JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se potpisati na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Rezultati i uvid u kolokvije: utorak 9.9. u 11:00 kod prof. Grubisica.

ZADATAK 1.

(20 bodova)

Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **kubične splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte je li kubična splajn interpolacija **lokalna** ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju kubične splajn interpolacije prema funkciji f? Kojeg **reda** je konvergencija i o čemu to ovisi?

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 2.

(20 bodova)

Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U tako da je $PA = LU$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 3.

(20 bodova)

Funkciju

$$f(x) = (3x+1)\sqrt{x-1}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu [2.5, 4.5] tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-3}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n+1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε, ako za interpolaciju koristimo

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu [2.5, 4.5],

(b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima [2.5, 3.5] i [3.5,4.5].

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(3)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 4.

(15 bodova)

(a) Napišite formulu za Newtonove iteracije koje aproksimiraju lokalni ekstrem funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Izračunajte lokalni minimum funkcije

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

(c) Komentirajte, ukratko, jedinstvenost minimuma. (Napomena. Možete razmišljati o analogiji s minimizacijom u diskretnoj metodi najmanjih kvadrata. Matrica u definiciji funkcije f je pozitivno definitna.)

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 5.

(20 bodova)

Zadana je funkcija

$$f(x) = x^2 - x$$

na intervalu $[0, 2]$. Za bilo koji zadani broj $N \in \mathbb{N}$, neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente b_n u aproksimaciji funkcije f trigonometrijskim 'polinomom', tj. funkcijom oblika

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\pi x) \ .$$

Ovise li koeficijenti b_n o 'duljini' polinoma N? Obrazložite odgovor!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 6.

(20 bodova)

Numerički nađite rješenje jednadžbe $e^x - 5 = 0$ tako da greška bude manja od 10^{-8}. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se potpisati na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Rezultati i uvid u kolokvije: utorak 9.9. u 11:00 kod prof. Grubisica.

ZADATAK 1.

(20 bodova)

Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **po dijelovima kubične Hermiteove** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte je li po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija **lokalna** ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju po dijelovima kubične Hermiteove interpolacije prema funkciji f? Kojeg **reda** je konvergencija i o čemu to ovisi?

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 2.

(20 bodova)

Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i U tako da je $PA = LU$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 3.

(20 bodova)

Funkciju

$$f(x) = (3x + 1)\sqrt{x + 1}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu [0, 2] tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-3}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε, ako za interpolaciju koristimo

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu [0, 2],

(b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima [0, 1] i [1,2].

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(0.5)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 4.

(15 bodova)

Odgovorite na sljedeća pitanja:

(a) Napišite formulu za Newtonove iteracije koje aproksimiraju lokalni ekstrem funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(b) Izračunajte lokalni minimum funkcije

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

(c) Komentirajte, ukratko, jedinstvenost minimuma. (Napomena. Možete razmišljati o analogiji s minimizacijom u diskretnoj metodi najmanjih kvadrata. Matrica u definiciji funkcije f je pozitivno definitna.)

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 5.

(20 bodova)

Zadana je funkcija

$$f(x) = x^2 - x$$

na intervalu $[0, 2]$. Za bilo koji zadani broj $N \in \mathbb{N}$, neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente f_n u aproksimaciji funkcije f trigonometrijskim 'polinomom', tj. funkcijom oblika

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n \sin(n\pi x) \ .$$

Ovise li koeficijenti f_n o 'duljini' polinoma N? Obrazložite odgovor!

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

Popravni kolokvij – 5. rujna 2014.

ZADATAK 6.

(20 bodova)

Numerički nađite rješenje jednadžbe $x^3 + 3 = 0$ tako da greška bude manja od 10^{-4}. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!