

## NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

1. rujna 2016.

**Upute:** Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

**Rezultati:** petak, 2. rujna 2016., rano ujutro na webu.

**Uvid u kolokvije:** petak, 2. rujna 2016., u 11 sati.

## ZADATAK 1

1

(10 + 10 = 20 bodova.)

- (a) Iskažite teorem o jedinstvenosti i egzistenciji  $LR$  faktorizacije. Kada za matricu  $A$  kažemo da je pozitivno definitna? Izvedite kriterij za provjeru pozitivne definitnosti matrice  $A$ , korištenjem  $LR$  faktorizacije.
- (b) Neka je  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  zadana mreža čvorova i neka je funkcija  $f$  zadana na intervalu  $[x_0, x_n]$ .
- Napišite definiciju **kubične splajn** interpolacije za funkciju  $f$  na zadanoj mreži. Koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava ova interpolacija?
  - Ukratko komentirajte i argumentirajte je li ova interpolacija lokalna.
  - Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo uniformnu konvergenciju ove interpolacije prema funkciji  $f$ ? Kojeg je reda ta konvergencija i o čemu to ovisi?

## NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

1. rujna 2016.

(15 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav  $Ax = b$ , gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 & -3 \\ 12 & 17 & 22 & -2 \\ 15 & 22 & 33 & 11 \\ -3 & -2 & 11 & 42 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -15 \\ -19 \\ -7 \\ 57 \end{bmatrix}.$$

## NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

1. rujna 2016.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x, \quad x \geq 0,$$

i tražena točnost  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Funkciju  $f$  interpoliramo po dijelovima linearnom funkcijom na intervalu  $[0, \pi/2]$ , na sljedeći način. Početni čvor je  $x_0 = 0$ . Svaki sljedeći čvor  $x_i$  nalazimo iz prethodnog čvora  $x_{i-1}$ , tako da je  $x_i > x_{i-1}$ , i da  $x_i$  bude maksimalno udaljen od  $x_{i-1}$ , koliko to dozvoljava ocjena (uniformne) pogreške za linearnu interpolaciju na intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$ , uz zadanu točnost  $\varepsilon$ . Postupak ponavljamo sve dok ne dobijemo  $x_i \geq \pi/2$ .

Nađite sve potrebne čvorove i izračunajte maksimalnu pravu grešku pripadne, po dijelovima linearne, interpolacije na  $[0, \pi/2]$ .

## NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

1. rujna 2016.

(20 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^2 - 4$$

na intervalu  $[-1, 1]$ . Za bilo koji  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite najbolju aproksimaciju funkcije  $f$  u vektorskom prostoru  $\mathcal{T}_n$  trigonometrijskih “polinoma”, periodičnih na intervalu  $[-1, 1]$ . Navedite funkcije baze u tom prostoru i njegovu dimenziju. Ovisi li koeficijenti u dobivenoj aproksimaciji o parametru  $n$  (odnosno, o dimenziji prostora  $\mathcal{T}_n$ )? Argumentirajte odgovor!

## NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

1. rujna 2016.

(15 bodova.) Odredite težine  $w_1$ ,  $w_1'$ ,  $w_2$  i čvor  $x_2$  u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x) dx \approx w_1 f(0) + w_1' f'(0) + w_2 f(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^{\pi/2} \sin t dt$$

i nađite pravu grešku.

## NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

1. rujna 2016.

(20 bodova.) Zadan je realni broj  $a > 0$ . Za računanje njegove recipročne vrijednosti  $1/a$  koristimo Newtonovu metodu za numeričko rješavanje jednadžbe

$$\frac{1}{x} - a = 0,$$

s početnom točkom  $x_0 = 1$ .

- (a) Dokažite da Newtonova metoda s početnom iteracijom  $x_0 = 1$  konvergira prema pravom rješenju, ako i samo ako je  $a < 2$ . Što se događa za  $a \geq 2$ ?
- (b) Izračunajte rješenje za  $a = 3/2$ , s točnošću  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

**Napomena:** Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške.