvrđuje.

(b) Dokažite da za simetričnu pozitivno definitnu matricu postoji LU faktorizacija i da se nju može preformulirati u oblik $A = LDL^T$, gdje je L donjetrokutasta matrica s jedinicama na dijagonali, a D dijagonalna matrica sa pozitivnom dijagonalom.

(c) Zadane su točke (x_k, f_k), za $k = 0, \ldots, n$. Navedite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti interpolacijskog polinoma za zadane točke. Koja je glavna ideja dokaza? Da li je izbor baze $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ dobar za rješavanje ovog problema na računalu i zašto?

(d) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$. Što je prirodna kubična splajn interpolacija φ za funkciju f na zadanoj mreži, i koje uvjete interpolacije, glatkoće, te rubne uvjete zadovoljava? Kako izgleda matrica pridruženog linearnog sustava za određivanje nagiba u čvorovima, i koja ona svojstva ima? Koje su nepoznanice tog sustava?

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

20. travnja 2021.

(10 bodova.) Promotrimo funkciju

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}.$$

Pretpostavimo da želimo izračunati vrijednost $f(x)$ u realnoj aritmetici računala, uz dodatnu pretpostavku da za sve y postoje neki $|\alpha_y|, |\beta_y| < \varepsilon$ takvi da vrijedi $fl(\cos(y)) = \cos(y) \cdot (1 + \alpha_y)$, te $fl(\sin(y)) = \sin(y) \cdot (1 + \beta_y)$. Ovdje je ε jedinična greška zaokruživanja.

(a) Detaljno objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po gornjoj formuli za (po modulu) vrlo male vrijednosti x. Izvedite izraz za relativnu grešku izračunate vrijednosti $fl(f(x))$ u odnosu na egzaktnu vrijednost $f(x)$, te odredite čemu ona teži kada $x \to 0$.

(b) Odredite relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kada $x \to 0$. Je li problem računanja vrijednosti funkcije f u točki x stabilan u relativnom smislu za (po modulu) male vrijednosti od x?

(c) Predložite, ukoliko je to moguće, alternativni izraz za računanje $f(x)$ u aritmetici računala, tako da ono bude stabilno za male vrijednosti od x.

Podsjetnik: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

20. travnja 2021.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U, tako da je $PA = LU$. Koristeći ovu faktorizaciju nađite inverz matrice A. Ako pretpostavimo da sustav $Ax = b$, za neki vektor b, rješavamo na računalu u jednostrukoj preciznosti kod koje je jedinična greška zaokruživanja $u = 5.96 \cdot 10^{-8}$, tada izračunato rješenje $\hat{x}$ zadovoljava $(A + \Delta A)\hat{x} = b$. Izračunajte gornju ogradu na $\|\Delta A\|_\infty$ za ovaj primjer, koju daje Wilkinsonov teorem u obliku $\|\Delta A\|_\infty \leq n^2 \gamma_{3n} \rho_n^{(p)} \|A\|_\infty$ ($\gamma_k = \frac{ku}{1-ku}$). Zatim, tu ogradu iskoristite za dobivanje ograde na relativnu grešku rezultata $\frac{\|\hat{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ primjenom odgovarajućeg rezultata teorije perturbacije za linearne sustave. Navedite i izračunajte sve potrebne veličine koje se koriste u ogradama.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

20. travnja 2021.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & -4 \\ 4 & 8 & -8 & -8 \\ -2 & -8 & 19 & -4 \\ -4 & -8 & -4 & 40 \end{bmatrix}.$$

(a) Dokažite da je A pozitivno-definitna te joj nađite faktorizaciju Choleskog.

(b) Prikažite A u obliku LDL^T gdje je L donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali, a D dijagonalna matrica.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

20. travnja 2021.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{2x-1}$$

interpoliramo na segmentu $[-1, 3]$ po dijelovima linearnom i Besselovom po dijelovima kubičnom interpolacijom na nultočkama Čebiševljevog polinoma $\tilde{T}_n$ neparnog stupnja.

1) Nađite broj čvorova n tako da greška po dijelovima linearne interpolacije na cijelom intervalu ne prelazi $\varepsilon = 10^{-1}$.

2) Zatim za izračunati n odredite pravu grešku Besselove po dijelovima kubične interpolacije (na Čebiševljevoj mreži s n čvorova) u točki $x = 1.5$