JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

19. lipnja 2015.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost, **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 28. lipnja 2015., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 29. lipnja 2015., u 10 sati.

1

Zadatak 1

(15 bodova.)

(a) Napišite oblik i osnovna svojstva **Givensove rotacije** u ravnini. Kako izgleda matrica rotacije reda n u (i, j) ravnini?

(b) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(G) = n$. Opišite kako se primjenom ravninskih rotacija računa **QR faktorizacija** matrice G — svođenje matrice G na trokutasti oblik i računanje matrice Q.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

19. lipnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p$$

na intervalu $[0, 3]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite kvadratni polinom φ koji zadovoljava uvjete

$$\varphi(2) = 4, \quad \varphi'(2) = 4,$$

i aproksimira funkciju f na zadanom intervalu, s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

19. lipnja 2015.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_{-1}^{0} (x^2 + x + 1)e^x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

19. lipnja 2015.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite težine w_1, w_1', w_2 i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f\left(\frac{1}{4}\right) + w_1' f'\left(\frac{1}{4}\right) + w_2 f(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

(b) Što vrijedi za težinske koeficijente u Newton–Cotesovim (ili interpolacijskim) integracijskim formulama, a što u Gaussovim integracijskim formulama? Ima li to neke veze s konvergencijom odgovarajućih formula i što se zna o konvergenciji?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

19. lipnja 2015.

$(10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite najveće negativno sjecište grafova krivulja zadanih jednadžbama

$$y = \sin x \quad \text{i} \quad y = x^2 + x - 0.5,$$

uz točnost $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(b) Opišite Newtonovu metodu za nalaženje nultočaka funkcije f na intervalu $[a, b]$. Kako se računaju iteracije i uz koje uvjete su dobro definirane? Mora li ova metoda globalno konvergirati? Mora li ova metoda lokalno konvergirati? Koji je red konvergencije i kako možemo modificirati metodu za višestruke nultočke?

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

19. lipnja 2015.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost, **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 28. lipnja 2015., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 29. lipnja 2015., u 10 sati.

Zadatak 1

1

(15 bodova.) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\mathrm{rang}(G) = n$.

(a) Napišite "puni" i "skraćeni" oblik **QR faktorizacije** matrice G.

(b) Napišite iskaz teorema o **egzistenciji i jedinstvenosti** QR faktorizacije matrice G.

(c) Ukratko komentirajte što se događa ako G **nema** puni rang po stupcima.

(d) Ukratko opišite neku **numeričku** metodu za **računanje** QR faktorizacije.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

19. lipnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p$$

na intervalu $[0, 4]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite kvadratni polinom φ koji zadovoljava uvjete

$$\varphi(3) = 9, \quad \varphi'(3) = 6,$$

i aproksimira funkciju f na zadanom intervalu, s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

19. lipnja 2015.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) e^x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

19. lipnja 2015.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite težine w_1, w_1', w_2 i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f\left(\frac{1}{3}\right) + w_1' f'\left(\frac{1}{3}\right) + w_2 f(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^2\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

(b) Što su Gauss–Radauove integracijske formule i koji je njihov stupanj polinomne egzaktnosti? Što vrijedi za čvorove u ovim formulama i što zadovoljava pripadni polinom čvorova?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

19. lipnja 2015.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite najmanje pozitivno sjecište grafova krivulja zadanih jednadžbama

$$y = \cos x \quad \text{i} \quad y = -x^2 - x + 1.5,$$

uz točnost $\varepsilon = 10^{-3}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(b) Opišite metodu pogrešnog položaja ("regula falsi") za nalaženje nultočaka funkcije f na intervalu $[a, b]$. Kako se računaju iteracije i uz koje uvjete su dobro definirane? Uz koje pretpostavke ova metoda sigurno konvergira i koji je red konvergencije? Je li ova metoda brža od metode raspolavljanja?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

19. lipnja 2015.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost, **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 28. lipnja 2015., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 29. lipnja 2015., u 10 sati.

