

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

3. rujna 2015.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 7. rujna 2015., kasno navečer na webu.

Uvid u kolokvije: utorak, 8. rujna 2015., u 11 sati.

ZADATAK 1

1

(10 + 10 = 20 bodova.)

- (a) Napišite definiciju (stroge) dijagonalne dominantnosti po stupcima za kvadratnu matricu A , reda n . Što vrijedi za takve matrice u Gausovim eliminacijama bez pivotiranja i je li potrebno parcijalno pivotiranje? Obrazložite ili dokažite tvrdnje.
- (b) Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ niz moničnih ortogonalnih polinoma obzirom na neki skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (“monični” znači da je vodeći koeficijent svakog polinoma jednak 1). Kako izgleda tročlana rekurzija za polinome p_n ? Izvedite relacije za koeficijente u toj rekurziji, u terminima pripadnog skalarnog produkta? Obrazložite zašto je rekurzija tročlana, tj. zašto nema “nižih” članova.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

3. rujna 2015.

(15 bodova.) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & x & 0 \\ 0 & x & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

3. rujna 2015.

(15 + 5 = 20 bodova.)

- (a) Zadane podatke (x_i, f_i) , za $i = 0, \dots, n$, gdje su x_i međusobno različiti čvorovi, interpoliramo polinomom. Što je Newtonova baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n ? Kako izgleda pripadna matrica linearnog sustava za problem interpolacije? Što su koeficijenti interpolacijskog polinoma zapisanog u Newtonovoj bazi i kako ih možemo efikasno računati? Koliko je aritmetičkih operacija potrebno za nalaženje svih koeficijenata, a koliko za računanje vrijednosti interpolacijskog polinoma u nekoj točki? Dovoljno je navesti samo red veličine, a ne točan broj.
- (b) Što su “nije čvor” (“not-a-knot”) rubni uvjeti za kubičnu splajn interpolaciju? Uz te rubne uvjete, nađite kubični splajn s koji interpolira sljedeći skup podataka (točaka)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline f_i & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} .$$

Opravdajte postupak kojim računate traženi splajn. Izračunajte vrijednost tog splajna u točki $x = 3$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

3. rujna 2015.

(15 bodova.) Bačve za odlaganje otrovnih tvari imaju oblik valjka, kojemu je visina 3 puta veća od polumjera baze. Poduzeće formira cijenu bačve prema njezinom volumenu. Za bačve odgovarajućih polumjera baze, cijene su sljedeće

polumjer u dm	1.5	2.0	2.5	3.5
cijena u kn	20	47	93	251

Napišite oblik funkcije $\varphi(x)$ za cijenu bačve, pri čemu je x polumjer njezine baze. Metodom najmanjih kvadrata odredite parametre te funkcije za zadane podatke. Dobivenom funkcijom φ odredite cijenu bačve polumjera 3.0 dm.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

3. rujna 2015.

(20 bodova.) Odredite čvor x_0 i težinu w_0 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_0^1 x^{-1/4} f(x) dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvorove x_1, x_2 i težine w_1, w_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 2

$$\int_0^1 x^{-1/4} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula? Za funkciju $f(x) = x^5$, izračunajte ocjenu greške ovih formula, pripadne približne vrijednosti integrala i prave greške.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

3. rujna 2015.

(15 bodova.) Odredite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$2x^2 + \ln(x + 2) = 2$$

uz točnost $\varepsilon = 10^{-3}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

3. rujna 2015.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

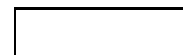
Izračunata rješenja (brojevi), **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: ponedjeljak, 7. rujna 2015., kasno navečer na webu.

Uvid u kolokvije: utorak, 8. rujna 2015., u 11 sati.

ZADATAK 1

1



(10 + 10 = 20 bodova.)

- (a) Napišite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti LR faktorizacije kvadratne matrice A , reda n . Ukratko komentirajte što se događa ako bitni uvjeti teorema nisu ispunjeni. Kako se bira pivotni element kod parcijalnog pivotiranja? Koliko veliki mogu biti elementi matrice L i R u LR faktorizaciji matrice A bez pivotiranja, odnosno, s parcijalnim pivotiranjem? Obrazložite ove rezultate.
- (b) Napišite definiciju integralnog skalarnog produkta, s težinskom funkcijom $w \geq 0$, na intervalu $[a, b]$. Što vrijedi za nultočke pripadnog ortogonalnog polinoma p_n , stupnja n ? Obrazložite ili dokažite tu tvrdnju. Ovaj niz polinoma zadovoljava i tzv. diskretnu ortogonalnost. Objasnite ukratko što to znači.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

3. rujna 2015.

(15 bodova.) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & x & 0 \\ 0 & x & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

3. rujna 2015.

(15 + 5 = 20 bodova.)

- (a) Zadane podatke (x_i, f_i) , za $i = 0, \dots, n$, gdje su x_i međusobno različiti čvorovi, interpoliramo polinomom. Što je Lagrangeova baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n i koja su osnovna svojstva te baze? Kako izgleda pripadna matrica linearnog sustava za problem interpolacije? Što su koeficijenti interpolacijskog polinoma zapisanog u Lagrangeovoj bazi? Kako možemo efikasno računati vrijednosti polinoma baze? Koliko je aritmetičkih operacija potrebno za računanje vrijednosti interpolacijskog polinoma u nekoj točki? Dovoljno je navesti samo red veličine, a ne točan broj.
- (b) Što su “nije čvor” (“not-a-knot”) rubni uvjeti za kubičnu splajn interpolaciju? Uz te rubne uvjete, nađite kubični splajn s koji interpolira sljedeći skup podataka (točaka)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f_i & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} .$$

Opravdajte postupak kojim računate traženi splajn. Izračunajte vrijednost tog splajna u točki $x = 1$.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

3. rujna 2015.

(15 bodova.) Ukrasne ploče za oblaganje podova imaju oblik kvadrata. Proizvođač formira cijenu ukrasne ploče prema njezinoj površini pomnoženoj s koeficijentom težine izrade. Za ploče s odgovarajućom stranicom i koeficijentom težine izrade, cijene su sljedeće

stranica u cm	8	10	12	15
koeficijent težine izrade	1	1.2	1.2	1
cijena u kn	7	13	19	25

Napišite oblik funkcije $\varphi(x, t)$ za cijenu ploče, pri čemu je x duljina njezine stranice, a t koeficijent težine izrade. Metodom najmanjih kvadrata odredite parametre te funkcije za zadane podatke. Dobivenom funkcijom φ odredite cijenu ploče sa stranicom 20 cm i koeficijentom težine izrade 1.1.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

3. rujna 2015.

(20 bodova.) Odredite čvor x_0 i težinu w_0 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_0^1 x^{1/4} f(x) dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvorove x_1, x_2 i težine w_1, w_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 2

$$\int_0^1 x^{1/4} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula? Za funkciju $f(x) = x^5$, izračunajte ocjenu greške ovih formula, pripadne približne vrijednosti integrala i prave greške.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

3. rujna 2015.

(15 bodova.) Odredite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$x^2 + \ln(x + 1) = 1$$

uz točnost $\varepsilon = 10^{-4}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške.