JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — ZAVRŠNA PROVJERA ZNANJA

16. lipnja 2020.

Upute: Na pisanoj provjeri znanja je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 22. lipnja 2020., kasno navečer na webu.
Uvidi: utorak, 23. lipnja 2020., u 10:15 sati.

1

ZADATAK 1

($10 + 10 = 20$ bodova.)

(a) Što mjeri uvjetovanost i koja joj je svrha? O čemu ona ovisi? Kako povezuje greške u ulaznim podacima i rezultatu? Koja je posljedica velike uvjetovanosti? Izvedite relativnu uvjetovanost problema računanja funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki x, gdje je f dva puta neprekidno derivabilna oko x. Kako se definira relativna uvjetovanost po komponentama za $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, kod koje svaka komponenta f_k ima neprekidne parcijalne derivacije po svim komponentnim varijablama x_ℓ u točki x, do barem drugog reda?

(b) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\mathrm{rang}(G) = n$. Napišite puni i skraćeni oblik QR faktorizacije matrice G. Napišite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti QR faktorizacije matrice G. Ukratko opišite neku numeričku metodu za računanje QR faktorizacije. Što se može napraviti u slučaju da je $\mathrm{rang}(G) < n$?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja — Zadatak 2

16. lipnja 2020.

(20 bodova.) Zadana je matrica A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A, tj. nađite matrice L i U, tako da je $A = LU$. Zaključite kako bi izgledala gornjetrokutasta matrica U, kad bi matrica A bila proizvoljnog reda n, analogno definirana. Što bi se dogodilo s rezultatom i zašto, kad bismo rješavali sustav s matricom A reda 60, LU faktorizacijom na računalu? Koja karakteristika ove matrice se ističe u tom slučaju?

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — ZAVRŠNA PROVJERA ZNANJA — ZADATAK 3

16. lipnja 2020.

(20 bodova.) U čvorovima x_0, $x_1 = x_0 + 2h$, $x_2 = x_0 + 3h$, uz $h > 0$, zadani su sljedeći podaci o funkciji f

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f'(x_1),\ f(x_2),$$

tj. x_1 je dvostruki čvor. Neka je p_3 polinom stupnja najviše 3, koji interpolira ove zadane podatke.

(a) Ukratko argumentirajte postoji li jedinstveni polinom p_3.

(b) Prvu derivaciju $f'(x_0)$ aproksimiramo prvom derivacijom $p_3'(x_0)$. Nađite ovu aproksimaciju i zapišite ju kao linearnu kombinaciju $f'(x_1)$ i **prvih** podijeljenih razlika funkcije f u **susjednim** čvorovima mreže.

(c) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x.$$

Za početni čvor $x_0 = 0$ i korak $h = \pi/6$, izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3, opisanu aproksimaciju za $f'(x_0)$ i pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja — Zadatak 4

16. lipnja 2020.

$(15 + 10 = 25$ bodova.)

(a) Zadana je funkcija $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definirana s:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0\rangle, \\ 3, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Odredite koeficijente u Fourierovom razvoju funkcije f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

(b) Zadana je $f \in C^1([-\pi, \pi])$, takva da je $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Neka je $S_N(x)$ N-ta parcijalna suma Fourierovog reda

$$S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Uz pretpostavku da za svaki $x \in [-\pi, \pi]$ vrijedi $\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$, dokažite da postoji konstanta $C > 0$, takva da za svaki $x \in [-\pi, \pi]$ vrijedi:

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{N}} \, \|f'\|_2.$$

Uputa. Ako s A_n, B_n označimo Fourierove koeficijente funkcije f', prvo dokažite da za $n \geq 1$ vrijedi $a_n = -B_n/n$ i $b_n = A_n/n$, a zatim iskoristite ove činjenice i ortogonalnost funkcija u razvoju.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja — Zadatak 5

16. lipnja 2020.

(20 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x\, f(x)\, dx \approx w_1 f\left(\frac{1}{5}\right) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1).$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja — Zadatak 6

16. lipnja 2020.

(15 bodova.) Odredite rješenje jednadžbe

$$x^x = 5$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. **Napomene**: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Precizno argumentirajte ocjenu greške.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja

16. lipnja 2020.