1

Zadatak 1

(15 bodova.) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, uz $n \geq m$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(A) = m$, i neka je $b \in \mathbb{R}^n$ zadani vektor.

(a) Napišite pripadnu matričnu formulaciju problema **najmanjih kvadrata**.

(b) Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** rješenja problema najmanjih kvadrata preko sustava **normalnih jednadžbi** i njegovu geometrijsku interpretaciju.

(c) Ukratko komentirajte što se događa ako A **nema** puni rang po stupcima.

(d) Ukratko opišite neku **numeričku** metodu za **računanje** rješenja sustava normalnih jednadžbi.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

19. lipnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p$$

na intervalu $[0, 3]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite kvadratni polinom φ koji zadovoljava uvjete

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi'(1) = 2,$$

i aproksimira funkciju f na zadanom intervalu, s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ — ZADATAK 3

19. lipnja 2015.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1)e^x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

19. lipnja 2015.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite težine w_1, w_1', w_2 i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f\left(\frac{3}{4}\right) + w_1' f'\left(\frac{3}{4}\right) + w_2 f(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^2\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

(b) Što su Gaussove integracijske formule i koji je njihov stupanj polinomne egzaktnosti? Što vrijedi za čvorove u ovim formulama i što zadovoljava pripadni polinom čvorova?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

19. lipnja 2015.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite najveće negativno sjecište grafova krivulja zadanih jednadžbama

$$y = \sin x \quad \text{i} \quad y = -x^2 + 1.5\,x + 1,$$

uz točnost $\varepsilon = 10^{-3}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(b) Opišite metodu jednostavne iteracije i kako se ona koristi za nalaženje nultočaka funkcije f na intervalu $[a, b]$. Uz koje pretpostavke ova metoda sigurno konvergira i koji je red konvergencije? Je li ova metoda brža od metode raspolavljanja? Može li ova metoda biti jednako brza kao Newtonova metoda, ili čak i brža?

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

19. lipnja 2015.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (brojevi), **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost, **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati: nedjelja, 28. lipnja 2015., kasno navečer na webu.
Uvid u kolokvije: ponedjeljak, 29. lipnja 2015., u 10 sati.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.)

(a) Napišite oblik i osnovna svojstva **Householderovog reflektora** reda n.

(b) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(G) = n$. Opišite kako se primjenom reflektora računa **QR faktorizacija** matrice G — svođenje matrice G na trokutasti oblik i računanje matrice Q.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

19. lipnja 2015.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p$$

na intervalu $[0, 4]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite kvadratni polinom φ koji zadovoljava uvjete

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi'(1) = 2,$$

i aproksimira funkciju f na zadanom intervalu, s težinskom funkcijom $w(x) = 1$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

19. lipnja 2015.

(10 bodova.) Zadan je integral

$$\int_{-1}^{0} (x^2 + x + 2)e^x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

19. lipnja 2015.

$(10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite težine w_1, w_1', w_2 i čvor x_2 u općoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx w_1 f\left(\frac{2}{3}\right) + w_1' f'\left(\frac{2}{3}\right) + w_2 f(x_2),$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x\sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

(b) Što su Gauss–Lobattove integracijske formule i koji je njihov stupanj polinomne egzaktnosti? Što vrijedi za čvorove u ovim formulama i što zadovoljava pripadni polinom čvorova?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

19. lipnja 2015.

$(10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite najveće negativno sjecište grafova krivulja zadanih jednadžbama

$$y = \cos x \quad \text{i} \quad y = x^2 - 1.5\,x - 1.5,$$

uz točnost $\varepsilon = 10^{-4}$.

Napomene: Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2. Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(b) Opišite metodu sekante za nalaženje nultočaka funkcije f na intervalu $[a, b]$. Kako se računaju iteracije i uz koje uvjete su dobro definirane? Mora li ova metoda globalno konvergirati? Mora li ova metoda lokalno konvergirati? Koji je red konvergencije i kako možemo modificirati metodu za višestruke nultočke?