JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

24. travnja 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 1. svibnja 2017., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: utorak, 2. svibnja 2017., u 11 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Objasnite širenje grešaka operanada u **egzaktnoj** aritmetici kod operacije **zbrajanja**.

(a) Kako su prikazane greške u operandima i koju vrstu grešaka one predstavljaju?

(b) Izvedite grešku za zbroj, izraženu preko grešaka operanada.

(c) Objasnite kada je zbrajanje bezopasno i koja je ocjena greške u tom slučaju.

(d) Objasnite kada je zbrajanje katastrofalno loše i što se u tom slučaju događa.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = 1 - \sqrt{1 - x}, \quad x \in [0, 1].$$

Objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po **ovoj** formuli u aritmetici računala, za vrlo male vrijednosti x.

(a) Izračunajte relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kad $x \to 0$. Iz toga izvedite zaključak je li računanje $f(x)$ stabilno u relativnom smislu, za male vrijednosti x.

(b) Ako je to potrebno i moguće, preuredite izraz za $f(x)$ tako da računanje u aritmetici računala bude stabilno za male x.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ x & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

gdje je x realni parametar. U ovisnosti o parametru x, izračunajte LR faktorizacije matrice A

(a) bez pivotiranja, tj. nađite matrice L i R takve da je $A = LR$,

(b) korištenjem parcijalnog pivotiranja, uz pretpostavku da je $|x| > 1$, tj. nađite matrice P, L i R takve da je $PA = LR$.

Nađite sve vrijednosti parametra x za koje postoji jedinstvena faktorizacija (a), odnosno, (b). Za koje x je A regularna matrica?

Izračunajte omjer elemenata na mjestu $(3, 3)$ u matricama: (a) $|L| \cdot |R|$ i $|A|$, odnosno, (b) $|L| \cdot |R|$ i $|PA|$. Koliko veliki mogu biti ovi omjeri u ovisnosti o $|x|$?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 6 \\ -2 & 10 & -6 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -7 \\ 6 & 3 & -7 & 26 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 46 \\ -37 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = e^{x/2}$$

aproksimiramo na intervalu $[-1/2, 0]$ na dva načina: interpolacijskim polinomom p na Čebiševljevoj mreži s $n_1 + 1$ čvorova na zadanom intervalu, te po dijelovima linearnom interpolacijom na ekvidistantnoj mreži s n_2 podintervala.

Nađite n_1 i n_2 tako da greška aproksimacije na cijelom zadanom intervalu ne prelazi 10^{-3}.

Nađite aproksimacije u točki $c = -0.1$ za obje interpolacije, te pripadne prave pogreške.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

24. travnja 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 1. svibnja 2017., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: utorak, 2. svibnja 2017., u 11 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Izračunajte ocjenu koliko se najviše promijenilo rješenje linearnog sustava $Ax = b$, ako

(a) perturbiramo samo b,

(b) perturbiramo samo A?

(c) Koju veličinu nalazimo u obje ocjene greške?

(d) Navedite rezultat Wilkinsonovog teorema o povratnoj grešci matrice A, kada se sustav rješava Gaussovim eliminacijama s parcijalnim pivotiranjem u aritmetici računala, tj. ocjenu na ΔA, pri čemu za izračunato rješenje y vrijedi $(A + \Delta A)y = b$.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1, \quad x \in [0,1].$$

Objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po **ovoj** formuli u aritmetici računala, za vrlo male vrijednosti x.

(a) Izračunajte relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kad $x \to 0$. Iz toga izvedite zaključak je li računanje $f(x)$ stabilno u relativnom smislu, za male vrijednosti x.

(b) Ako je to potrebno i moguće, preuredite izraz za $f(x)$ tako da računanje u aritmetici računala bude stabilno za male x.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ x & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

gdje je x realni parametar. U ovisnosti o parametru x, izračunajte LR faktorizacije matrice A

(a) bez pivotiranja, tj. nađite matrice L i R takve da je $A = LR$,

(b) korištenjem parcijalnog pivotiranja, uz pretpostavku da je $|x| > 1$, tj. nađite matrice P, L i R takve da je $PA = LR$.

Nađite sve vrijednosti parametra x za koje postoji jedinstvena faktorizacija (a), odnosno, (b). Za koje x je A regularna matrica?

Izračunajte omjer elemenata na mjestu $(3, 3)$ u matricama: (a) $|L| \cdot |R|$ i $|A|$, odnosno, (b) $|L| \cdot |R|$ i $|PA|$. Koliko veliki mogu biti ovi omjeri u ovisnosti o $|x|$?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -6 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & -4 \\ -6 & -2 & 14 & -5 \\ 0 & -4 & -5 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 33 \\ 6 \\ -54 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = e^{(x+2)/2}$$

aproksimiramo na intervalu $[-5/2, -2]$ na dva načina: interpolacijskim polinomom p na Čebiševljevoj mreži s $n_1 + 1$ čvorova na zadanom intervalu, te po dijelovima linearnom interpolacijom na ekvidistantnoj mreži s n_2 podintervala.

Nađite n_1 i n_2 tako da greška aproksimacije na cijelom zadanom intervalu ne prelazi 10^{-3}.

Nađite aproksimacije u točki $c = -2.1$ za obje interpolacije, te pripadne prave pogreške.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

24. travnja 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 1. svibnja 2017., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: utorak, 2. svibnja 2017., u 11 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Zadane su točke (x_k, f_k), za $k = 0, \ldots, n$.