Upute: Na pisanoj provjeri znanja je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 22. lipnja 2020., kasno navečer na webu.
Uvidi: utorak, 23. lipnja 2020., u 10:15 sati.

1

Zadatak 1

(10 + 10 = 20 bodova.)

(a) Izvedite grešku interpolacijskog polinoma s čvorovima interpolacije $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, u točki $x \neq x_0, x_1, \ldots, x_n$, preko Newtonovog oblika. Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija f koju se interpolira u čvorovima x_k, a koje uvjete moraju zadovoljiti sami čvorovi? Što trebamo pretpostaviti da prethodni rezultat vrijedi i za čvorove interpolacije? Jesu li interpolacijski polinomi definirani na ekvidistantnoj mreži čvorova uvijek dobri? Navedite primjer. Koja je mreža bolja? Koje svojstvo ima ta mreža?

(b) Izvedite osnovnu Simpsonovu integracijsku formulu. Kojeg je ona stupnja egzaktnosti? Kojeg reda veličine je greška Simpsonove formule? Simpsonova formula se može dobiti na još dva načina. Navedite koji su to.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja — Zadatak 2

16. lipnja 2020.

(20 bodova.) Zadana je matrica A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A, tj. nađite matrice L i U, tako da je $A = LU$. Zaključite kako bi izgledala gornjetrokutasta matrica U, kad bi matrica A bila proizvoljnog reda n, analogno definirana. Što bi se dogodilo s rezultatom i zašto, kad bismo rješavali sustav s matricom A reda 60, LU faktorizacijom na računalu? Koja karakteristika ove matrice se ističe u tom slučaju?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja — Zadatak 3

16. lipnja 2020.

(20 bodova.) U čvorovima x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 3h$, uz $h > 0$, zadani su sljedeći podaci o funkciji f

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f'(x_1),\ f(x_2),$$

tj. x_1 je dvostruki čvor. Neka je p_3 polinom stupnja najviše 3, koji interpolira ove zadane podatke.

(a) Ukratko argumentirajte postoji li jedinstveni polinom p_3.

(b) Prvu derivaciju $f'(x_0)$ aproksimiramo prvom derivacijom $p_3'(x_0)$. Nađite ovu aproksimaciju i zapišite ju kao linearnu kombinaciju $f'(x_1)$ i **prvih** podijeljenih razlika funkcije f u **susjednim** čvorovima mreže.

(c) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x.$$

Za početni čvor $x_0 = 0$ i korak $h = \pi/6$, izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3, opisanu aproksimaciju za $f'(x_0)$ i pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja — Zadatak 4

16. lipnja 2020.

(15 + 10 = 25 bodova.)

(a) Zadana je funkcija $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definirana s:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-\pi, 0\rangle, \\ 4, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Odredite koeficijente u Fourierovom razvoju funkcije f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

(b) Zadana je $f \in C^1([-\pi, \pi])$, takva da je $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Neka je $S_N(x)$ N-ta parcijalna suma Fourierovog reda

$$S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Uz pretpostavku da za svaki $x \in [-\pi, \pi]$ vrijedi $\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$, dokažite da postoji konstanta $C > 0$, takva da za svaki $x \in [-\pi, \pi]$ vrijedi:

$$|f(x) - S_N(x)| \le \frac{C}{\sqrt{N}} \, \|f'\|_2.$$

Uputa. Ako s A_n, B_n označimo Fourierove koeficijente funkcije f', prvo dokažite da za $n \ge 1$ vrijedi $a_n = -B_n/n$ i $b_n = A_n/n$, a zatim iskoristite ove činjenice i ortogonalnost funkcija u razvoju.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja — Zadatak 5

16. lipnja 2020.

(20 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_3 i čvor x_2 u integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^2\, f(x)\, dx \approx w_1 f\left(\frac{1}{4}\right) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1).$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — završna provjera znanja — Zadatak 6

16. lipnja 2020.

(15 bodova.) Odredite rješenje jednadžbe

$$x^x = 6$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. **Napomene**: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Precizno argumentirajte ocjenu greške.