JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

17. lipnja 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 23. lipnja 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 24. lipnja 2019., u 10 sati.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.) Opišite oblik i osnovna svojstva Givensove rotacije reda n u (i, j) ravnini.

(a) Napišite točno kako se definira Givensova rotacija $R(i, j, \varphi)$ i kako ona djeluje na vektor x, množenjem slijeva.

(b) Koliko komponenti vektora može poništiti Givensova rotacija?

(c) Navedite kako se računa kut rotacije φ, iz uvjeta da je $x'(j) = 0$, za $x' = R(i, j, \varphi)x$.

(d) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(G) = n$. Opišite kako se primjenom ravninskih rotacija računa QR faktorizacija matrice G — svođenje matrice G na trokutasti oblik i računanje matrice Q.

(e) Opišite paralelno poništavanje elemenata pomoću Givensovih rotacija. Zašto je taj poredak pogodan?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

17. lipnja 2019.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = p|x| - 2$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$, gdje je $p \in \mathbb{R}$ zadani realni parametar. Nađite koeficijente u Fourierovom razvoju funkcije f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Konvergira li Fourierov red prema $f(x)$, za svaki $x \in [-\pi, \pi]$? Argumentirajte odgovor.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

17. lipnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-3}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε. Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

17. lipnja 2019.

(15 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_2' i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f(5/7) + w_2 f(x_2) + w_2' f'(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Čvor x_2 mora biti unutar intervala $[0,1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^2\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

Može li se ova integracijska formula dobiti interpolacijski, tj. kao integral nekog interpolacijskog polinoma za funkciju f? Ako može, koji su uvjeti interpolacije i kako se bira čvor x_2?

Uputa za oba dijela zadatka: Razmislite što bi bio polinom čvorova za ovu integracijsku formulu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

17. lipnja 2019.

($8 + 7 = 15$ bodova.)

(a) Odredite sva realna rješenja jednadžbe
$$e^{2x} = \frac{3}{2} + \sin(x),$$
s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.
Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju rješenja i ocjenu greške!

(b) Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadan je sa:
$$x_0 = a,$$
$$x_{n+1} - x_n = 2 \cdot e^{-x_n} - 1, \quad n \geq 0.$$
Dokažite da niz konvergira i odredite mu limes.
Uputa: Iskoristite teorem koji garantira postojanje rješenja za neku od iterativnih metoda.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

17. lipnja 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 23. lipnja 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 24. lipnja 2019., u 10 sati.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.) Opišite posljedice Christoffel–Darbouxovog identiteta.

(a) Neka je $x \neq y$ i neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Kako točno glasi Christoffel–Darbouxov identitet u tom slučaju?

(b) Kako glasi Christoffel–Darbouxov identitet u jednoj točki x i kako ga dobivamo iz prethodnog slučaja?

(c) Neka je

$$\tilde{z}(x) = \left[\frac{p_0(x)}{\|p_0\|}, \ldots, \frac{p_{n-1}(x)}{\|p_{n-1}\|} \right]^T \in \mathbb{R}^n,$$

vektor vrijednosti normaliziranih polinoma u točki x i neka je Z_n matrica reda n sa stupcima $\tilde{z}(x_1), \ldots, \tilde{z}(x_n)$, gdje su $x_1, \ldots, x_n$ sve nultočke polinoma p_n. Što možemo zaključiti o stupcima te matrice temeljem Christoffel–Darbouxovog identiteta? Dokažite to.

(d) Kako iz matrice Z_n možemo zaključiti da polinomi $p_0, \ldots, p_{n-1}$ zadovoljavaju relacije diskretne ortogonalnosti, i u kojim točkama?

(e) Kako se stupci matrice Z_n koriste kod Gaussovih integracijskih formula?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

17. lipnja 2019.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = px^2 - 3$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$, gdje je $p \in \mathbb{R}$ zadani realni parametar. Nađite koeficijente u Fourierovom razvoju funkcije f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Konvergira li Fourierov red prema $f(x)$, za svaki $x \in [-\pi, \pi]$? Argumentirajte odgovor.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

17. lipnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-3}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε. Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

17. lipnja 2019.

(15 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_2' i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f(3/5) + w_2 f(x_2) + w_2' f'(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Čvor x_2 mora biti unutar intervala $[0,1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

Može li se ova integracijska formula dobiti interpolacijski, tj. kao integral nekog interpolacijskog polinoma za funkciju f? Ako može, koji su uvjeti interpolacije i kako se bira čvor x_2?

Uputa za oba dijela zadatka: Razmislite što bi bio polinom čvorova za ovu integracijsku formulu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

17. lipnja 2019.

$(8 + 7 = 15$ bodova.)

(a) Odredite sva realna rješenja jednadžbe

$$e^{3x} = 3 + \sin(x),$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.
Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju rješenja i ocjenu greške!