(a) Navedite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti interpolacijskog polinoma za zadane točke.

(b) Je li izbor baze $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ dobar za rješavanje ovog problema? Kakva je matrica pripadnog linearnog sustava i koja su njezina svojstva?

(c) Koje dvije baze polinoma smo još koristili za rješavanje ovog problema i kako izgledaju matrice pripadnih linearnih sustava? Za koju svrhu se pojedine baze koriste?

(d) Napišite uvjete i iskaze teorema o ocjeni greške interpolacijskog polinoma, izražene na dva načina preko spomenutih baza.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1, \quad x \in [0,1].$$

Objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po **ovoj** formuli u aritmetici računala, za vrlo male vrijednosti x.

(a) Izračunajte relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kad $x \to 0$. Iz toga izvedite zaključak je li računanje $f(x)$ stabilno u relativnom smislu, za male vrijednosti x.

(b) Ako je to potrebno i moguće, preuredite izraz za $f(x)$ tako da računanje u aritmetici računala bude stabilno za male x.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ x & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

gdje je x realni parametar. U ovisnosti o parametru x, izračunajte LR faktorizacije matrice A

(a) bez pivotiranja, tj. nađite matrice L i R takve da je $A = LR$,

(b) korištenjem parcijalnog pivotiranja, uz pretpostavku da je $|x| > 1$, tj. nađite matrice P, L i R takve da je $PA = LR$.

Nađite sve vrijednosti parametra x za koje postoji jedinstvena faktorizacija (a), odnosno, (b). Za koje x je A regularna matrica?

Izračunajte omjer elemenata na mjestu $(3,3)$ u matricama: (a) $|L| \cdot |R|$ i $|A|$, odnosno, (b) $|L| \cdot |R|$ i $|PA|$. Koliko veliki mogu biti ovi omjeri u ovisnosti o $|x|$?

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 9 & -9 & 3 \\ -6 & -9 & 19 & -11 \\ 4 & 3 & -11 & 13 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 45 \\ -83 \\ 63 \end{bmatrix}.$$

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = e^{x/4}$$

aproksimiramo na intervalu $[-1, 0]$ na dva načina: interpolacijskim polinomom p na Čebiševljevoj mreži s $n_1 + 1$ čvorova na zadanom intervalu, te po dijelovima linearnom interpolacijom na ekvidistantnoj mreži s n_2 podintervala.

Nađite n_1 i n_2 tako da greška aproksimacije na cijelom zadanom intervalu ne prelazi 10^{-3}.

Nađite aproksimacije u točki $c = -0.1$ za obje interpolacije, te pripadne prave pogreške.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

24. travnja 2017.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi i funkcije), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, rezultati **bez odgovarajuće ocjene pogreške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 1. svibnja 2017., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: utorak, 2. svibnja 2017., u 11 sati.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **po dijelovima kubične Hermiteove** interpolacije φ za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte je li ova interpolacija lokalna ili ne.

(c) Izvedite grešku po dijelovima kubične Hermiteove interpolacije preko greške za Hermiteovu kubičnu interpolaciju. Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju po dijelovima kubične Hermiteove interpolacije prema funkciji f?

(d) Kojeg su reda konvergencije za funkcijsku vrijednost i sve derivacije koje imaju smisla?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Objasnite što će se dogoditi ako računamo $f(x)$ po **ovoj** formuli u aritmetici računala, za vrlo male vrijednosti x.

(a) Izračunajte relativnu uvjetovanost funkcije f u točki x i nađite kako se ona ponaša kad $x \to 0$. Iz toga izvedite zaključak je li računanje $f(x)$ stabilno u relativnom smislu, za male vrijednosti x.

(b) Ako je to potrebno i moguće, preuredite izraz za $f(x)$ tako da računanje u aritmetici računala bude stabilno za male x.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ x & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

gdje je x realni parametar. U ovisnosti o parametru x, izračunajte LR faktorizacije matrice A

(a) bez pivotiranja, tj. nađite matrice L i R takve da je $A = LR$,

(b) korištenjem parcijalnog pivotiranja, uz pretpostavku da je $|x| > 1$, tj. nađite matrice P, L i R takve da je $PA = LR$.

Nađite sve vrijednosti parametra x za koje postoji jedinstvena faktorizacija (a), odnosno, (b). Za koje x je A regularna matrica?

Izračunajte omjer elemenata na mjestu $(3,3)$ u matricama: (a) $|L| \cdot |R|$ i $|A|$, odnosno, (b) $|L| \cdot |R|$ i $|PA|$. Koliko veliki mogu biti ovi omjeri u ovisnosti o $|x|$?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ -3 & -2 & 6 & 6 \\ 6 & -4 & 6 & 18 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ -12 \\ -6 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

24. travnja 2017.

(10 bodova.) Funkciju

$$f(x) = e^{(x-1)/2}$$

aproksimiramo na intervalu $[1/2, 1]$ na dva načina: interpolacijskim polinomom p na Čebiševljevoj mreži s $n_1 + 1$ čvorova na zadanom intervalu, te po dijelovima linearnom interpolacijom na ekvidistantnoj mreži s n_2 podintervala.

Nađite n_1 i n_2 tako da greška aproksimacije na cijelom zadanom intervalu ne prelazi 10^{-3}.

Nađite aproksimacije u točki $c = 0.9$ za obje interpolacije, te pripadne prave pogreške.