JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij

20. lipnja 2016.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

**Rezultati**: nedjelja, 26. lipnja 2016., kasno navečer na webu.
**Uvid u kolokvije**: ponedjeljak, 27. lipnja 2016., u 10 sati.

1

## Zadatak 1

(15 bodova.) Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ niz **moničnih** ortogonalnih polinoma (vodeći koeficijent svakog polinoma je jednak 1), obzirom na integralni skalarni produkt, definiran težinskom funkcijom $w \geq 0$, na intervalu $[a, b]$.

(a) Napišite definiciju tog skalarnog produkta $\langle \ , \ \rangle$.

(b) Kako izgleda tročlana rekurzija za polinome $p_n$? Izvedite relacije za koeficijente u toj rekurziji, u terminima pripadnog skalarnog produkta $\langle \ , \ \rangle$.

(c) Što se zna o nultočkama ortogonalnog polinoma $p_n$, stupnja $n$? Iskažite odgovarajući teorem.

(d) Ovaj niz polinoma zadovoljava i tzv. diskretnu ortogonalnost. Ukratko objasnite što to znači.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

20. lipnja 2016.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Zadana je funkcija
$$f(x) = 2x^p + 1$$
na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p \geq 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata, s težinskom funkcijom $w(x) = 1$, nađite funkciju oblika
$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$
koja aproksimira funkciju $f$ na zadanom intervalu. Izračunajte pripadnu grešku u smislu metode najmanjih kvadrata (pripadni $S$). Za koje vrijednosti parametra $p$ je ta greška $S$ jednaka nuli?

(b) Napišite opći oblik i osnovna svojstva Householderovog reflektora reda $n$. Ukratko opišite kako se primjenom reflektora računa QR faktorizacija pravokutne matrice $G$, punog ranga po stupcima — svođenje matrice $G$ na trokutasti oblik i računanje matrice $Q$.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

20. lipnja 2016.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (2x+1)\sin x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala $n_T$ i $n_S$ za garantiranu točnost $\varepsilon$ u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću $\varepsilon$. Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

**Napomena**: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

20. lipnja 2016.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite težine $w_1$, $w_2$ i čvor $x_2$ u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{1/4} f(x)\,dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_1 f(1),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Težine za rubne čvorove su iste, a čvor $x_2$ mora pripadati segmentu $[0,1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/4}$ i nađite pravu grešku.

(b) Što vrijedi za težinske koeficijente u Newton–Cotesovim (ili interpolacijskim) integracijskim formulama, a što u Gaussovim integracijskim formulama? Ima li to neke veze s konvergencijom odgovarajućih formula i što se zna o konvergenciji?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

20. lipnja 2016.

(10 bodova.) Odredite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$e^x = \frac{1}{x-5} + x + 4,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

**Napomene**: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

# NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

20. lipnja 2016.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

**Rezultati**: nedjelja, 26. lipnja 2016., kasno navečer na webu.
**Uvid u kolokvije**: ponedjeljak, 27. lipnja 2016., u 10 sati.

1

## ZADATAK 1

(15 bodova.) Promatramo metodu **jednostavne** iteracije za nalaženje fiksnih točaka zadane funkcije $\varphi$ na intervalu $[a, b]$.

(a) Definirajte što je fiksna točka funkcije $\varphi$ i iskažite teorem o konvergenciji niza jednostavnih iteracija prema fiksnoj točki funkcije, za neprekidnu funkciju $\varphi$.

(b) Definirajte pojam reda konvergencije niza iteracija. Koliki je (najmanji) red konvergencije niza jednostavnih iteracija, uz pretpostavke iz prethodnog teorema?

(c) Sasvim općenito, mora li metoda jednostavne iteracije uvijek lokalno konvergirati prema fiksnoj točki? Ako metoda konvergira, može li red konvergencije biti i veći od onog najmanjeg, iz prethodnog teorema?

(d) Kako se metoda jednostavne iteracije koristi za nalaženje nultočaka funkcije $f$ na intervalu $[a, b]$? Napišite iteracijsku funkciju za Newtonovu metodu.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

20. lipnja 2016.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Zadana je funkcija

$$f(x) = 2x^p + x$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p \geq 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata, s težinskom funkcijom $w(x) = 1$, nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju $f$ na zadanom intervalu. Izračunajte pripadnu grešku u smislu metode najmanjih kvadrata (pripadni $S$). Za koje vrijednosti parametra $p$ je ta greška $S$ jednaka nuli?

(b) Neka je $A$ pravokutna matrica, punog ranga po stupcima, i neka je $b$ zadani vektor. Napišite pripadnu matričnu formulaciju problema najmanjih kvadrata. Napišite iskaz teorema o karakterizaciji rješenja problema najmanjih kvadrata preko sustava normalnih jednadžbi i njegovu geometrijsku interpretaciju.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

20. lipnja 2016.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (2x+1)\cos x\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala $n_T$ i $n_S$ za garantiranu točnost $\varepsilon$ u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću $\varepsilon$. Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

**Napomena**: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

20. lipnja 2016.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite težine $w_1$, $w_2$ i čvor $x_2$ u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{-1/2} f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_1 f(1),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Težine za rubne čvorove su iste, a čvor $x_2$ mora pripadati segmentu $[0, 1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

(b) Što su Gauss–Radauove integracijske formule i koji je njihov stupanj polinomne egzaktnosti? Što vrijedi za čvorove u ovim formulama i što zadovoljava pripadni polinom čvorova? Što vrijedi za težinske koeficijente?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

20. lipnja 2016.