(b) Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadan je sa:

$$x_0 = a,$$
$$x_{n+1} - x_n = 3 \cdot e^{-x_n} - 1, \quad n \geq 0.$$

Dokažite da niz konvergira i odredite mu limes.
Uputa: Iskoristite teorem koji garantira postojanje rješenja za neku od iterativnih metoda.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

17. lipnja 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 23. lipnja 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 24. lipnja 2019., u 10 sati.

1

Zadatak 1

(15 bodova.) Opišite produljene Newton–Cotesove integracijske formule.

(a) Kako definiramo produljene Newton–Cotesove formule i kako ih možemo interpretirati u odnosu na interpolaciju?

(b) Izvedite produljenu trapeznu formulu i sve parametre dobro objasnite.

(c) Izvedite grešku produljene trapezne formule i sve parametre dobro objasnite. Koja glatkoća podintegralne funkcije je potrebna za njezin izvod?

(d) Izvedite izraz za broj podintervala koji je potreban da se postigne zadana točnost aproksimacije integrala.

(e) Kako glasi teorem o grešci produljene trapezne formule, primijenjene na trigonometrijske polinome?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

17. lipnja 2019.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = 2|x| - p$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$, gdje je $p \in \mathbb{R}$ zadani realni parametar. Nađite koeficijente u Fourierovom razvoju funkcije f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Konvergira li Fourierov red prema $f(x)$, za svaki $x \in [-\pi, \pi]$? Argumentirajte odgovor.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

17. lipnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε. Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

17. lipnja 2019.

(15 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_2' i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f(2/7) + w_2 f(x_2) + w_2' f'(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Čvor x_2 mora biti unutar intervala $[0,1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

Može li se ova integracijska formula dobiti interpolacijski, tj. kao integral nekog interpolacijskog polinoma za funkciju f? Ako može, koji su uvjeti interpolacije i kako se bira čvor x_2?

Uputa za oba dijela zadatka: Razmislite što bi bio polinom čvorova za ovu integracijsku formulu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

17. lipnja 2019.

($8 + 7 = 15$ bodova.)

(a) Odredite sva realna rješenja jednadžbe

$$e^{4x} = 4 + \sin(x),$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.
Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju rješenja i ocjenu greške!

(b) Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadan je sa:

$$x_0 = a,$$
$$x_{n+1} - x_n = 4 \cdot e^{-x_n} - 1, \quad n \geq 0.$$

Dokažite da niz konvergira i odredite mu limes.
Uputa: Iskoristite teorem koji garantira postojanje rješenja za neku od iterativnih metoda.

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

17. lipnja 2019.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Obavezno predajte **sve** papire sa zadacima, čak i ako neke zadatke niste rješavali. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 23. lipnja 2019., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 24. lipnja 2019., u 10 sati.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.) Opišite metodu pogrešnog položaja (regula falsi).

(a) Definirajte pojam reda konvergencije niza iteracija $(x_n \in \mathbb{R} \mid n \geq 0)$, koji konvergira prema broju α (nultočki neke funkcije f).

(b) Koje su startne pretpostavke za početak metode regula falsi i koje je njihovo značenje?

(c) Koja je osnovna ideja metode regula falsi?

(d) Kako glasi formula za novu aproksimaciju nultočke iz početnog intervala?

(e) Uz pretpostavku da prva derivacija f' i druga derivacija f'' imaju konstantan predznak na promatranom intervalu $[a, b]$, izvedite red konvergencije metode regula falsi. Koja je posljedica izbora predznaka derivacija na izbor intervala u iteracijama?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

17. lipnja 2019.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = 3x^2 - p$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$, gdje je $p \in \mathbb{R}$ zadani realni parametar. Nađite koeficijente u Fourierovom razvoju funkcije f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Konvergira li Fourierov red prema $f(x)$, za svaki $x \in [-\pi, \pi]$? Argumentirajte odgovor.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

17. lipnja 2019.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-x} \cos x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε. Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

17. lipnja 2019.

(15 bodova.) Odredite težine w_1, w_2, w_2' i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f(2/5) + w_2 f(x_2) + w_2' f'(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Čvor x_2 mora biti unutar intervala $[0,1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule? Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^2\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

Može li se ova integracijska formula dobiti interpolacijski, tj. kao integral nekog interpolacijskog polinoma za funkciju f? Ako može, koji su uvjeti interpolacije i kako se bira čvor x_2?

Uputa za oba dijela zadatka: Razmislite što bi bio polinom čvorova za ovu integracijsku formulu.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

17. lipnja 2019.

(8 + 7 = 15 bodova.)

(a) Odredite sva realna rješenja jednadžbe
$$e^{5x} = 7 + \sin(x),$$
s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.
Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2. Detaljno obrazložite sve tvrdnje vezane za lokaciju rješenja i ocjenu greške!

(b) Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadan je sa:
$$x_0 = a,$$
$$x_{n+1} - x_n = 5 \cdot e^{-x_n} - 1, \quad n \geq 0.$$
Dokažite da niz konvergira i odredite mu limes.
Uputa: Iskoristite teorem koji garantira postojanje rješenja za neku od iterativnih metoda.