(10 bodova.) Odredite najveće negativno rješenje jednadžbe

$$e^{-x} = \frac{-1}{x+5} - x + 4,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

**Napomene**: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

# NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

20. lipnja 2016.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

**Rezultati**: nedjelja, 26. lipnja 2016., kasno navečer na webu.
**Uvid u kolokvije**: ponedjeljak, 27. lipnja 2016., u 10 sati.

1

## ZADATAK 1

(15 bodova.) Promatramo **Newtonovu** metodu za nalaženje nultočaka zadane funkcije $f$ na intervalu $[a, b]$.

(a) Kako se računaju iteracije i uz koje uvjete su dobro definirane?

(b) Napišite iskaz teorema o globalnoj konvergenciji Newtonove metode za nalaženje nultočaka funkcije $f$ u $[a, b]$. Koliko nultočaka tada ima $f$ u $[a, b]$?

(c) Kako treba izabrati startnu točku za iteracije Newtonovom metodom i koja je geometrijska interpretacija tog izbora? Ukratko komentirajte što se može dogoditi ako pogrešno izaberemo startnu točku.

(d) Definirajte pojam reda konvergencije niza iteracija. Ako Newtonova metoda konvergira, koliki je (najmanji) red konvergencije metode u okolini jednostruke, odnosno, višestruke nultočke (samo navedite, ne treba dokazivati)?

JMBAG

IME I PREZIME

# NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

20. lipnja 2016.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p + 2$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p \geq 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata, s težinskom funkcijom $w(x) = 1$, nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

koja aproksimira funkciju $f$ na zadanom intervalu. Izračunajte pripadnu grešku u smislu metode najmanjih kvadrata (pripadni $S$). Za koje vrijednosti parametra $p$ je ta greška $S$ jednaka nuli?

(b) Neka je $G$ pravokutna matrica, punog ranga po stupcima. Napišite puni i skraćeni oblik QR faktorizacije matrice $G$. Napišite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti QR faktorizacije matrice $G$.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

20. lipnja 2016.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (3x+2)\sin x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala $n_T$ i $n_S$ za garantiranu točnost $\varepsilon$ u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću $\varepsilon$. Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

**Napomena**: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

20. lipnja 2016.

$(10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite težine $w_1$, $w_2$ i čvor $x_2$ u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{-1/4} f(x)\,dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_1 f(1),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Težine za rubne čvorove su iste, a čvor $x_2$ mora pripadati segmentu $[0, 1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{5/4}$ i nađite pravu grešku.

(b) Što su Gaussove integracijske formule i koji je njihov stupanj polinomne egzaktnosti? Što vrijedi za čvorove u ovim formulama i što zadovoljava pripadni polinom čvorova? Što vrijedi za težinske koeficijente?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

20. lipnja 2016.

(10 bodova.) Odredite najveće rješenje jednadžbe

$$e^{-2x} = \frac{-1}{x-1} - x + 2,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

**Napomene**: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij

20. lipnja 2016.

**Upute**: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

**Rezultati**: nedjelja, 26. lipnja 2016., kasno navečer na webu.
**Uvid u kolokvije**: ponedjeljak, 27. lipnja 2016., u 10 sati.

1

## Zadatak 1

(15 bodova.) Opća težinska **integracijska** formula ima oblik

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

gdje su $x_k$ čvorovi integracije, a $w_k$ su težinski koeficijenti.

(a) Napišite definiciju polinomnog stupnja egzaktnosti $d$ ovakve integracijske formule.

(b) Napišite iskaz teorema o karakterizaciji tzv. “interpolacijskih” integracijskih formula, kad je $d \geq m$ (kao kod Newton–Cotesovih formula, **ne** zahtijeva se $d > m$, osim ako to “slučajno” vrijedi zbog simetrije).

(c) Što vrijedi za težinske koeficijente $w_k$ u interpolacijskim integracijskim formulama? Jesu li ti koeficijenti uvijek pozitivni?

(d) Moraju li takve integracijske formule konvergirati prema egzaktnom integralu funkcije $f$, kad $m \to \infty$?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

20. lipnja 2016.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Zadana je funkcija
$$f(x) = x^p + 2x$$
na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p \geq 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata, s težinskom funkcijom $w(x) = 1$, nađite funkciju oblika
$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$
koja aproksimira funkciju $f$ na zadanom intervalu. Izračunajte pripadnu grešku u smislu metode najmanjih kvadrata (pripadni $S$). Za koje vrijednosti parametra $p$ je ta greška $S$ jednaka nuli?

(b) Napišite opći oblik i osnovna svojstva Givensove rotacije u ravnini. Kako izgleda matrica rotacije reda $n$ u $(i, j)$ ravnini? Ukratko opišite kako se primjenom rotacija računa QR faktorizacija pravokutne matrice $G$, punog ranga po stupcima — svođenje matrice $G$ na trokutasti oblik i računanje matrice $Q$.

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

20. lipnja 2016.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (3x+2)\cos x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala $n_T$ i $n_S$ za garantiranu točnost $\varepsilon$ u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću $\varepsilon$. Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

**Napomena**: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

20. lipnja 2016.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite težine $w_1$, $w_2$ i čvor $x_2$ u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{1/2}\, f(x)\, dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_1 f(1),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Težine za rubne čvorove su iste, a čvor $x_2$ mora pripadati segmentu $[0, 1]$. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{1/2}$ i nađite pravu grešku.

(b) Što su Gauss–Lobattove integracijske formule i koji je njihov stupanj polinomne egzaktnosti? Što vrijedi za čvorove u ovim formulama i što zadovoljava pripadni polinom čvorova? Što vrijedi za težinske koeficijente?

JMBAG

IME I PREZIME

# Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

20. lipnja 2016.

(10 bodova.) Odredite najmanje rješenje jednadžbe

$$e^{2x} = \frac{1}{x-3} - x + 2,$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

**Napomene**: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!